

BÀI TẬP NÂNG CAO HÌNH HỌC 7

(Các đề thi violympic toán 7)

Bài 1: Cho ΔABC nhọn. Vẽ về phía ngoài ΔABC các Δ đều ABD và ACE . Gọi M là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABE = \Delta ADC$ b) $\angle BMC = 120^\circ$

Bài 2: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . ở miền ngoài của tam giác ABC ta vẽ các tam giác vuông cân ABE và ACF đều nhận A làm đỉnh góc vuông. Kẻ EM, FN cùng vuông góc với AH (M, N thuộc AH).

- a) Chứng minh: $EM + HC = NH$.
- b) Chứng minh: $EN // FM$.

Bài 3: Cho cạnh hình vuông $ABCD$ có độ dài là 1. Trên các cạnh AB, AD lấy các điểm P, Q sao cho chu vi ΔAPQ bằng 2.

Chứng minh rằng : $\angle PCQ = 45^\circ$.

Bài 4: Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = AC$), tia phân giác của các góc B và C cắt AC và AB lần lượt tại E và D .

- a) Chứng minh rằng: $BE = CD; AD = AE$.
- b) Gọi I là giao điểm của BE và CD . AI cắt BC ở M , chứng minh rằng các $\Delta MAB; MAC$ là tam giác vuông cân.
- c) Từ A và D vẽ các đường thẳng vuông góc với BE , các đường thẳng này cắt BC lần lượt ở K và H . Chứng minh rằng $KH = KC$.

Bài 5: Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng:

- a) $DM = EN$
- b) Đường thẳng BC cắt MN tại trung điểm I của MN .
- c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Bài 6: Cho tam giác vuông ABC : $A = 90^\circ$, đường cao AH , trung tuyến AM . Trên tia đối tia MA lấy điểm D sao cho $DM = MA$. Trên tia đối tia CD lấy điểm I sao cho $CI = CA$, qua I vẽ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng AH tại E .

Chứng minh: $AE = BC$.

Bài 7: Cho ba điểm B, H, C thẳng hàng, $BC = 13$ cm, $BH = 4$ cm, $HC = 9$ cm. Từ H vẽ tia Hx vuông góc với đường thẳng BC .

Lấy A thuộc tia Hx sao cho $HA = 6$ cm.

- a) ΔABC là Δ gì ? Chứng minh điều đó.
- b) Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Từ D vẽ đường thẳng song song với AH cắt AC tại E . Chứng minh: $AE = AB$

Bài 8: Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

a) $AC = EB$ và $AC // BE$

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho AI = EK . Chứng minh ba điểm I , M , K thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$) . Biết $HBE = 50^\circ$; $MEB = 25^\circ$. Tính HEM và BME

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của góc ABD cắt AC tại M. Chứng minh:

a) Tia AD là phân giác của góc BAC b) $AM = BC$

Bài 10: Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh CD. Tia phân giác của góc ABE cắt AD ở K. Chứng minh $AK + CE = BE$.

**********

BÀI TẬP NÂNG CAO ĐẠI SỐ 7

Bài 1. Tìm giá trị n nguyên dương:

a) $\frac{1}{8}.16^n = 2^n$;

b) $27 < 3^n < 243$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

$$\left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{44.49}\right) \frac{1-3-5-7-\dots-49}{89}$$

Bài 3. Hiện nay hai kim đồng hồ chỉ 10 giờ. Sau ít nhất bao lâu thì 2 kim đồng hồ nằm đối diện nhau trên một đường thẳng.

Bài 4: a) Tính: $P = \frac{\frac{1}{2010} + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}}{\frac{5}{2010} + \frac{5}{2011} - \frac{5}{2012}} - \frac{\frac{2}{2009} + \frac{2}{2010} - \frac{2}{2011}}{\frac{3}{2009} + \frac{3}{2010} - \frac{3}{2011}}$

b) Biết: $13 + 23 + \dots + 103 = 3025$. Tính: $S = 23 + 43 + 63 + \dots + 203$

c) Cho: $A = \frac{x^3 - 3x^2 + 0,25xy^2 - 4}{x^2 + y}$

Tính giá trị của A biết $x = \frac{1}{2}$; y là số nguyên âm lớn nhất.

