

TÀI LIỆU MÔN TOÁN LỚP 9 HÌNH HỌC

CHƯƠNG I: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1) Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông:

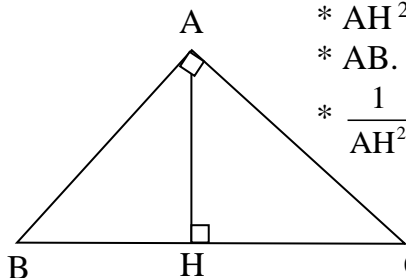
* $AB^2 = BH \cdot BC$; $AC^2 = HC \cdot BC$

* $AH^2 = BH \cdot HC$

* $AB \cdot AC = AH \cdot BC$

* $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

* ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Định lý Pythagore thuận, đảo)

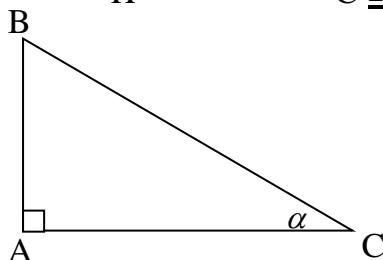


2) Tỷ số lượng giác của một góc nhọn :

$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}$ (= $\frac{\text{đổi}}{\text{huyền}}$)

$\cos \alpha = \frac{AC}{BC}$ (= $\frac{\text{kề}}{\text{huyền}}$)

$\text{Tg} \alpha = \frac{AB}{AC}$ (= $\frac{\text{đổi}}{\text{kề}}$) ; $\text{Cotg} \alpha = \frac{AC}{AB}$ (= $\frac{\text{kề}}{\text{đổi}}$)



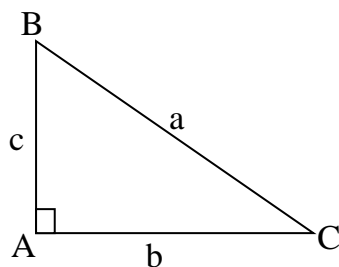
* Với 2 góc nhọn α ; β nếu ta có $\sin \alpha = \sin \beta$ (hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$; $\text{tg} \alpha = \text{tg} \beta$; $\text{cotg} \alpha = \text{cotg} \beta$) thì $\alpha = \beta$

* Nếu $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì ta có : $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$; $\text{Tg} \alpha = \text{Cotg} \beta$; $\text{Cotg} \alpha = \text{Tg} \beta$

* Tỷ số lượng giác của một số góc đặc biệt

Tỷ số lượng giác	30°	45°	60°
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) Giải tam giác vuông :



a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC vuông tại A

* $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$; $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$

* $b = c \cdot \text{tg} B = c \cdot \text{cotg} C$; $c = b \cdot \text{tg} C = b \cdot \text{cotg} B$

* ΔABC vuông tại A $\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$

$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$; $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$

• ΔABC vuông tại A có $C = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$

• ΔABC vuông tại A có $B = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$

CHƯƠNG II ĐƯỜNG TRÒN

1) Định nghĩa và sự xác định đường tròn:

a) **Định nghĩa** : Tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng không đổi bằng R là đường tròn tâm O, bán kính R. Kí hiệu : đường tròn (O; R) hay đường tròn (O).

b) **Vị trí của một điểm đối với đường tròn** :

- * Điểm M nằm trên đường tròn (O ; R) $\Leftrightarrow OM = R$.
- * Điểm M nằm ngoài đường tròn (O ; R) $\Leftrightarrow OM > R$.
- * Điểm M nằm trong đường tròn (O ; R) $\Leftrightarrow OM < R$.

c) **So sánh độ dài dây và đường kính** :

* **Định lý** : Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn .

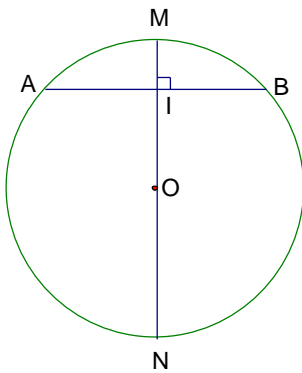
d) **Sự xác định của đường tròn:**

Định lý :

* Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (Tam giác ABC gọi là tam giác nội tiếp đường tròn)

* **Tâm của đường tròn ngoại tiếp t/g là giao điểm các đường trung trực của các cạnh tam giác .**

2) Tính chất đối xứng của đường tròn :



a) **Liên hệ giữa đường kính và dây cung:**

* **Định lý** : Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó .

(Đường tròn (O) có $OM \perp AB$ tại I \Rightarrow I là trung điểm của AB) .

* **Định lý đảo** : đường kính đi qua trung điểm của một dây (dây không là đường kính) thì vuông góc với dây đó . (Đường tròn (O) có OM cắt AB tại I và I là trung điểm của dây AB $\Rightarrow OM \perp AB$ tại I)

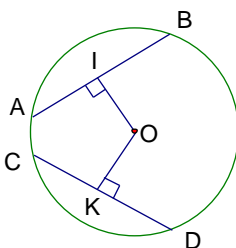
b) **Liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm :**

* **Định lý** : Trong một đường tròn :
+ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm

(Đường tròn (O) có $AB = CD$, $OI \perp AB$ tại I, $OK \perp CD$ tại K $\Rightarrow OI = OK$)

+ Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau

(Đ. Tròn (O) có $OI \perp AB$ tại I, $OK \perp CD$ tại K, $OI = OK \Rightarrow AB = CD$)



2) Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn :

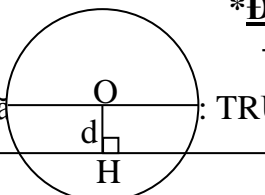
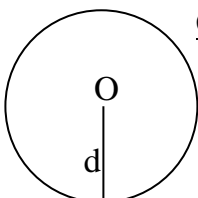
Ghi chú : d = OH là khoảng cách từ tâm đ. tròn (O, R) đến đ. thẳng a

* **Đường thẳng và đường tròn không giao nhau** :

- Số điểm chung : 0 ; - Hệ thức : $d > R$

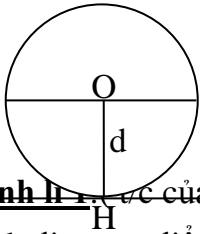
* **Đường thẳng và đường tròn cắt nhau** :

- Số điểm chung : 2 ; - Hệ thức : $d < R$



+ Trường hợp này đường thẳng a gọi là cát tuyến của đường tròn (O, R)

H



*** Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc :**

- Số điểm chung : 1 ; - Hệ thức : $d = R$

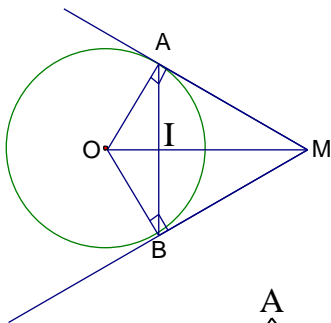
+ Trường hợp này đường thẳng a gọi là tiếp tuyến của đường tròn (O, R) và H gọi là tiếp điểm

*** Định lý 1** (dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến) Nếu một đ. thẳng là tiếp tuyến của đ. tròn thì nó vuông góc với b. kính đi qua t. điểm (Nếu a là tiếp tuyến của đ. tròn tâm O và H là tiếp điểm thì $a \perp OH$ hay $a \perp d$)

*** Định lý 2** (dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến) Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn .

(Đường tròn (O, R) có $OH = R$ và $OH \perp a$ thì a là tiếp tuyến của đường tròn (O)).

