TÀI LIỆU HỌC TOÁN LỚP 11

LOẠI ① TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa: Cho hàm số y = $f(x)$ xác định trên K

✶ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

✶ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Chú ý: K là một khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng

2. Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K

a) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K

b) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K

Định lý mở rộng: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K

a) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K

b) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K

c) Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì $f(x)$ không đổi trên K

Dạng 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

Dạng 1 : Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

Quy tắc tìm:

✶ Tìm tập xác định của hàm số

✶ Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định

✶ Lập bảng biến thiên

✶ Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Bài tập :

1. Xét tính đồng biến , nghịch biến của hàm số :

a. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ b. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ c. $y = x^3 + x^2 + 2x - 3$

d. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ e. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 4$ f. $y = -x^3 + 2x^2 - x + 2$

g. $y = x^3 - x^2 - 5x + 2$ h. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 5$ i. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 5x + 3$

2. Xét tính đồng biến , nghịch biến của hàm số :

a. $y = x^4 - 2x^2 + 5$ b. $y = x^4 + 3x^2 - 4$ c. $y = -x^4 + 4x^2 + 3$

d. $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ e. $y = x^2 - \frac{1}{4}x^4$ f. $y = -x^4 - 5x^2 + 1$

g. $y = -3x^4 + 4x^3 + 1$ h. $y = (x+1)^3(5-x)$ i. $y = (x+2)^2(x-3)^3$

3. Xét tính đồng biến , nghịch biến của hàm số :

a. $y = \frac{x-2}{x+1}$ b. $y = \frac{2x+1}{x-3}$ c. $y = 1 + \frac{3}{x+2}$ d. $y = \frac{3x+4}{1-x}$

e. $y=\dfrac{x+1}{x^2+8}$ f. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ g. $y=\dfrac{x^2+x-5}{x+1}$ h. $y=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$

4. Xét tính đồng biến , nghịch biến của hàm số :

a. $y=\sqrt{2x-x^2}$ b. $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ c. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ d. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

e. $y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}$ f. $y=x\sqrt{x^2-9}$ g. $y=x^2+2\sqrt{5-x^2}$ h. $y=\sqrt{x^2-4x}$

5. Xét tính đồng biến , nghịch biến của hàm số :

a. $y=\left|x^2+2x-3\right|$ b. $y=|x|(x+2)$ c. $y=x^2+3x+\sqrt{x^2-6x+9}$

6. Xét tính đồng biến , nghịch biến của hàm số :

a. $y=x-\sin x,\ x\in[0;2\pi]$ b. $y=x+2\cos x,\ x\in\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Dạng 2. Tìm các giá trị m để hàm số đơn điệu (đồng biến, nghịch biến) trên khoảng cho trước

Phương pháp:
Xét hàm số $y=f(x)$ trên K

✶ Tìm tập xác định của hàm số (nếu cần). Tính $f'(x)$

✶ Nêu điều kiện của bài toán:

+ Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow f'(x)\ge 0, \forall x\in K$

+ Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow f'(x)\le 0, \forall x\in K$

✶ Từ điều kiện trên sử dụng các kiến thức về dấu của nhị thức bậc nhất, tam thức bậc hai để tìm m

Chú ý: Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

✶ $f(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0\end{cases}$ ✶ $f(x)\le 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0\end{cases}$

So sánh nghiệm của tam thức với số 0

✶ $x_1<x_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0 \\ P>0 \\ S<0\end{cases}$ ✶ $0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0 \\ P>0 \\ S>0\end{cases}$ ✶ $x_1<0<x_2 \Leftrightarrow P<0$

Bài tập

1. Tìm m để hàm số : $y=-x^3+(3+m)x^2-(2m-1)x+2$ luôn giảm trên $\mathbb{R}$
2. Tìm m để hàm số : $y=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+4x-10$ đồng biến trên $\mathbb{R}$
3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2mx^2+4mx+2$. Xác định m để :
   a. Hàm số đồng biến trên miền xác định
   b. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$
4. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+2x^2-mx+1$. Xác địn m để :

a. Hàm số nghịch biến trên trên tập xác định của nó
b. Hàm số nghịch biến với mọi $x > 1$