Bài 5: Một con thỏ chạy trên một con đường mà hai phần ba con đường bằng qua đồng cỏ và đoạn đường còn lại đi qua đầm lầy. Thời gian con thỏ chạy trên đồng cỏ bằng nửa thời gian chạy qua đầm lầy.

Hỏi vận tốc của con thỏ trên đoạn đường nào lớn hơn? Tính tỉ số vận tốc của con thỏ trên hai đoạn đường?

Bài 6: Trên quãng đường AB dài 31,5 km. An đi từ A đến B, Bình đi từ B đến A. Vận tốc An so với Bình là 2: 3. Đến lúc gặp nhau, thời gian An đi so với Bình đi là 3: 4.

Tính quãng đường mỗi người đi tới lúc gặp nhau?

Bài 7: a) Tìm x biết: $\frac{x-1}{2012} + \frac{x-2}{2011} - \frac{x-3}{2010} = \frac{x-4}{2009}$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho: $2^n - 1$ chia hết cho 7.

Bài 8: a) Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất

b) Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$; $\frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $x^2 - y^2 = -16$

c) Tìm x, y, z biết $\frac{3x}{8} = \frac{3y}{64} = \frac{3z}{216}$ và $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$

d) Tìm các số nguyên tố x, y sao cho: $51x + 26y = 2000$.

Bài 9: Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương đều có:

a) $A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2) \vdots 91$

b) $B = 36^{38} + 41^{33}$ chia hết cho 77.

c) $C = 3^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+3} + 2^{n+2}$ chia hết cho 6.

d) Chứng minh rằng $\frac{10^{2006} + 53}{9}$ là một số tự nhiên.

Bài 10: Một ô tô phải đi từ A đến B trong thời gian dự định. Sau khi đi được nửa quãng đường ô tô tăng vận tốc lên 20% do đó đến B sớm hơn dự định 15 phút.

Tính thời gian ô tô đi từ A đến B?

Bài 11: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$ và tìm giá trị đó.

a). $A = \frac{x+3}{x-2}$.

b). $B = \frac{1-2x}{x+3}$.

Bài 12: Ba lớp 7A, 7B, 7C có 94 học sinh tham gia trồng cây. Mỗi học sinh lớp 7A trồng được 3 cây, Mỗi học sinh lớp 7B trồng được 4 cây, Mỗi học sinh lớp 7C trồng được 5 cây. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu h/ s. Biết rằng số cây mỗi lớp trồng được đều như nhau.

Bài 13: Trong một kỳ thi học sinh giỏi cấp Huyện, bốn bạn Nam, Bắc, Tây, Đông đạt 4 giải 1, 2, 3, 4. Biết rằng mỗi câu trong 3 câu dưới đây đúng một nửa và sai 1 nửa:

a, Tây đạt giải 1, Bắc đạt giải 2. b, Tây đạt giải 2, Đông đạt giải 3.

c, Nam đạt giải 2, Đông đạt giải 4.

Em hãy xác định thứ tự đúng của giải cho các bạn.

Bài 14: a) Chứng minh rằng: $2a - 5b + 6c \vdots 17$ nếu $a - 11b + 3c \vdots 17$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$).

b) Biết $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Bài 15: Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$.

CMR biểu thức sau có giá trị nguyên: $P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$

Bài 16: Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5m/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4m/s, trên cạnh thứ tư với vận tốc 3m/s. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây.

Bài 17: Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$ b) $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$

Bài 18: Tìm A biết rằng: $A = \frac{a}{b+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{b}{c+a}$.

Bài 19: Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A ?