*** Định lý 3:** (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Nếu MA và MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm) thì :



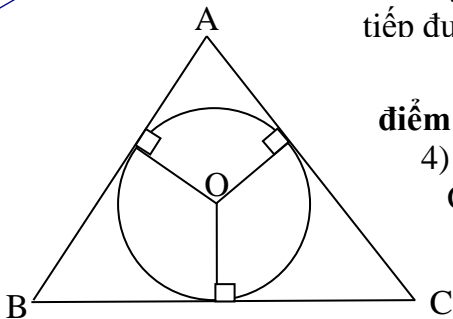
+ $MA = MB$.

+ OM là phân giác của góc AOB

+ MO là phân giác của góc AMB

+ $OM \perp AB$ tại I . I là trung điểm của AB (OM là trung trực của AB)

* Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC gọi là đường tròn nội tiếp tam giác ABC (Tam giác ABC gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn)



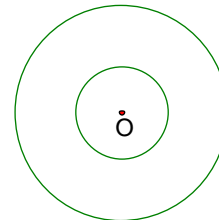
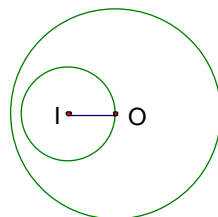
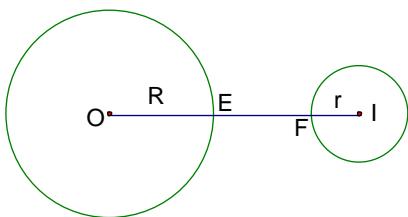
+ Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác .

4) Vị trí tương đối của hai đường tròn :

Ghi chú : d là khoảng cách hai tâm hai đường tròn $(O; R)$ và $(I; r)$, $d = OI$, giả sử $R > r > 0$.

*** Hai đường tròn không giao nhau :**

- Số điểm chung : 0 ; - Hệ thức giữa d, R, r :



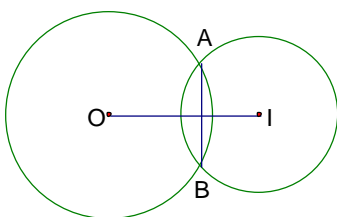
Ở ngoài nhau : $d > R + r$

Đụng nhau : $d < R - r$ Đặc biệt : đồng tâm ($d = 0$)

*** Hai đường tròn cắt nhau :** - Số điểm chung : 2

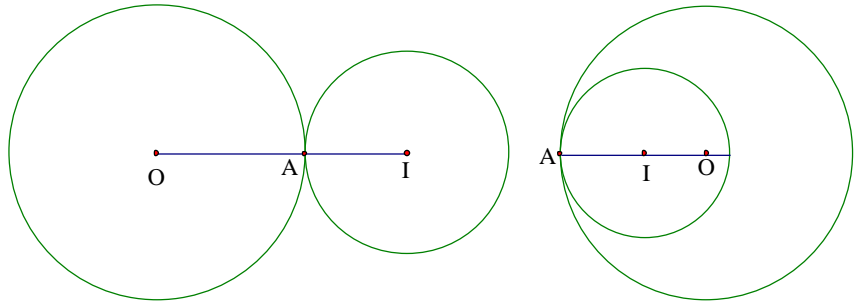
- Hệ thức giữa d, R, r là: $R - r < d < R + r$

+ Tính chất đường nối tâm : Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm vuông góc với dây chung và đi qua trung điểm của dây chung (Nếu đường tròn (O) và đường tròn (I) cắt nhau tại hai điểm A và B thì



$OI \perp AB$ tại H và $HA = HB$)

- * Hai đường tròn tiếp xúc :
- Số điểm chung : 1
- Hệ thức giữa d, R, r :



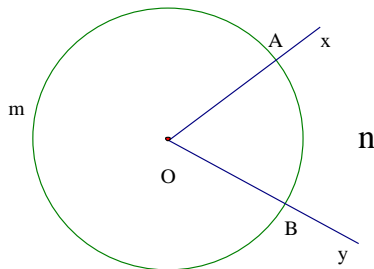
Tiếp xúc ngoài : $d = R + r$

Tiếp xúc trong : $d = R - r$

+ Tính chất đường nối tâm : Nếu hai đ. tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