5. Tìm m để hàm số $y = \frac{1-m}{3}x^3 - 2(2-m)x^2 + 2(2-m)x + 5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$
6. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
7. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên $(2;+\infty)$
8. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+2}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định
9. Tìm m để hàm số $y = \frac{x+m}{x-m}$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.
10. Tìm m để :

a) $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 1

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 1$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3

c) $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng 4

Dạng 3 : Chứng minh bất đẳng thức

Phương pháp :

Trường hợp 1 : Bất đẳng thức chỉ có 1 biến

Giả sử muốn chứng minh $f(x) > g(x)$ trên $(a;b)$

+ Đưa bất đẳng thức trên về dạng : $h(x) = f(x) - g(x) > 0, \forall x \in (a;b)$

+ Tính $h'(x)$ và xét dấu $h'(x)$. Suy ra $h(x)$ tăng hay giảm trên $(a;b)$

+ Áp dụng định nghĩa về tính đơn điệu để kết luận

Trường hợp 2 : Bất đẳng thức có hai biến

+ Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng : $f(\alpha) < f(\beta)$ $(a < \alpha < \beta < b)$

+ Xét tính đơn điệu của $f(x)$ trong $(\alpha;\beta)$

+ Áp dụng định nghĩa về tính đơn điệu để kết luận.

Bài tập :

1. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, $(x > 1)$ b) $\sin x + \tan x > 2x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ c) $\sin x < x, \forall x > 0$

d) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \ \forall x > 0$ e) $\alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta$ $\left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$

e) $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$ $\left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$

2. Cho hàm số $f(x) = x\sin x + 2\cos x$

a) Tính đạo hàm của hàm số

b) Chứng minh rằng : $\forall \alpha, \beta : 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Ta có : $\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta > 2(\cos\beta - \cos\alpha)$.

LOẠI ② CỰC TRỊ HÀM SỐ

1. Định lí 1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$ $(h > 0)$.

a) $f'(x) > 0$ trên $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm CĐ của $f(x)$.

b) $f'(x) < 0$ trên $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm CT của $f(x)$.

Nhận xét: Hàm số có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm không xác định.

Qui tắc 1 tìm cực trị hàm số (dựa vào định lý 1).
✶ Tìm tập xác định.
✶ Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
✶ Lập bảng biến thiên.
✶ Từ bảng biến thiên dựa vào định lý 1 suy ra các điểm cực trị.

2. Định lí 2. Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong $(x_0 - h; x_0 + h)$ $(h > 0)$.

a) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

b) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Qui tắc 2 tìm cực trị hàm số (dựa vào định lý 2).
✶ Tìm tập xác định.
✶ Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i là nghiệm
✶ Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
✶ Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của x_i.

3. Các dạng toán thường gặp

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số cho trước.

Phương pháp: Dựa vào quy tắc 1.

Bài tập

1. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$	2. $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$	3. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 2$
4. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 15x$	5. $y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 3$	6. $y = x^4 - 4x^2 + 5$
7. $y = x^4 + 2x^2 + 2$	8. $y = -\frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{3}{2}$	9. $y = -x^2\left(x^2 + 4\right)$
10. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$	11. $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 3}$	12. $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$
13. $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$	14. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$	15. $y = (x - 2)^3 (x + 1)^4$
16. $y = x\sqrt{4 - x^2}$	17. $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$	18. $y = 2x - \sqrt{x^2 - 3}$
19. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$	20. $y = x^2 + 3x + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$	21. $y = \left\|x^2 - 4x + 3\right\|$

Phương pháp: Dựa vào quy tắc 2

Bài tập

1. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ 2. $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$ 3. $y = \sin 2x + \cos 2x$

4. $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$ 5. $y = 2\sin 2x - 3$ 6. $y = \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x$

Dạng 2. Điều kiện để hàm số đạt cực trị

Phương pháp:

✶ Tìm tập xác định D của hàm số

✶ Tính $f'(x)$

✶ Hàm số đạt cực trị tại $x_0 \in D \Leftrightarrow f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0

Một số chú ý:

✶ Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ có cực trị (cực đại và cực tiểu) $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

✶ Xét hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx + c,\ a \neq 0$

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b), \quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \qquad (1) \end{array}\right.$$

\+ Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow ab < 0$

\+ Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab > 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Một số dạng khác

– Để hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases}$.