Đáp án:

BÀI 1: Cho ΔABC nhọn. Vẽ về phía ngoài ΔABC các Δ đều ABD và ACE . Gọi M là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng:

- a) $\Delta ABE = \Delta ADC$ b) $\angle BMC = 120^\circ$

Giải:

a) Xét ΔABE và ΔADC :
 $AB = AD$; $AE = AC$ (vì tam giác đều)

$\angle BAE = \angle DAC = 60^\circ + \angle BAC$
 nên $\Delta ABE = \Delta ADC$ (c - g - c)

b) Ta có : $\angle BMC = \angle MCE + \angle MEC$ (t/c góc ngoài)
 $= \angle MCA + \angle ACE + \angle MEC$

Từ $\Delta ABE = \Delta ADC$

$\angle MCA = \angle MEA$ (cặp góc tương ứng)

nên $\angle BMC = \angle ACE + \angle MEC + \angle MEA = \angle ACE + \angle AEC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

Bài 2: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . ở miền ngoài của tam giác ABC ta vẽ các tam giác vuông cân ABE và ACF đều nhận A làm đỉnh góc vuông. Kẻ EM, FN cùng vuông góc với AH (M, N thuộc AH).

a) Chứng minh: $EM + HC = NH$.

b) Chứng minh: $EN \parallel FM$.

Giải:

a) Ta có : $\Delta AHB = \Delta EMA$ (ch - gn)

Vì $\angle AHB = \angle EMA = 90^\circ$

$AB = AE$ (gt)

$\angle BAH = \angle AEM$ (cùng phụ với $\angle MAE$)

Suy ra : $EM = AH$ (1)

Tương tự: $\Delta AHC = \Delta FNA$ (ch - gn)

$\Rightarrow HC = NA$ (2)

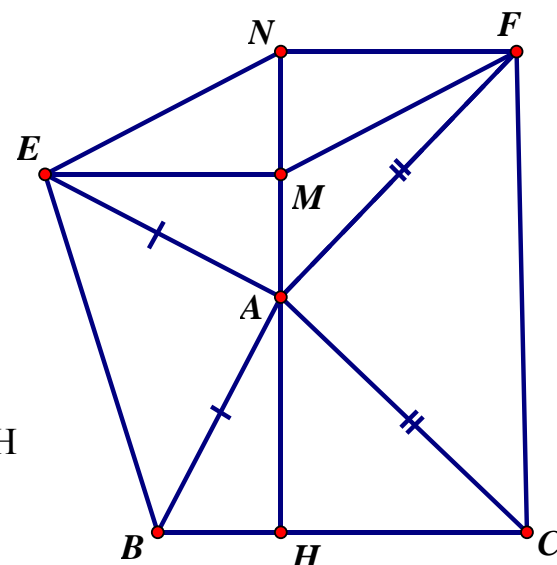
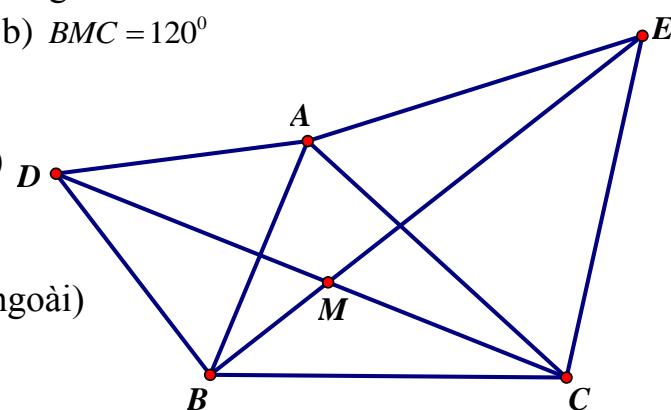
Từ (1) và (2). Suy ra : $EM + HC = AH + NA = NH$

b) Từ $\Delta AHC = \Delta FNA \Rightarrow AH = NF$ (3)

Từ (1) và (3). Ta có : $EM = NF$

mặt khác : $EM \perp NF$ (cùng vuông góc với AH)

Ta suy ra : $EN \parallel FM$



Bài 3: Cho cạnh hình vuông ABCD có độ dài là 1. Trên các cạnh AB, AD lấy các điểm P, Q sao cho chu vi ΔAPQ bằng 2.