CHƯƠNG III GÓC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1) Góc ở tâm : Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn

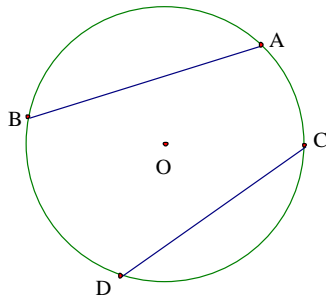


(Góc ở tâm AOB chắn cung AB)

* **Số đo cung** :

- + $\angle AOB = \text{sđ } AB$
- + Số đo cung nửa đường tròn là 180°
- + $\text{sđ } AmB = 360^\circ - \text{sđ } AnB$

***Số sánh hai cung** :



+ $\text{sđ } AB = \text{sđ } CD \Leftrightarrow AB = CD$

+ $\text{sđ } AB > \text{sđ } CD \Leftrightarrow AB > CD$

Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau .

+ $AB = CD \Leftrightarrow \text{sđ } AB = \text{sđ } CD$

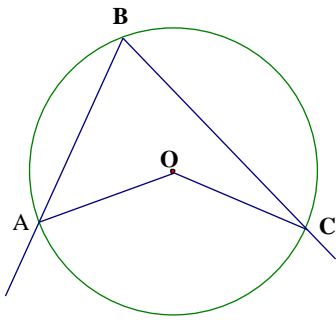
+ $AB > CD \Leftrightarrow \text{sđ } AB > \text{sđ } CD$

2) Góc nội tiếp :

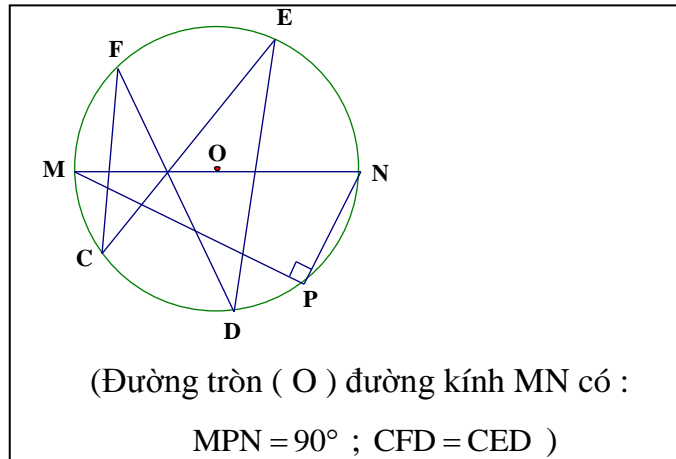
* Định nghĩa : Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh cắt đường tròn đó .

* Tính chất :

- Định lí : Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn .
- Hệ quả : Trong một đường tròn :
 - + Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc các cung bằng nhau thì bằng nhau
 - + Mọi góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông .
- + Mọi góc nội tiếp (nhỏ hơn hay bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung .

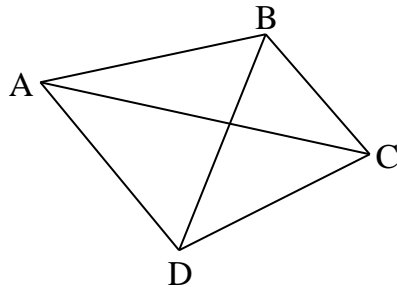


(Đường tròn (O ; OA) có :
 $sđ ABC = \frac{1}{2} sđ AC$; $ABC = \frac{1}{2} AOC$)



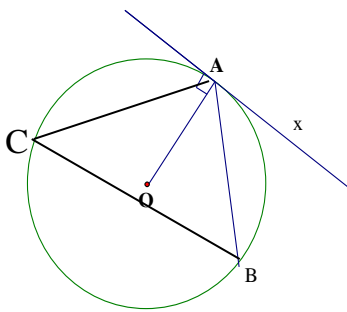
(Đường tròn (O) đường kính MN có :
 $MPN = 90^\circ$; $CFD = CED$)