– Để hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị nằm về 2 phía đối với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CĐ}.y_{CT} < 0$.

– Để hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị nằm về 2 phía đối với trục tung $\Leftrightarrow x_{CĐ}.x_{CT} < 0$.

– Để hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị nằm phía trên trục hoành $\Leftrightarrow \begin{cases} y_{CĐ} + y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \end{cases}$.

– Để hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị nằm phía dưới trục hoành $\Leftrightarrow \begin{cases} y_{CĐ} + y_{CT} < 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \end{cases}$.

– Để hàm số $y = f(x)$ có cực trị tiếp xúc với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CĐ}.y_{CT} = 0$.

Bài tập :

1. Tìm m để các hàm số sau có cực đại và cực tiểu :

a. $y = x^3 + 3x^2 + mx - 10$ b. $y = x^3 - 3mx^2 - 3(m^2 - 2)x + 1$

c. $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$ d. $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx + m$

e. $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ f. $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ g. $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

h. $y = \frac{x^2 - mx + 3}{x - 1}$ i. $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 2m - 1}{x - m}$

2. Tìm m để hàm số sau có cực trị :

a. $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ b. $y = (m-1)x^3 + 2(m+2)x^2 + 3$

c. $y = -2x + m\sqrt{x^2+1}$ d. $y = \dfrac{x^2 + (m+2)x - m}{x+1}$

3.Chứng minh rằng các hàm số sau luôn có cực đại và cực tiểu

a. $y = x^3 - (m-1)x^2 - 3x + m - 2$ b. $y = \dfrac{x^2 + 2x + m}{x^2 + 2}$

4. Tìm m để hàm số sau có cực đại : $y = -2x + 2 + m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$

5. Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 2m$ có cực đại mà không có cực tiểu

6. Tìm m để các hàm số sau không có cực trị :

a. $y = (m-3)x^3 - 2mx^2 + 3$ b. $y = \dfrac{mx^2 + x + m}{x+m}$

Dạng 3 : Xác định giá trị của tham số để hàm số đạt cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp

1. Tìm tập xác định D của hàm số
2. Tính $f'(x)$
3. Đặt điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước. Từ điều kiện này sẽ xác định được giá trị của tham số

Bài tập :

1. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x = 2$
2. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m-1)x + 3 - 2m}{x+m}$ đạt cực đại tại $x = -1$
3. Tìm để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = -2$
4. Tìm m để hàm số $y = mx^3 + (m^2 - 2)x^2 - 8x + 1$ đạt cực đại tại $x = 2$
5. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + n$. Tìm m, n để hàm số đạt cực trị bằng 2 tại $x = 1$
6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + (m+1)x^2 + (6-2m)x + m$ .Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục Oy
7. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2) + 1$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ dương
8. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1$. Tìm m để hàm số có hai cực trị cùng dấu
9. Cho hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \dfrac{1}{3}$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu đồng thời hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị là $x_1, x_2 : x_1 + 2x_2 = 1$
10. . Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$. Tìm m để hàm số có cực trị tại $x_1; x_2 : \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$

11. Cho hàm số $y=2x^3+mx^2-12x-13$. Tìm m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu và các điểm này cách đều trục tung
12. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+3(m^2-1)x+m^2-3m$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu với hoành độ $x_1;x_2$ thỏa : $x_1^2+x_2^2=10$.
13. Tìm m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x+4$

Dạng 4: Cách viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.

Dạng : Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$

Lấy *y* chia cho *y*', được thương là *q*(*x*) và dư là *r*(*x*). Khi đó *y* = *r*(*x*) là đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.

Dạng : Hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

Đường thẳng qua hai điểm cực trị có dạng $y=\dfrac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{\left(dx+e\right)'}=\dfrac{2a}{d}x+\dfrac{b}{d}$

Bài tập

1. Chứng minh rằng hàm số y = $\dfrac{x^2+m\left(m^2-1\right)x-m^4+1}{x-m}$ luôn có có cực trị với mọi *m*. Tìm *m* sao cho hai cực trị nằm trên đường thẳng $y=2x$.
2. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m+2\right)x-1$. Định *m* để:
   a. Hàm số luôn có cực trị.
   b. Có cực trị trong khoảng $\left(0;+\infty\right)$.
   c. Có hai cực trị trong khoảng $\left(0;+\infty\right)$.
3. Định *m* để hàm số $y=x^3-3mx^2+\left(m^2-1\right)x+2\sqrt{b^2-4ac}$ đạt cực đại tại *x* = 2.
4. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+3m+4$.
   a. Khảo sát hàm số khi *m* = 0.
   b. Định *m* để hàm số không có cực trị.
   c. Định *m* để hàm só có cực đại và cực tiểu.
5. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+9x+3m-5$. Định *m* để đồ thị hàm số có cực đại cực tiểu, viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy.
6. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+\left(m+1\right)x-m+1}{x-m}$. Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn có cực đại, cực tiểu với mọi *m*. Hãy định *m* để hai cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.
7. Cho hàm số $y=x^3+\left(1-2m\right)x^2+\left(2-m\right)x+m+2$. Định *m* để đồ thị hàm số có hai cực trị đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.
8. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+1-3m^2}{x-m}$. Định *m* để đồ thị hàm số có hai cực trị nằm về hai phía đối với trục tung.

9. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2\ (C_m)$. Định *m* để hàm số có hai điểm cực trị cùng dương.

10. Cho hàm số $y=\frac{x^2+2(m+1)x+m^2+4m}{x+2}$ (1). (ĐH Khối–A năm 2007)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của đồ thị hàm (1) số khi *m*=–1.

b. Tìm *m* để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc tọa độ *O* tạo thành tam giác vuông tại *O*.

ĐS: $m=-4\pm 2\sqrt{6}$.

11. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ (1), *m* là tham số. (ĐH Khối–B năm 2007)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của đồ thị hàm (1) số khi *m*=1.

b. Tìm *m* để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc tọa độ.

ĐS : b $m=\pm\frac{1}{2}$.

12. Cho hàm số $y=mx^4+(m^2-9)x^2+10$ (1) (*m* là tham số).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của đồ thị hàm số khi *m*=1.

b. Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị. (ĐH Khối–B năm 2002)

Đáp số

a.

b. ĐS : $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ 0<m<3 \end{array}\right.$

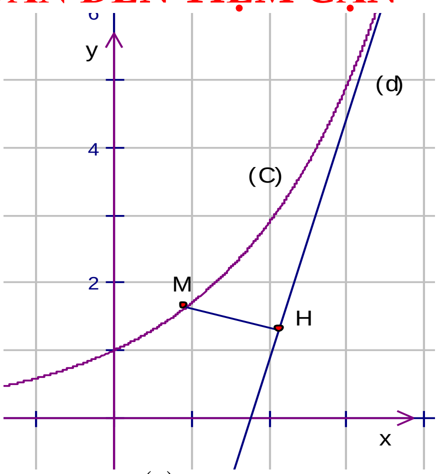
13. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$ (*) (*m* là tham số)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của đồ thị hàm số khi *m*=1.

b. Chứng minh rằng với *m* bất kỳ, đồ thị (C_m) luôn có hai điểm cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

a. b. CĐ(–2;*m*–3), CT(0;*m*+1)⇒ $MN = \cdots = \sqrt{20}$

LOẠI ③ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TIỆM CẬN



1. Định nghĩa:

(d) là tiệm cận của (C) $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{M\to\infty \\ (M\in(C))}} MH = 0$

2. Cách xác định tiệm cận

a. Tiệm cận đứng: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow (d): x = x_0$.

b. Tiệm cận ngang: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0 \Rightarrow (d): y = y_0$.

c. Tiệm cận xiên: TCX có phương trình: $y=\lambda x+\mu$ trong đó: $\lambda = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $\mu = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$.

Các trường hợp đặc biệt:

*Hàm số bậc nhất trên bậc nhất (hàm nhất biến) $y=\dfrac{ax+b}{mx+n}$	* Hàm số bậc hai trên bậc nhất (hàm hữu tỷ) $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}=(\lambda x+\mu)+\dfrac{A}{mx+n}$
+TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$	+TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$
+TCĐ: $\lim\limits_{x\to -\frac{n}{m}} y=\infty \Rightarrow (d): x=-\dfrac{n}{m}$	+TCĐ: $\lim\limits_{x\to -\frac{n}{m}} y=\infty \Rightarrow (d): x=-\dfrac{n}{m}$
+TCN: $\lim\limits_{x\to\infty} y=\dfrac{a}{m}\Rightarrow (d): y=\dfrac{a}{m}$	+TCX: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A}{mx+n}=0 \Rightarrow$ TCX: $y=\lambda x+\mu$

Bài tập

1. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}$ (1), với m là tham số thực.

   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m =1.

   b. Tìm các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0.

(ĐH Khối A–2008)

2. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{mx^2+\left(m^2-1\right)x+1-m}{x}$. Tìm m sao cho đồ thị của hàm số f có tiệm cận xiên đi qua gốc tọa độ.

3. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+(2a-1).x+a+3}{x-2}$ $(a\neq -1,\ a\neq 0)$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng đồ thị của hàm số này có tiệm cận xiên luôn đi qua một điểm cố định.

4. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$ có đồ thị (C).

   a. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên (C) đến hai đường đường tiệm cận là một số không đổi.

   b. Tìm tọa độ điểm N thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ N đến hai tiệm cận nhỏ nhất.

5. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x^2+mx-2}{x-1}$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

6. Tìm *m* để đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x^2+mx+1}$ có hai tiệm cận đứng là $x=x_1$ và $x=x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1-x_2=5 \\ x_1^3-x_2^3=35 \end{cases}$.

7. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (*C*).

   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số.
   b. Tìm những điểm *M* thuộc (*C*) sao cho tổng khoảng cách từ nó đến hai đường tiệm cận nhỏ nhất.

8. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{2-x}$ có đồ thị (*H*).

   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*H*) của hàm số.
   b. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (*H*) tại giao điểm với trục tung.
   c. Tìm những điểm *N* ($x_N>1$) thuộc (*H*) sao cho khoảng cách từ *N* đến tiếp tuyến Δ ngắn nhất.

LOẠI ④ CÁC BÀI TOÁN VỀ GIAO ĐIỂM CỦA 2 ĐƯỜNG CONG

Cho hai hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y=g(x)$ có đồ thị (C_2). Khảo sát sự tương giao giữa hai đồ thị (C_1) và (C_2) tương đương với khảo sát số nghiệm của phương trình: $f(x) = g(x)$ (1). Số giao điểm của (C_1) và (C_2) đúng bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm (1).

(1) vô nghiệm	⇔ (C_1) và (C_2) không có điểm chung.
(1) có ***n*** nghiệm	⇔ (C_1) và (C_2) có ***n*** điểm chung.
(1) có ***nghiệm đơn*** x_1	⇔ (C_1) và (C_2) ***cắt*** nhau tại $N(x_1;y_1)$.
(1) có ***nghiệm kép*** x_0	⇔ (C_1) ***tiếp xúc*** (C_2) tại $M(x_0;y_0)$.

Bài tập

1. Cho hàm số $y=\frac{(x-1)^2}{x+1}$ có đồ thị là (*C*).

   a. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

   b. Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình $x^2-(m+2)x-m+1=0$.

2. Cho hàm số $y=(x+1)^2(x-1)^2$ có đồ thị là (*C*).

   a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên.
   b. Dùng đồ thị (*C*) biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình $(x^2-1)^2-2m+1=0$.

3. Cho hàm số $y=x^3+kx^2-4$.

   a. Khảo sát hàm số trên khi $k = 3$.

b. Tìm các giá trị của *k* để phương trình $x^3 + kx^2 - 4 = 0$ có nghiệm duy nhất.

4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. (ĐH Khối–D 2006)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số đã cho.

b. Gọi *d* là đường thẳng đi qua điểm *A*(3;20) có hệ số góc *m*. Tìm *m* để đường thẳng *d* cắt đồ thị (*C*) tại ba điểm phân biệt.

ĐS: b. $m > \frac{15}{4}$, $m \neq 24$.

5. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)}$ (1) (ĐH Khối–A 2004)

a. Khảo sát hàm số (1).

b. Tìm *m* để đường thẳng *y*=*m* cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm *A*, *B* sao cho *AB*=1.

ĐS: b. $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

6. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$ (*) (*m* là tham số) (ĐH Khối–A 2003)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của đồ thị hàm số khi *m*=–1.

b. Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và hai điểm đó có hoành độ dương.

ĐS: b. $-\frac{1}{2} < m < 0$.

7. a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ (1).(ĐH Khối–D 2003)

b. Tìm *m* để đường thẳng $d_m : y = mx + 2 - 2m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt.

ĐS: *m*>1.

8. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (1) (*m* là tham số) (ĐH Khối–A 2002)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi *m* = 1.

b. Tìm *k* để phương trình $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

c. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

ĐS: b. $\begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0 \wedge k \neq 2 \end{cases}$, c. $y = 2x - m^2 + m$.

LOẠI ⑤ CÁC BÀI TOÁN VỀ TIẾP XÚC

Cho hàm số $y = f(x)$,đồ thị là (*C*). Có ba loại phương trình tiếp tuyến như sau:

Dạng 1: Tiếp tuyến của hàm số tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

– Tính đạo hàm và giá trị $f'(x_0)$.

– Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Chú ý: Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ có hệ số góc $k = f'(x_0)$.

Dạng 2: Biết hệ số góc của tiếp tuyến là k.
– Giải phương trình: $f'(x)=k$, tìm nghiệm $x_0 \Rightarrow y_0$.
– Phương trình tiếp tuyến dạng: $y=k(x-x_0)+y_0$.

Chú ý: Cho đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$, khi đó:

– Nếu $d//\Delta \Rightarrow (d): y=ax+b \Rightarrow$ hệ số góc $k = a$.

– Nếu $d\perp\Delta \Rightarrow (d): y=ax+b \Rightarrow$ hệ số góc $k=-\frac{1}{a}$.

Dạng 3: Tiếp tuyến của (*C*) đi qua điểm $A(x_A;y_A)\notin(C)$.
– Gọi *d* là đường thẳng qua *A* và có hệ số góc là *k*, khi đó $(d): y=k(x-x_A)+y_A$
– Điều kiện tiếp xúc của (d) và (C) là hệ phương trình sau phải có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A \\ f'(x)=k \end{cases}$

Tổng quát: Cho hai đường cong $(C): y=f(x)$ và $(C'): y=g(x)$. Điều kiện để hai đường cong tiếp xúc với nhau là hệ sau có nghiệm. $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$.

Bài tập

1. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$
   a. khảo sát và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số.
   b. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (*C*):
      i. Tại điểm có hoành độ $x=\sqrt{2}$.
      ii. Tại điểm có tung độ *y* = 3.
      iii. Tiếp tuyến song song với đường thẳng: $d_1: 24x-y+2009=0$.
      iv. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng: $d_2: x+24y+2009=0$.

2. Cho hàm số $y=\frac{-x^2-x+3}{x+1}$ có đồ thị là (*C*).
   a. Khảo sát và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số trên.
   b. Viết phương trình tiếp tuyến của (*C*):
      ii. Tại giao điểm của (*C*) với trục tung.
      iii. Tại giao điểm của (C) với trụng hoành.
      iv. Biết tiếp tuyến đi qua điểm *A*(1;–1).
      v. Biết hệ số góc của tiếp tuyến *k* = –13.

3. Cho hàm số $y=\frac{x^2-x-1}{x+1}$ có đồ thị (*C*).
   a. Khảo sát và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số trên.
   b. Viết phương trình tiếp tuyến của (*C*) tại điểm *x* = 0.
   c. Viết phương trình tiếp tuyến của (*C*) tại điểm có tung độ *y* = 0.
   d. Tìm tất cả các điểm trên trục tung mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến (*C*).

4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

b. Chứng minh rằng qua điểm $M(-3;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

5. Cho hàm số: $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Tìm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng đi qua M và tâm đối xứng của (C).

6. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) cắt d: $y = -x + 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của (C_m) tại B và C vuông góc với nhau.

7. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x}$. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ để từ đó có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc.

8. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$. (ĐH Khối–D 2007)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt Ox, Oy tại A, B và diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{1}{4}$

ĐS: $M\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)$ và $M(1;1)$.

9. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$. (ĐH Khối–B 2006)

a Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên.

ĐS: b. $y=-x\pm 2\sqrt{2}-5$.

10. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{m}{2}x^2+\dfrac{1}{3}$ (*) (m là tham số). (ĐH Khối–D 2005)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi m=2.

b. Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng –1. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại M song song với đường thẳng $5x-y=0$

ĐS: m=4.

11. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2-x+3m\ (C_m)$. Định m để (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

12. Cho hàm số $y=x^4+x^3+(m-1)x^2-x-m\ (C_m)$. Định m để (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

13. Cho đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2-4}{x+1}$. Tìm tập hợp các điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được một tiếp tuyến đến (C).

14. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$. Tìm tập hợp các điểm trên trục hoành sao cho từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến với (*C*).
15. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 2x^2 + 1$. Tìm các điểm *M* nằm trên *Oy* sao cho từ *M* kẻ được 3 tiếp tuyến đến (*C*).
16. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 2$. Tìm các điểm trên đường thẳng *y* = 4 sao cho từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến với (*C*).
17. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1) (ĐH Khối–B 2008)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
b. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm *M*(–1;–9).
18.

LOẠI ⑥ CÁC BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH

Các công thức về khoảng cách:

Khoảng cách giữa hai điểm (độ dài đoạn thẳng): $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng: Cho đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ và điểm $M(x_0;y_0)$ khi đó $d(M,\Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Bài tập

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2\ (C_m)$. Định *m* để (C_m) có cực đại cực tiểu đồng thời khoảng cách giữa chúng là bé nhất.

2. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{2x+2}{x-1}$. Tìm tọa độ các điểm *M* nằm trên (*C*) có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

3. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x-1}$. Tìm các điểm *M* thuộc (*C*) có tổng khoảng cách đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.

4. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{2x+2}{x-1}$. Tìm hai điểm *M*, *N* thuộc hai nhánh khác nhau của (*C*) sao cho đoạn *MN* nhỏ nhất.

5. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1}$. Tìm hai điểm *M*, *N* thuộc 2 nhánh khác nhau của (*C*) sao cho đoạn *MN* nhỏ nhất.

6. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x-1}$.

a. Tìm các điểm thuộc đồ thị (*C*) có tổng khoảng cách đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất.

b. Tìm hai điểm *M*, *N* thuộc hai nhánh khác nhau của (*C*) sao cho đoạn *MN* nhỏ nhất.

7. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số: $y = mx + \frac{1}{x}$ (*) (*m* là tham số) (ĐH Khối–A 2005)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = \frac{1}{4}$.

b. Tìm *m* để đồ thị hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$. ĐS: *m*=1.

LOẠI ⑦ ĐIỂM CỐ ĐỊNH

Phương pháp:

Từ hàm số $y = f(x,m)$ ta đưa về dạng $F(x,y) = mG(x,y)$. Khi đó tọa độ điểm cố định nếu có là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$.

Bài tập

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 - 3mx + 2$ (C_m). Chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định khi *m* thay đổi.

2. Cho hàm số $(C_m): y = \dfrac{2x^2 + (6-m)x + 4}{mx + 2}$. Chứng minh rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua một điểm cố định khi *m* thay đổi.

3. Cho hàm số $(C_m): y = (1-2m)x^4 + 3mx^2 - (m+1)$. Tìm các điểm cố định của họ đồ thị trên.

Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y = (m+3)x^3 - 3(m+3)x^2 - (6m+1)x + m + 1$ (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định.

LOẠI ⑧ ĐỒ THỊ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

y = *f*(*x*) có đồ thị (*C*)	$y = \lvert f(x) \rvert$ có đồ thị (*C*')	$y = f(\lvert x \rvert)$ có đồ thị (*C* “)
	$y = \lvert f(x) \rvert \ge 0, \forall x \in D$. Do đó ta phải giữ nguyên phần phía trên trục *Ox* và lấy đối xứng phần phía dưới trục *Ox* lên trên.	$y = f(\lvert x \rvert)$ có $f(\lvert -x \rvert) = f(\lvert x \rvert)$, $\forall x \in D$ nên đây là hàm số chẵn do đó có đồ thị đối xứng qua trục tung *Oy*.

Bài tập

1. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + x}{2x - 2}$.

   a. Khảo sát hàm số.

   b. Định k để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt. $\dfrac{x^2 + |x|}{2|x| - 2} = k$.

2. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.

   a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

   b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $\dfrac{x^2 + 3x + 3}{|x + 1|} = m$.

3. Cho hàm số $(C): y = \frac{4x - x^2}{x - 1}$.

   a. Khảo sát hàm số.

   b. Định *m* để phương trình $x^2 + (m-4)|x| - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

4. Cho hàm số $(C): y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.

1. Khảo sát hàm số.

2. Định *m* để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $x^2 + (1-m)|x| - 2m - 1 = 0$.

5. a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.
   b. Tìm *m* để phương trình sau có sáu nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$.(ĐH Khối A–2006)

a. ĐS: b. 4<*m*<5.

LOẠI ⑨ CÁC CẶP ĐIỂM ĐỐI XỨNG

Điểm $I(x_0;y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị $(C): y=f(x)$ $\Leftrightarrow$ Tồn tại hai điểm *M*(*x*;*y*) và *M*'(*x*';*y*') thuộc (*C*) thỏa: $\begin{cases} x+x'=2x_0 \\ f(x)+f(x')=2y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2x_0-x \\ f(x)+f(2x_0-x)=2y_0 \end{cases}$

Vậy $I(x_0;y_0)$ là tâm đối xứng của (*C*) $\Leftrightarrow$ $f(x)=2y_0-f(2x_0-x)$.

Bài tập

1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+2x+2+m}{2x+3}$ có đồ thị (C_m).

   Tìm giá trị của *m* để (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ *O*.

2. Cho hàm số $(C_m): y=\dfrac{x^2+2m^2x+m^2}{x+1}$.

   Định *m* để (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ *O*.

3. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ (1) (*m* là tham số).

   a. Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) có hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
   b. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1) khi *m*=2. (ĐH Khối B–2003)

ĐS: a. $f(x_0)=-f(-x_0)$, $\forall x_0\neq 0 \Rightarrow \dots$ *m*>0.

4. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-\dfrac{11}{3}$ có đồ thị (C). Tìm trên (*C*) hai điểm *M*, *N* đối xứng nhau qua trục tung.

5. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ (1). Xác định *a*, *b*, *c* để đồ thị hàm số (1) có tâm đối xứng là *I*(0;1) và đi qua điểm *M*(1;–1).

6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1) (ĐH Khối D–2008)

   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
   b. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm *I*(1;2) với hệ số góc *k* (*k* > – 3) đều cắt đồ thị của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt *I*, *A*, *B* đồng thời *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AB*.