Chứng minh rằng : $PCQ = 45^\circ$.

Giải:

Trên cạnh AB lấy điểm P bất kì.

Vẽ đường tròn(P; PB) và đường tròn (C; CB)

Cắt nhau tại I. Gọi $J = PI \cap AD$.

Ta có : ΔAPQ có chu vi bằng 2 cm.

Thật vậy: $\Delta PBC = \Delta BIC$ (c-c-c)

$\Rightarrow \angle ICP = \angle BCP$ (*)

Nên $\angle PIC = \angle PBC = 90^\circ$

Suy ra : $\Delta QIC = \Delta QDC$ (ch-cgv)

$\Rightarrow IQ = QD; ICQ = DCQ$ (**)

Vậy Chu vi $\Delta APQ = AP + PQ + AQ = AP + PI + IQ + AQ$

$= AP + PB + QD + AQ = AB + AD = 2$

Từ (*) và (**). Ta có :

$$\angle PCQ = \angle PCI + \angle ICQ = \frac{\angle ICB + \angle ICD}{2} = \frac{\angle BCD}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Bài 4: Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = AC$), tia phân giác của các góc B và C cắt AC và AB lần lượt tại E và D.

a) Chứng minh rằng: $BE = CD; AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BE và CD. AI cắt BC ở M, chứng minh rằng các $\Delta MAB; MAC$ là tam giác vuông cân.

c) Từ A và D vẽ các đường thẳng vuông góc với BE, các đường thẳng này cắt BC lần lượt ở K và H. Chứng minh rằng $KH = KC$.

Giải: a) Ta có: $\angle ABE = \angle ACD = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$

Nên $\Delta ACD = \Delta ABE$ (g-c-g)

$\Rightarrow BE = CD; AD = AE$.

b) Vì ΔABC vuông cân tại A

nên AM là đường trung tuyến thì

AM cũng là đường cao.

Suy ra : $\Delta MAB; MAC$ là các tam giác vuông

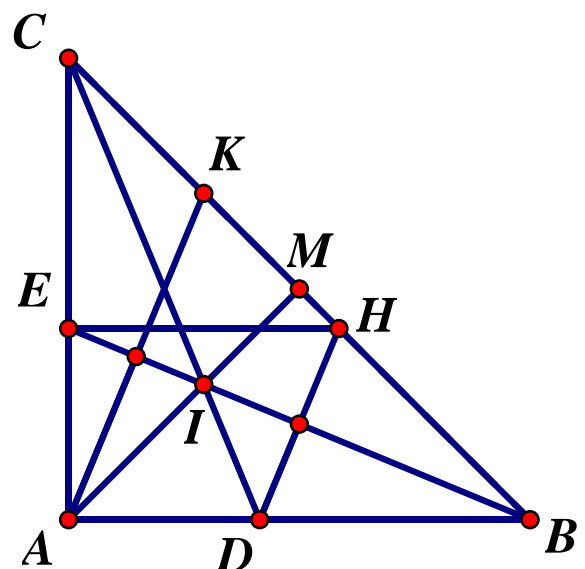
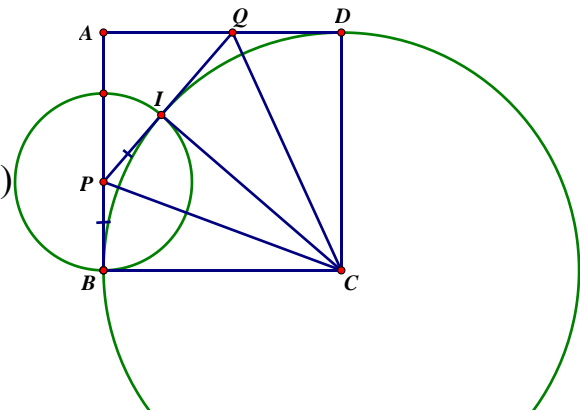
Có 1 góc bằng 45° là tam giác vuông cân.

c) ΔABK có BE vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên ΔABK cân tại B.