3) Tứ giác nội tiếp



Tứ giác ABCD có $ABD = ACD = \alpha$
 (tứ giác ABCD có ABD và ACD cùng
 cạnh AD dưới một góc α) \Rightarrow tứ giác
 ABCD nội tiếp)

4) Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung :



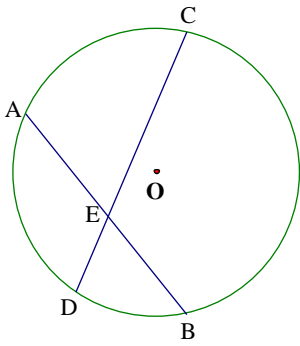
*Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung (đi từ tiếp điểm) bằng nửa số đo của cung bị chắn .

- $xAB = \frac{1}{2} sđ AB$

* Trong một đường tròn số đo của góc nội tiếp và số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung thì bằng nhau

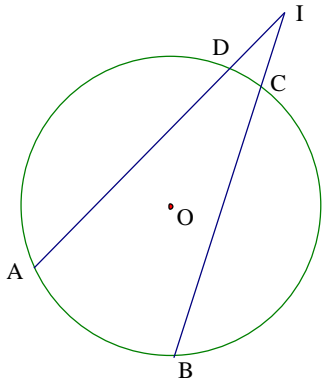
- $xAB = ACB$ (Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ; góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

5) Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn

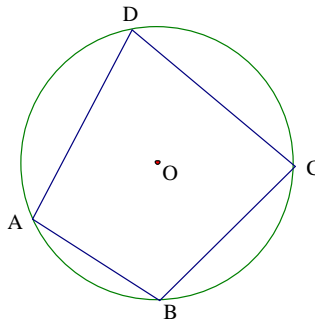


Số đo góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn (một cung nằm giữa hai cạnh của góc và cung kia nằm giữa các tia đối của hai cạnh đó) $\angle AEC = \frac{1}{2}(\text{sđ AC} + \text{sđ DB})$

6) Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn : Số đo góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn bởi hai cạnh của góc .Ta có : $\text{sđ AIB} = \frac{1}{2}(\text{sđ AB} - \text{sđ CD})$

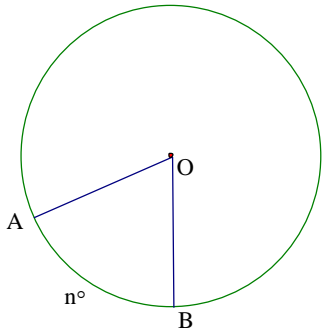


7) Tứ giác nội tiếp :



- * Định nghĩa : một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn .
- * Định lí (Tính chất) : Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0
- * Định lí đảo (cách nhận biết) : Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn .

8) Độ dài đường tròn (còn gọi là chu vi hình tròn), độ dài cung tròn :



* Độ dài đường tròn (còn gọi là chu vi hình tròn) :
 $C = 2 \pi R$ (R là bán kính đường tròn ; $\pi \approx 3,14$

* Độ dài cung tròn : $L_{AB} = \frac{\pi R n^0}{180^0}$ (R là bán kính đường tròn ;
 n^0 là số đo độ cung .

9) Diện tích hình tròn , diện tích hình quạt tròn :

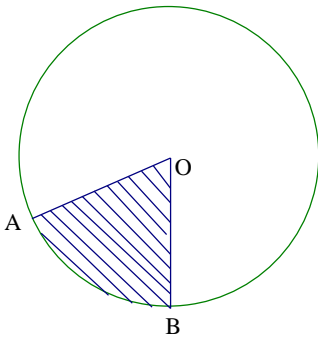
* Diện tích hình tròn :

$$S = \pi R^2$$

* Diện tích hình quạt tròn :

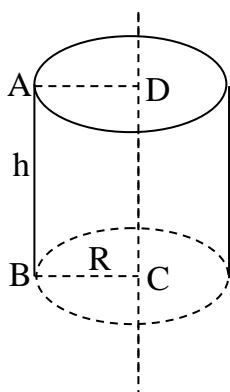
$$S = \frac{\pi R^2 n^0}{360} \text{ hay } S = \frac{L_{AB} \cdot R}{2} \text{ (R là bán kính hình tròn ; } n^0 \text{ là số đo độ}$$

hình quạt ; L_{AB} là độ dài cung AB ; $\pi \approx 3,14$)



CHƯƠNG IV : HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN – HÌNH CẦU

1) HÌNH TRỤ : Quay hình chữ nhật ABCD một vòng quanh cạnh CD cố định, hình phát sinh là hình trụ



- * Đáy là hai hình tròn bằng nhau (D ; AD) và (C ; CB) thuộc hai mặt phẳng song song
- * Đường thẳng CD là trục hình trụ .
- * AB là đường sinh (AB quét nên mặt xung quanh hình trụ)

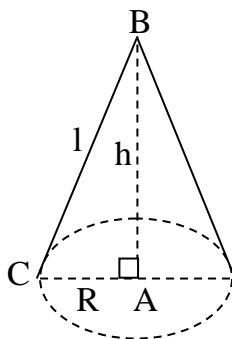
a) Diện tích xung quanh của hình trụ :

$$S_{xq} = 2\pi R \cdot h \text{ (R là bán kính hình tròn đáy) ; h là chiều cao hình trụ .}$$

b) Diện tích toàn phần : $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$

c) Thể tích hình trụ : $V = \pi R^2 \cdot h$

2) HÌNH NÓN : Quay hình tam giác ABC vuông tại A một vòng quanh cạnh AB cố định, hình phát sinh là HÌNH NÓN .



- * Đáy là hình tròn (A ; AC) ; Đỉnh là B
- * BC là đường sinh (BC quét nên mặt xung quanh hình nón)
- * Độ dài AB là chiều cao hình nón ; Đường thẳng AB là trục hình nón .

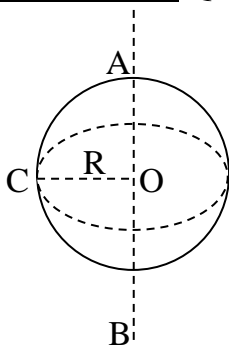
a) Diện tích xung quanh hình nón :

$$S_{xq} = \pi Rl \text{ (R là bán kính hình tròn đáy ; l là độ dài đường sinh)}$$

b) Diện tích toàn phần : $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$

c) Thể tích hình nón : $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h \text{ (h là chiều cao hình nón)}$

3) Hình cầu : Quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì hình phát sinh là hình cầu tâm O , bán kính R



a) Diện tích mặt cầu : $S = 4\pi R^2 \text{ (R là bán kính hình cầu)}$

b) Thể tích hình cầu :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

CÁC KIẾN THỨC CẦN LƯU Ý VÀ HỌC THUỘC ĐỂ ÁP DỤNG LÀM TOÁN

1) $Tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $Cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$; $Tg \alpha \cdot Cotg \alpha = 1$; $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

2) Nếu $\sin \beta < \sin \alpha < \sin \omega$ thì $\beta < \alpha < \omega$

* Nếu $Tg \beta < Tg \alpha < Tg \omega$ thì $\beta < \alpha < \omega$

* Nếu $\cos \beta < \cos \alpha < \cos \omega$ thì $\beta > \alpha > \omega$

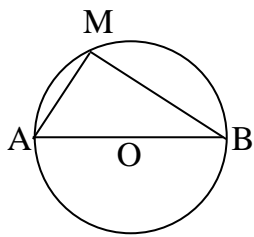
* Nếu $Cotg \beta < Cotg \alpha < Cotg \omega$ thì $\beta > \alpha > \omega$