Suy ra : BE cũng là đường trung trực

Nên $EK = EA \Rightarrow \Delta AEB = \Delta KEB$ (c-c-c)

$\Rightarrow \angle EKC = 90^\circ; \angle KCE = 45^\circ$ nên ΔEKC vuông cân



nên $KC = KE$ và $CEK = 45^\circ$ (*)
 nên $EK \parallel AM$ Suy ra : $\triangle EKH$ vuông cân tại K
 (Vì $K = 90^\circ$;

Bài 5: Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng:

- a) $DM = EN$
- b) Đường thẳng BC cắt MN tại trung điểm I của MN .
- c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Giải: a) Ta có : $\triangle DMB = \triangle ENC$ (g-c-g) (Vì $MBD = NCE$ cùng bằng ACB)
 Nên $MD = NE$.

b) Xét $\triangle DMI$ và $\triangle ENI$: $D = E = 90^\circ$, $MD = NE$ (cmt)

$\angle MID = \angle NIE$ (Hai góc đối đỉnh)

Nên $\triangle DMI = \triangle ENI$ (cgv - gn)

$\Rightarrow MI = NI$

c) Từ B và C kẻ các đường thẳng lần lượt vuông góc với AB và AC cắt nhau tại J .

Ta có : $\triangle ABJ = \triangle ACJ$ (g-c-g) $\Rightarrow JB = JC$

Nên J thuộc AL đường trung trực ứng với BC

Mặt khác : Từ $\triangle DMB = \triangle ENC$ (Câu a)

Ta có : $BM = CN$

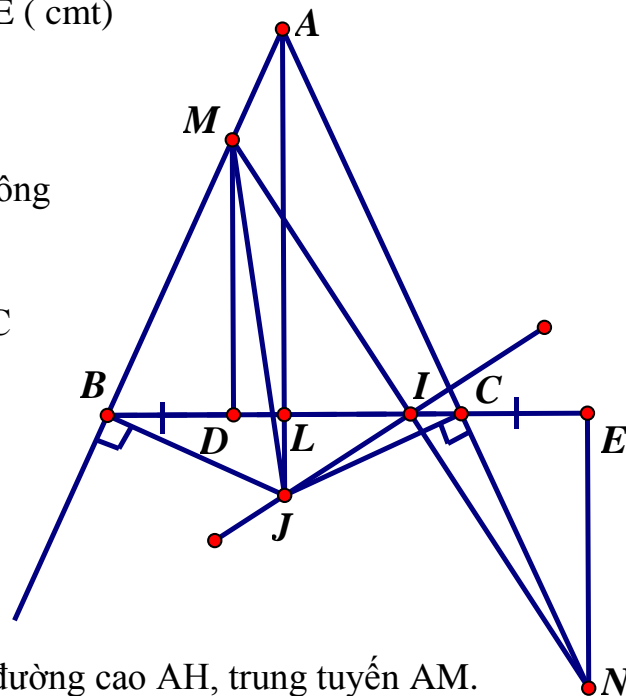
$BJ = CJ$ (cm trên)

$\angle MBJ = \angle NCJ = 90^\circ$

Nên $\triangle BMJ = \triangle CNJ$ (c-g-c)

$\Rightarrow MJ = NJ$ hay đường trung trực của MN

Luôn đi qua điểm J cố định.



Bài 6: Cho tam giác vuông ABC : $A = 90^\circ$, đường cao AH , trung tuyến AM .

Trên tia đối tia MA lấy điểm D sao cho $DM = MA$.