3) **Vị trí của một điểm đối với đường tròn :**

a) Điểm M nằm trên đường tròn (O ; R) $\Leftrightarrow OM = R$

b) Điểm M nằm ngoài đường tròn (O ; R) $\Leftrightarrow OM > R$

c) Điểm M nằm trong đường tròn (O ; R) $\Leftrightarrow OM < R$



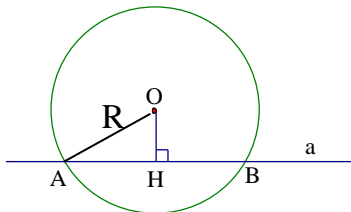
4) a) Nếu điểm M thuộc đường tròn đường kính AB thì $\angle AMB = 1v = 90^\circ$

b) Nếu $\triangle AMB$ vuông tại M thì tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMB$ là trung điểm O của cạnh huyền AB và $OA = OB = OM = \frac{1}{2}AB$

5) Nếu tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh góc vuông $AB = AC = a$ thì bán kính của đường tròn (O ; R) ngoại tiếp $\triangle ABC$ là

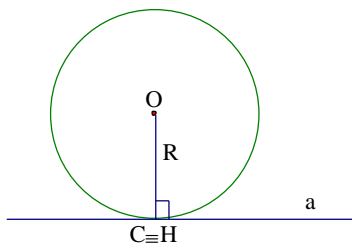
$$OB = OA = OC = R = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

6) a) Khi đường thẳng a và đường tròn (O ; R) có hai điểm chung A và B ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau . Đường thẳng a còn gọi là cát tuyến của đường tròn (O ; R)



b) $OH \perp a$ tại H. Đường thẳng a và đường tròn (O ; R) cắt nhau khi và chỉ khi $OH < R$

7) a) Khi đường thẳng a và đường tròn (O ; R) chỉ có một điểm chung C ,ta nói đường thẳng a

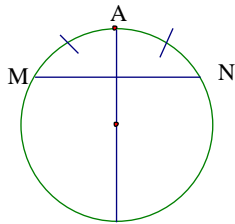


và đường tròn (O) tiếp xúc nhau. Ta còn nói đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O ; R). Điểm C gọi là tiếp điểm

b) $OH \perp a$ tại H, đường thẳng a và đường tròn (O ; R) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow OH = R$

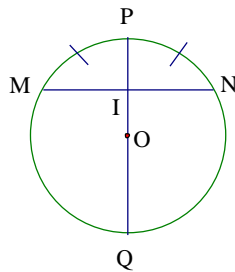
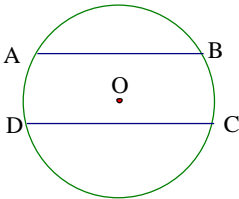
8) Đường thẳng a là tiếp tuyến của (O) ; C là tiếp điểm thì $a \perp OC$

9) Nếu A là điểm chính giữa của cung NM thì $NA = AM$



10) Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC (Tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O)) thì O chính là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác của ABC .

11) Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC (Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O)) thì O chính là giao điểm ba đường trung trực của tam giác của ABC .



12) Trong một đường tròn hai cung chắn bởi hai dây song song thì bằng nhau .

13)* Trong một đường tròn đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

** Trong một đường tròn đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì đi qua điểm chính giữa của cung căng dây ấy.

14) Đường tròn (O) có PQ là đường kính ; MN là dây cung ; MB ∈ IN và PQ ∩ NM = {I} ⇒ P là điểm chính giữa của cung NM ⇒ PN = PM

15) Trong một đường tròn đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại .

12) Đường tròn (O) có AB // DC (AB và CD

13) Đường tròn (O) có PQ là đường kính ; MN

là dây có PN = PM và PQ ∩ NM = {I} ⇒ I là

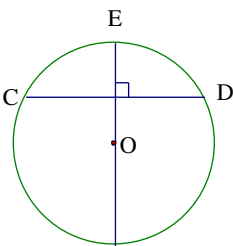
trung điểm của dây NM

* Trong một đường tròn hai cung bị chắn giữa

a) Đường tròn (O) có E là điểm chính giữa của cung CD ⇒ OE ⊥ CD

b) Đường tròn (O) có OE ⊥ CD (E thuộc cung CD) ⇒ E là điểm

chính giữa của cung CD hay sđ CE = sđ ED = $\frac{1}{2}$ sđ CD



16) Hình thang ABCD nội tiếp đường tròn ⇔ ABCD là hình thang cân

17) Với đa giác đều nội tiếp đường tròn (O ; R) :

a) Nếu lục giác đều có cạnh là a thì a = R .

b) Nếu hình vuông có cạnh là b thì b = R√2 .

c) Nếu tam giác đều có cạnh là c thì c = R√3 .

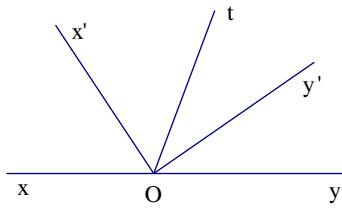
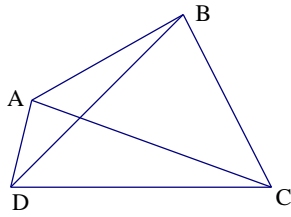
18) Đường tròn (O ; R) có AB = 60° thì AB là cạnh của lục giác đều nội tiếp ⇒ AB = R .

19) Đường tròn (O ; R) có CD = 90° thì CD là cạnh của hình vuông nội tiếp ⇒ CD = R√2

20) Đường tròn (O ; R) có EF = 120° thì EF là cạnh của tam giác đều nội tiếp ⇒ EF = R√3 .

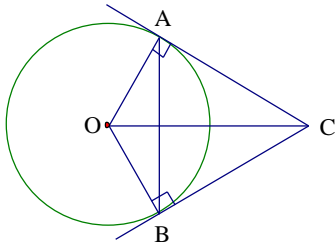
21) Tam giác đều có cạnh là a thì S = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và đường cao h = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

22) Nếu tứ giác ABCD có DAC = DBC thì tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn .



23) Ox' là tia phân giác của góc xOt ;
 Oy' là tia phân giác của góc tOy
 và góc xOt kề bù với góc tOy suy ra
 $Ox' \perp Oy' \Rightarrow x'Oy' = 90^0$

24)

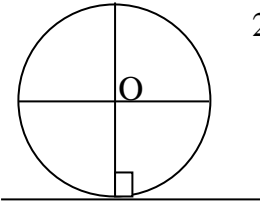


Nếu CA và CB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm) thì :

+ $CA = CB$; $OA \perp CA$; $OB \perp CB$

+ $OC \perp AB$; OC là đường trung trực của AB

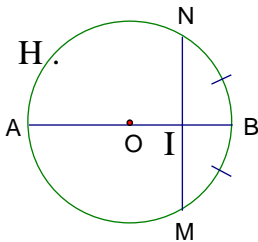
+ OC là tia phân giác của góc AOB ; CO là tia phân giác của góc ACB



25) Đường tròn (O ; R) có $OB = R$ và $OB \perp AC$ tại B $\Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

A B C

26) a) Đường tròn (O) có AB là đường kính và B là điểm chính giữa của cung MN (tức là số NB = số MB = $\frac{1}{2}$ số NM) $\Rightarrow AB \perp NM$ tại I



b) Đường tròn (O) có AB là đường kính và $AB \perp NM$ tại I $\Rightarrow B$ là điểm chính giữa của cung MN (tức là số NB = số MB = $\frac{1}{2}$ số NM)

c) H thuộc cung AN \Rightarrow số AN = số AH + số HN

d) số NB = số MB và $B \in MN$ thì B là điểm chính giữa cung MN