Trên tia đối tia CD lấy điểm I sao cho

$CI = CA$, qua I vẽ đường thẳng song song

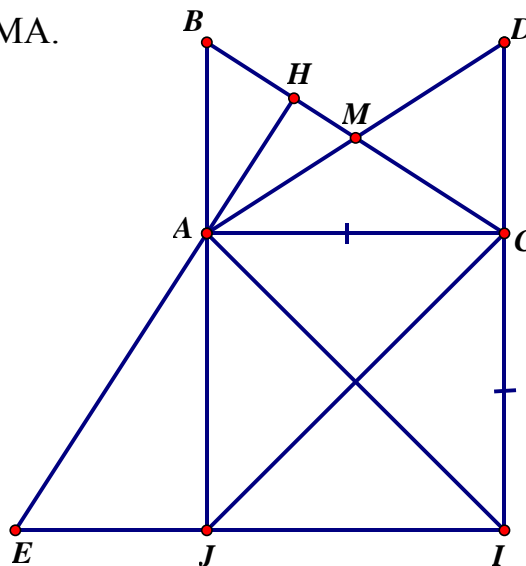
với AC cắt đường thẳng AH tại E .

Chứng minh: $AE = BC$.

a) Ta có : $\triangle AMB = \triangle DMC$ (c-g-c)

$\Rightarrow AB = DC$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c-c-c)



Mặt khác : $\Delta ACI : ACI = 90^\circ; AC = CI$: vuông cân

$$\Delta ACJ = \Delta ICJ \text{ (CH -CGV)}$$

$\Rightarrow ACJ = ICJ$ hay CJ là phân giác của ACI hay ΔACJ vuông cân tại J.

Nên $AJ = AC$

Xét ΔEJA và ΔABC : $BAC = JAE = 90^\circ; AJ = AC$ (cmt);

$$EAJ = BAC (= BAH)$$

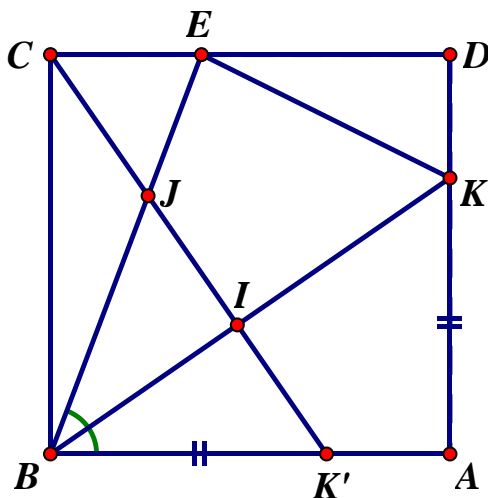
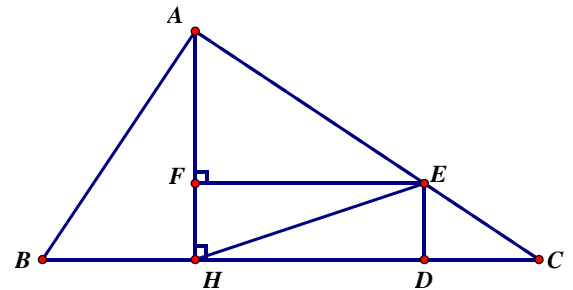
Nên $\Delta EJA = \Delta ABC$ (g-c-g) $\Rightarrow AE = BC$

Bài 7: Cho ba điểm B, H, C thẳng hàng, $BC = 13$ cm, $BH = 4$ cm, $HC = 9$ cm. Từ H vẽ tia Hx vuông góc với đường thẳng BC.

Lấy A thuộc tia Hx sao cho $HA = 6$ cm.

a) ΔABC là Δ gì ? Chứng minh điều đó.

b) Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Từ D vẽ đường thẳng song song với AH cắt AC tại E. Chứng minh: $AE = AB$



Bài 10:

