# NỘI DUNG

## Phần I: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1) Dùng các phép biến đổi thích hợp
2) Tam thức bậc 2
3) Phương pháp đạo hàm, cực trị hàm số
4) Quy nạp
5) Lượng giác hóa
6) Phương pháp hình học
7) Các BĐT thông dụng
8) Một số phương pháp khác

**I. Sử dụng các phép biến đổi.**

Ví dụ 1: CM với a,b,c là 3 số dương thì

$$1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$$

Giải: Vì a,b,c là 3 số dương nên ta có

$$\frac{a}{a+b}>\frac{a}{a+b+c} \quad \frac{b}{b+c}>\frac{b}{a+b+c} \quad \frac{c}{c+a}>\frac{c}{a+b+c}$$

Cộng vế theo vế ta được $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$

Mặt khác ta có

$$\frac{a}{a+b}<\frac{a+c}{a+b+c} \quad \frac{b}{b+c}<\frac{a+b}{a+b+c} \quad \frac{c}{c+a}<\frac{b+c}{a+b+c}$$

Cộng vế theo vế ta được $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$

Ví dụ 2: CM $\forall x \in R$ ta luôn có

$$x^8-x^5+x^2>x-\frac{2}{3}$$

Giải:

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + \frac{2}{3} = x^8 - 2x^4.\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} - 2.\frac{\sqrt{3}}{2}x.\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= \left(x^4 - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} > 0 \ \forall x \in R$$

Do đó $x^8 - x^5 + x^2 > x - \frac{2}{3}$ (đpcm)

<u>Ví dụ 3:</u> CMR

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ...... + \frac{1}{n(n+1)} < 1 \quad n \in N$$

Giải: Ta có

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (k \in N^*)$$

Cho k=1, 2, .....n rồi cộng các đẳng thức theo vế ta có

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ...... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ...... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Vậy ta có đpcm.

**II. Phương pháp Tam thức bậc 2.**

<u>Ví dụ 1:</u> CMR

$$\frac{13 - \sqrt{59}}{11} \leq \frac{5x^2 + 2}{3x^2 + 2x + 4} \leq \frac{13 + \sqrt{59}}{11}$$

Giải: TXĐ: $x \in R$

Gọi $P = \frac{5x^2 + 2}{3x^2 + 2x + 4}$ thì

$$(3P - 5)x^2 + 2Px + 4P - 2 = 0 \ (*)$$

Để (*) có nghiệm x thì

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - (4P - 2)(3P - 5) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 11P^2 - 26P + 10 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{13 - \sqrt{59}}{11} \leq P \leq \frac{13 + \sqrt{59}}{11}$$

Vậy $\frac{13 - \sqrt{59}}{11} \leq \frac{5x^2 + 2}{3x^2 + 2x + 4} \leq \frac{13 + \sqrt{59}}{11}$

Dấu đt bên trái xảy ra

$\Leftrightarrow x = \dfrac{13(13-\sqrt{59})}{121}$

Dấu đt bên phải xảy ra

$\Leftrightarrow x = \dfrac{13(13+\sqrt{59})}{121}$

**III. Phương pháp hàm số, dùng đạo hàm.**

Ví dụ 1 : CMR $\forall x > 0$ thì $\sin x < x$

Giải : Xét hàm số

$f(x) = x - \sin x$

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến

Mặt khác f(0)=0. Vậy f(x)>0 với mọi x>0 hay với mọi x>0 thì $\sin x < x$

Ví dụ 2: CMR nếu 0<b<a thì

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

Giải: Xét hàm số f(x)=lnx liên tục và có đạo hàm trên $(0,+\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Theo định lí Lagrange tồn tại $x_0$ với $b<x_0<a$ sao cho

$f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{\ln a - \ln b}{a-b} \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{x_0} = \ln\dfrac{a}{b}$

Vì $b<x_0<a$ nên $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{x_0} < \dfrac{1}{b}$ suy ra đpcm.

Ví dụ 3: Cho a,b,c,d là 4 số dương bất kì. CM

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

Giải: Không mất tính TQ giả sử $a \leq b \leq c \leq d$

Xét hàm số $y = f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

f(x) là một hàm số liên tục và có đạo hàm trên R

Vì f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=0 và f'(x) là một hàm bậc 3 nên tồn tại $y_1, y_2, y_3$ sao cho

$a \le y_1 \le b \le y_2 \le c \le y_3 \le d$ sao cho $f'(y_1) = f'(y_2) = f'(y_3) = 0$

Vậy $f'(x) = 4(x - y_1)(x - y_2)(x - y_3)$

Trong khai triển ta có

$$-4y_1y_2y_3 = -(abc + acd + abd + bcd)$$
$$4(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) = 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

Theo BĐT Cauchy

$$\frac{y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1}{3} \ge \sqrt[3]{(y_1y_2y_3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \le \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

## IV. Phương pháp quy nạp.

Phương pháp này được áp dụng khi BĐT phụ thuộc 1 tham số $n \in N$, với các bước chứng minh như sau:

+ Bước 1. C/m BĐT đúng với n=$n_0$

+ Bước 2. Giả sử BĐT đúng với n=k$(k \ge n_0)$ ta cần chứng minh BĐT đúng với n = k+1.

+ Bước 3. Kết luận BĐT đúng với mọi $n \in N$.

Ví dụ 1 : C/m $\forall n \ge 2$, $n \in N^*$ ta có :

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}..........\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad (*)$$

Giải: + Khi n=2 ta có $(*) \Leftrightarrow \frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow$ đúng.

+ Giả sử BĐT đúng với n=k tức là

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}..........\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

Ta cần chứng minh (*) cũng đúng với n=k+1 $(k \ge 2)$. Thật vậy

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}..........\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.......\frac{2k-1}{2k}.\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}} = \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$
$$\Leftrightarrow (2k+1).\sqrt{3k+4} < \sqrt{3k+1}.(2k+2)$$
$$\Leftrightarrow (4k^2+4k+1)(3k+4) < (3k+1)(4k^2+8k+4)$$
$$\Leftrightarrow 19k+4 < 20k+4 \Leftrightarrow k > 1$$

Đến đây ta thấy (*) đúng với n=k+1.

Vậy theo giả thiết quy nạp (*) đúng với $\forall n \geq 2$

Ví dụ 2: Cho x>0 CMR với $n \geq 1$ ta có

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...... + \frac{x^n}{n!}$$

Giải: +Với n=1 ta có $e^y \geq 1 \quad \forall y \in (0, x]$

Vậy $\int_0^x e^x dy > \int_0^x dy \Leftrightarrow e^x - 1 > x \Leftrightarrow e^x > 1 + x \quad \forall x > 0$

Vậy BĐT đúng với n=1.

+ Giả sử BĐT đúng với n=k $(k \geq 1) \quad \forall x > 0$ tức là

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...... + \frac{x^k}{k!}$$

Ta c/m BĐT cũng đúng với n=k+1 tức là :

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...... + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

Thật vậy theo giả thiết quy nạp ta có:

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...... + \frac{x^k}{k!} \quad \forall x > 0$$

Như vậy ta có

$$e^y > 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ...... + \frac{y^k}{k!} \quad \forall y \in (0, x]$$

Do đó ta có:

$$\int_0^x e^y dy > \int_0^x (1 + y + \frac{y^2}{2!} + ...... + \frac{y^k}{k!})dy$$
$$\Leftrightarrow e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ......... + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\Leftrightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ........ + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

+Vậy theo nguyên lí quy nạp ta có BĐT đúng với $\forall n \geq 1$

## V. Sử dụng phương pháp lượng giác hóa.

Để sử dụng phương pháp lượng giác hóa, trước hết học sinh phải nắm vững các tính chất, công thức và các phép biến đổi lượng giác. Trên cơ sở đó, trong một số bài toán nếu đặt các giá trị ẩn thích hợp qua các hàm số lượng giác thì rất thuận tiện.

Ví dụ 1: CMR $\forall x, y$ ta có:

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2 y^2)}{(1 + x^2)^2 (1 + y^{2)^2}} \leq \frac{1}{4}$$

Giải: Đặt $x = tg\alpha \quad y = tg\beta \quad \left(-\frac{\Pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\Pi}{2}\right)$

Ta có:

$$A = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2 y^2)}{(1 + x^2)^2 (1 + y^{2)^2}} = \frac{(tg^2\alpha - tg^2\beta)(1 - tg^2\alpha . tg^2\beta)}{(1 + tg^2\alpha)^2 (1 + tg^2\beta)^2}$$

$$= (\sin^2\alpha \cos^2\beta - \sin^2\beta \cos^2\alpha)(\cos^2\alpha \cos^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\beta)$$

$$= \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta b)\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\alpha + 2\beta)\sin(2\alpha - 2\beta)$$

$$\Rightarrow |A| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow dpcm$$

*) Một số bài tập:

1. CMR $\forall x, y \in R$ thì

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x + y)(1 - xy)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \leq \frac{1}{2}$$

2. Cho 4 số thực a, b, c, d thõa mãn

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

CMR $-1 \leq ac + bd \leq 1$

## VI. Phương pháp hình học.

a) Sử dụng các BĐT về vectơ

1. $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng chiều

2. $\vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| \vee \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$

Ví dụ 1: Cho a, b, c là 3 số thực bất kì CM

$$\sqrt{(a-b)^2+c^2}+\sqrt{(a+b)^2+c^2} \ge 2\sqrt{a^2+c^2}$$

Giải: Đặt $\vec{u}=(a-b;c)$ $\vec{v}=(a+b;c)$ thì $\vec{u}+\vec{v}=(2a;2c)$

Ta có $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right| \ge \left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ suy ra đpcm.

Ví dụ 2: CM $\forall x, y \in R$ thì

$$\sqrt{x^2+4y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+4y^2-2x-12y+10} \ge 5$$

Giải: Đặt $\vec{u}=(x+3;2y)$ $\vec{v}=(1-x;3-2y)$ thì $\vec{u}+\vec{v}=(4;3)$

Lại áp dụng $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right| \ge \left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ suy ra đpcm.

Ví dụ 3: CM $\forall a,b,c$ thì $abc(a+b+c) \le a^4+b^4+c^4$

**Chú ý:** Phương pháp vectơ được áp dụng trong các trường hợp ta có thể biểu diễn các thành phần của bđt thành đồ dài các vectơ tuy nhiên nó chỉ áp dụng thường thi khi không có sự ràng buộc nào của các biên còn nếu có sự ràng buộc thì ta thường dùng phương pháp tọa độ.

b) Phương pháp tọa độ:

Ví dụ 4: Cho a,b thõa mãn a – 2b + 2 = 0.

CMR $\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2}+\sqrt{(a-5)^2+(b-7)^2} \ge 6$

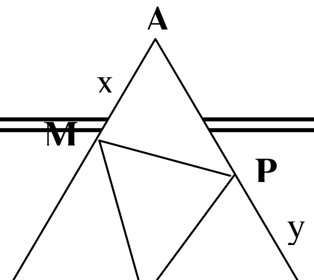
Giải: Chọn A(3; 5) B(5; 7)

M(a; b) vì thõa mãn a – 2b + 2 = 0 nên nằm trên đường thẳng x- 2y + 2=0 $(\Delta)$. Lấy A' đối xứng A qua $(\Delta)$ ta có A'(5; 1)

Ta có MA+MB=MA'+MB$\ge$A'B

Hay $\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2}+\sqrt{(a-5)^2+(b-7)^2} \ge 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=5 \wedge b-\frac{7}{2}$



c) Các phương pháp khác:

Ví dụ 5: Cho 0<x, y, z<1. CM

$x(1-y) + (y(1-z) + z(1-x) < 1$

Giải: Dựng tam giác đều cạnh 1 như hình vẽ

Ta có

$S_{\Delta AMP} + S_{\Delta CPN} + S_{\Delta BNM} < S_{\Delta ABC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 60^0\left[x(1-y) + y(1-z) + z(1-x)\right] < \frac{1}{2}.\sin 60^0.1.1$

$\Leftrightarrow x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1$

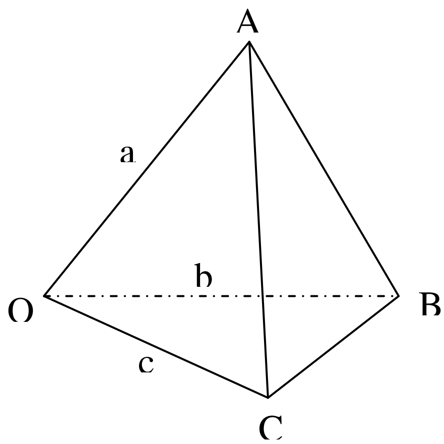
Ví dụ 6: Cho a, b, c dương. CM

$\sqrt{a^2 - \sqrt{2}ab + b^2} + \sqrt{b^2 - \sqrt{3}bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 - \sqrt{2-\sqrt{3}}ac + c^2}$

Giải: Dựng hình như hình vẽ sao cho:

OA=a ; OB=b ; OC=c

$\angle AOB = 45^0 \quad \angle BOC = 30^0$




Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác ta có:

$AB = \sqrt{a^2 - \sqrt{2}ab + b^2}$

$BC = \sqrt{b^2 - \sqrt{3}bc + c^2}$

$\cos\angle AOC = \cos(45^0 + 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Vậy $AC = \sqrt{a^2 - \sqrt{2-\sqrt{3}}ac + c^2}$ tức là

$\sqrt{a^2 - \sqrt{2}ab + b^2} + \sqrt{b^2 - \sqrt{3}bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 - \sqrt{2-\sqrt{3}}ac + c^2}$

Dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOC} \Leftrightarrow \frac{ab\sqrt{2}}{4} + \frac{bc}{4} = \frac{1}{2}ac\sin 75^0 \Leftrightarrow b = \frac{ac\sqrt{2+\sqrt{3}}}{a+c}$$

*) Một số bài tập

1. Cho a, b, c, d là 4 số thực thõa mãn

$$\begin{cases} a^2+b^2+1=2(a+b) \\ c^2+d^2+36=12(c+d) \end{cases}$$

CM: $(\sqrt{2}-1)^6 \le (a-c)^2+(b-d)^2 \le (\sqrt{2}+1)^6$

2. CMR $\forall x$ ta có

$$\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1}+\sqrt{2x^2+(\sqrt{3}+1)x+1} \ge 3$$

3. Cho x, y thõa

$$\begin{cases} -x+2y-8 \le 0 \\ x+y+2 \ge 0 \\ y-2x-4 \ge 0 \end{cases}$$

C/m $\frac{16}{5} \le x^2+y^2 \le 20$

4. Cho x, y, z dương thõa mãn xyz(x+y+z)=1

Tìm MIN (x+y)(x+z)

**VII. Sử dụng các BĐT quen thuộc.**

**1. Bất đẳng thức Cauchy**

a. Cho 2 số không âm x, y ta có

$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$ . Dấu “=” $\Leftrightarrow x=y$

Dạng khác $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$ Dấu “=” $\Leftrightarrow a=b$

b. Tổng quát cho n số không âm $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ta có

$$\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots . a_n}$$

<u>Ví dụ 1 :</u> Cho a, b, c là 3 số dương tùy ý

CMR $\forall x \in R$ ta có

$$\left(\frac{ab}{c}\right)^x+\left(\frac{bc}{a}\right)^x+\left(\frac{ca}{b}\right)^x \ge a^x+b^x+c^x$$

Giải : Áp dụng BĐT Cauchy cho các cặp số dương ta có :

$$\left(\frac{ab}{c}\right)^x+\left(\frac{bc}{a}\right)^x\ge 2\sqrt{\left(\frac{ab.bc}{ca}\right)^x}=2b^x$$

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^x+\left(\frac{ca}{b}\right)^x\ge 2\sqrt{\left(\frac{bc.ca}{ab}\right)^x}=2c^x$$

$$\left(\frac{ca}{b}\right)^x+\left(\frac{ab}{c}\right)^x\ge 2\sqrt{\left(\frac{ca.ab}{bc}\right)^x}=2a^x$$

Cộng vế theo vế ta có ta có đpcm.

Dấu "=' xảy ra khi và chỉ khi x=0.

Ví dụ 2 : Với a, b, c dương CM

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$$

Giải : áp dụng BĐT Cauchy cho các cặp số dương ta có :

$$\frac{a^3}{b}+ab\ge 2\sqrt{\frac{a^3}{b}.ab}=2a^2$$

$$\frac{b^3}{c}+bc\ge 2\sqrt{\frac{b^3}{c}.bc}=2b^2$$

$$\frac{c^3}{a}+ca\ge 2\sqrt{\frac{c^3}{a}.ca}=2c^2$$

Cộng vế theo vế ta có :

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca\ge 2(a^2+b^2+c^2)\quad (1)$$

Mặt khác ta có

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$$

Thay vào (1) suy ra đpcm. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a=b=c.

c. Một số dạng toán cơ bản sử dụng BĐT Cauchy tổng quát để c/m.

1) Cho n số thực dương $a_1,a_2,.....,a_n$ thõa mãn

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+........+\frac{1}{a_n}=k\quad (k>0\text{ cho trước})$$

CMR

$$\frac{1}{m_1a_1+m_2a_2+....+m_na_n}+\frac{1}{m_2a_1+m_3a_2+....+m_1a_n}+....$$
$$+\frac{1}{m_na_1+m_1a_2+....+m_{n-1}a_n}\le\frac{k}{m_1+m_2+....+m_n}$$

Với $m_1,m_2,........,m_n$ là các số nguyên dương tùy ý.

Giải: áp dụng BĐT Cauchy cho $m=m_1+m_2+....+m_n$ số ta có:

$$m_1a_1+m_2a_2+.......+m_na_n\ge m\sqrt[m]{a_1^{m_1}a_2^{m_2}.....a_n^{m_n}}\quad(1)$$

Lại áp dụng cho m số dương ta có

$$\frac{m_1}{a_1}+\frac{m_2}{a_2}+.....+\frac{m_n}{a_n}\ge\frac{m}{\sqrt[m]{a_1^{m_1}a_2^{m_2}.....a_n^{m_n}}}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$(m_1a_1+m_2a_2+.......+m_na_n)\left(\frac{m_1}{a_1}+\frac{m_2}{a_2}+.....+\frac{m_n}{a_n}\right)\ge m^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{m_1a_1+m_2a_2+....+m_na_n}\le\frac{1}{m^2}\left(\frac{m_1}{a_1}+\frac{m_2}{a_2}+....+\frac{m_n}{a_n}+\right)\quad(*)$$

Tương tự cho các phân thức còn lại cuối cùng cộng các bđt dạng như (*) lại vế theo vế ta có

$$\frac{1}{m_1a_1+m_2a_2+....+m_na_n}+....+\frac{1}{m_na_1+m_1a_2+....+m_{n-1}a_n}\le\frac{1}{m^2}(m.k)=\frac{k}{m_1+....+m_n}$$

***) Một số bài tập**

1. Cho 3 số dương a, b, c. CMR

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$$

2. CMR $\quad\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Tổng quát

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^k+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^k+.....+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^k\ge\frac{a_1+a_2+....+a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2....a_n}}$$

3. Cho $\begin{cases}a,b>0\\a+b\le1\end{cases}$. Tìm MIN $S=ab+\frac{1}{ab}$

**2. Sử dụng BĐT Bunhiacopxki(BCS)**

Với 2 bộ số $(a_1, a_2, ....., a_n)$ và $(b_1, b_2, ....., b_n)$ bất kì ta có

$(a_1b_1 + a_2b_2 + ..... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + .... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + .... + b_n^2)$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ...... = \frac{a_n}{b_n}$

Với quy ước $a_i=0$ thì $b_i=0$

Chứng minh:

+Nếu $a_1^2 + a_2^2 + .... + a_n^2=0$ suy ra BĐT luôn luôn đúng

+Nếu $a_1^2 + a_2^2 + .... + a_n^2>0$. Xét tam thức

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + .... + (a_nx - b_n)^2$$
$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + .... + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + .... + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + .... + b_n^2)$$
$$f(x) \ge 0\ \forall x \in R \Rightarrow \Delta' \le 0$$
$$\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + .... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + .... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

<u>Ví dụ 1:</u> Cho 2 số thực x, y thõa mãn $x + \sqrt{3}y = 2$.

CMR $2x^2 + 3y^2 \ge \frac{8}{3}$

Giải: Theo BĐT BCS ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}x + 1.\sqrt{3}y\right)^2 \le \left(\frac{1}{2} + 1\right)\left(2x^2 + 3y^2\right) \Leftrightarrow 2x^2 + 3y^2 \ge \frac{8}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{3}y}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3\sqrt{3}} \end{cases}$

<u>Ví dụ 2:</u> a) Cho n số thực $(a_1, a_2, ....., a_n)$ và n số dương $(b_1, b_2, ....., b_n)$

CMR $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ..... + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ..... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + .... + b_n}$

b) CMR

$$\frac{a^2}{b^2 + 2a} + \frac{b^2}{a^2 + 2b} + \frac{1}{1 + 2ab} \ge 1 \quad \forall a, b > 0$$

Giải: a) Áp dụng BĐT BCS cho 2 bộ số dương

$\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}; \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}; .....; \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$ và $\left(\sqrt{b_1}; \sqrt{b_2}; .....; \sqrt{b_n}\right)$

Ta có

$$(a_1+a_2+....+a_n)^2 \le \left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+....+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+....+b_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+....+\frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{(b_1+b_2+....+b_n)}$$

b) Áp dụng kết quả ở a) ta có

$$\frac{a^2}{b^2+2a}+\frac{b^2}{a^2+2b}+\frac{1}{1+2ab} \ge \frac{(a+b+1)^2}{b^2+2a+a^2+2b+2ab+1} = 1 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Ví dụ 3: Cho ab+bc+ca=1 a, b, c là 3 số dương

CMR $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge (a+b+c)^2$

Giải: Áp dụng BĐT BCS ta có a, b, c dương nên

$$(a+b+c)^2 = \left(\sqrt{ab}\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{bc}\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{ca}\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 \le (ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge (a+b+c)^2$$

"=" $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a}{b}}} = \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{\frac{b}{c}}} = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{\frac{c}{a}}} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

## VII. Các phương pháp khác

### 1. Sử dụng khai triển nhị thức Newton

Để c/m $A \ge B$ ta có thể làm như sau

a) Nếu đưa A về dạng

$$A=(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

Ta tìm cách c/m B không lớn hơn tổng T của một số phần tử của chuỗi thì $B \le T \le A$ (cách ngắt chuỗi dương)

b) Nếu đưa được B về dạng

$$B=(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i \quad (*)$$

Ta tìm cách đánh giá mỗi số hạng của chuỗi (*) không lớn hơn các biểu thức $T_J$ mà $\sum_{j=0}^{n} T_j \le A$ lúc đó $B \le \sum_{j=0}^{n} T_j \le A$

Ví dụ 1: Nếu $|x|<1$ và n nguyên, n>1 thì

$$(1+x)^n+(1-x)^n<2^n$$

Giải: Ta có

$$2^n=(1+x+1-x)^n=(1+x)^n+(1-x)^n+\sum_{i=1}^{n}C_n^i(1+x)^{n-i}(1-x)^i$$

Vì $|x|<1$ nên $(1+x)^{n-i}(1-x)^i>0\ \forall i\in 1,2,....n-1$. Vậy $2^n>(1+x)^n+(1-x)^n$

Ví dụ 2: CMR $\forall m$ nguyên dương, m≥2 ta có:

$$\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^{2m+1}.\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^2<1\quad (1)$$

Giải:

$$(1)\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{m^2-1}\right)^{2m+1}>\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^2\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{m^2-1}\right)^{2m+1}>1+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{(m-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1+C_{2m+1}^1\frac{1}{m^2-1}+C_{2m+1}^2\left(\frac{1}{m^2-1}\right)^2+.....+C_{2m+1}^{2m+1}\left(\frac{1}{m^2-1}\right)^{2m+1}>1+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{(m-1)^2}$$

Mặt khác ta có:

$$4m^2-1>3m^2-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{2m+1}{m^2-1}+\frac{m(2m+1)}{(m^2-1)^2}+\frac{m(2m+1)(2m-1)}{3(m^2-1)^3}>\frac{1}{(m-1)^2}+\frac{2}{m-1}$$

$\Rightarrow$đpcm

Ví dụ 3: Nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1. CM $\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$

Giải: Vì $n>1\Rightarrow\sqrt[n]{n}>1$. Đặt $\sqrt[n]{n}=1+x(x>0)$. Lúc đó ta có

$$n=(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+....+x^n\Rightarrow n>1+\frac{n(n-1)}{2}x^2\Rightarrow x^2<\frac{2}{n}\Rightarrow x<\sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\Rightarrow x+1<1+\sqrt{\frac{2}{n}}\Rightarrow\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$$

**2. Sử dụng phương pháp phân chia.**

a) Nếu hàm số biến thiên phức tạp trong tập xác định ta chia tập xác định D thành các tập con $D_1$, $D_2$,….sao cho việc tìm cực trị của hàm số trên các tập con dễ dàng hơn.

b) Nếu tính chất của hàm thay đổi cả trên các tập con thì ta phân tích hàm thành tổng của các hàm đơn giản hơn để tìm cực trị của các hàm thành phần.

Ví dụ 1: Tìm Max của $F(x,y) = x^{2002}y(4-x-y)$ với x,y là các số thực thõa mãn

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x+y \le 6 \end{cases}$$

Giải:

+ Khi $x+y \ge 4$ ta có $F \le 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+y=4$

+ Khi $x+y < 4$ ta có $x \ge 0, y \ge 0, 4-x-y \ge 0$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2004 số không âm ta được

$$F = 2002^{2002}.\frac{x}{2002}.\frac{x}{2002}.......\frac{x}{2002}.y.(4-x-y)$$

$$\Rightarrow F \le 2002^{2002}\left(\frac{2002.\frac{x}{2002}+y+4-x-y}{2004}\right)^{2004} = \frac{2002^{2002}}{501^{2004}}$$

$$'='\Leftrightarrow \frac{x}{2002} = y = 4-x-y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2002}{501} \\ y = \frac{1}{501} \end{cases} \text{ Vậy } F \le \frac{2002^{2002}}{501^{2004}}$$

Ví dụ 2: Tìm Min $F(x) = |x-20011| + |x-2002| \quad x \in R$

Giải: Xét các trường hợp:

+ $x \ge 2002$. Lúc đó

$F(x) = 2x - 4003 \Rightarrow F(x) \ge 1$

$'='\Leftrightarrow x = 2002$

+ $x \in (2001, 2002) \Rightarrow F(x) = 1$

+ $x \le 2001 \Rightarrow F(x) = 4003 - 2x \ge 1$

$'='\Leftrightarrow x = 2001$

Vậy Min $F(x) = 1 \Leftrightarrow x \in [2001, 2002]$

Ví dụ 3: Tìm Min $A = x(y+z) + z(x+y)$ trong đó x, y, z là các số thực thõa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Giải: Đặt $A_1 = xy + yz + zx; \quad A_2 = zx \Rightarrow A = A_1 + A_2$

Ta có: $(x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2A_1 \geq 0 \Leftrightarrow A_1 \geq -\frac{1}{2}$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad (1)$$

Ta cũng có

$$|A_2| = |z||x| \leq \frac{1}{2}(z^2 + x^2) = \frac{1}{2}(1-y^2) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq A_2 \leq \frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow A \geq \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -1; \quad '=' \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

**3. Sử dụng mối quan hệ giữa các bất đẳng thức:**

Ví dụ từ đẳng thức $xy + yz + zx = -1$ ta có bđt $(x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$.

Từ đó ta có thể chứng minh dễ dàng các BĐT

Ví dụ: Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}; \quad y = \frac{b+c}{b-c}; \quad z = \frac{c+a}{c-a}$

Ta có

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{5}{2} \quad (2)$$

và $$\frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} \geq -\frac{1}{4} \quad (3)$$

Cộng (2) và (3) rồi biến đổi ta có:

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3-c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3-a^3}{(c-a)^3}\geq\frac{9}{4}$$

Với một số mối quan hệ như trên ta có nhiều bđt. Vì vậy trong c/m cần sử dụng khéo léo quan hệ đó.

## Phần II: BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

### I. Sự liên quan giữa các bất đẳng thức trong tam giác:

Trong quá trình chứng minh các BĐT trong tam giác, bằng các phép biến đổi tương đương ta có thể tìm được mối quan hệ mật thiết từ những bất đẳng thức có vẽ hoàn toàn khác nhau.

Ví dụ 1: Xét BĐT $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{abc}{8}$ (1)

trong đó $a,b,c$ là độ dài 3 cạnh 1 tam giác ; $p$ là nửa chu vi.

CM: Theo BĐT Cauchy ta có

$$(p-a)(p-b)\leq\frac{(p-a+p-b)^2}{4}=\frac{c^2}{4}$$

$$(p-b)(p-c)\leq\frac{(p-b+p-c)^2}{4}=\frac{a^2}{4}$$

$$(p-c)(p-a)\leq\frac{(p-c+p-a)^2}{4}=\frac{b^2}{4}$$

Nhân tương ứng theo vế các số không âm ta được

$$[(p-a)(p-b)(p-c)]^2\leq\left(\frac{abc}{8}\right)^2$$ suy ra đpcm.

Bây giờ ta biến đổi (1) như sau :

$$(1)\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c)\leq p.\frac{abc}{8}$$

$$\Leftrightarrow S^2\leq\frac{p}{8}abc\Leftrightarrow pr.\frac{abc}{4R}\leq\frac{p}{8}abc$$

$$\Leftrightarrow R\geq 2r \quad (2)$$

(2) là BĐT mới và hoàn toàn khác so với (1)

CM (2) như sau: Ta có

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C=pr$$

$$\Rightarrow 2R^2\sin A\sin B\sin C=\frac{a+b+c}{2}r$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R}=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C-1\le\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\Rightarrow R\ge 2r(dpcm)$$

($\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ là BĐT cơ bản)

Tiếp tục biến đổi theo hướng khác :

$$(1)\Leftrightarrow S^2\le\frac{p}{8}abc\Leftrightarrow\left(\frac{abc}{4R}\right)^2\le\frac{p}{8}abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc}{R^2}\le a+b+c \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin A\sin B\sin C\le\sin A+\sin B+\sin C \quad (4)$$

(4) là một BĐT mới liên quan giữa các góc. CM (4) như sau :

$$(4)\Leftrightarrow \sin A\sin B\sin C\le\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le 1$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$$

Suy ra đpcm.

Tiếp tục biến đổi (1) :

$$(1)\Leftrightarrow(3)\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{abc}\ge\frac{1}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\ge\frac{1}{R^2}\Leftrightarrow\frac{h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a}{4S^2}\ge\frac{1}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a\ge\frac{4S^2}{R^2} \quad (5)$$

(5) là một BĐT mới liên quan đến các đường cao.

Ta biến đổi (1)

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}\ge\frac{8}{abc}\Leftrightarrow\frac{2p}{(p-a)(p-b)(p-c)}\ge\frac{8(a+b+c)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \geq 8\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}+\frac{1}{(p-a)(p-b)} \geq 8\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_ar_b}{S^2}+\frac{r_br_c}{S^2}+\frac{r_cr_a}{S^2} \geq 8\frac{h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a}{4S^2}$$

$$\Leftrightarrow r_ar_b+r_br_c+r_cr_a \geq 2(h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a) \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \geq 8\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}+\frac{1}{(p-a)(p-b)} \geq 8\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

(6) là BĐT liên quan đến bán kính đường tròn bàng tiếp và đường cao.

Từ các biến đổi ta thấy các BĐT sau là tương đương :

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8} \quad (1)$$

$$R \geq 2r \quad (2)$$

$$\frac{abc}{R^2} \leq a+b+c \quad (3)$$

$$4\sin A\sin B\sin C \leq \sin A+\sin B+\sin C \quad (4)$$

$$h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a \geq \frac{4S^2}{R^2} \quad (5)$$

$$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a \geq 2(h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a) \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a \geq \frac{8S^2}{R^2} \quad (7)$$

Tóm lại, giữa các BĐT tam giác trông rất khác nhau nhưng lại có một mối quan hệ tương đương hoặc hệ quả.

Để dễ nhớ và CM các BĐT ta thường đi từ một hệ thức hoặc một BĐT quen thuộc rồi biến đổi về các BĐT mới, từ đó suy ra cách CM BĐT đó khi gặp.

Ví dụ 2: Ta có 2 hệ thức trong tam giác

$$\begin{cases} tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC & (1) \\ tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có thể suy ra các BĐT

$$tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3} \quad (3)$$

$$tgAtgBtgC \geq 3\sqrt{3} \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow tgAtgB + tgBtgC + tgCtgA \geq 3\sqrt[3]{tg^2Atg^2Btg^2C} \geq 9 \quad (5)$$

$$(5) \Rightarrow tg^2A + tg^2B + tg^2C \geq tgAtgB + tgBtgC + tgCtgA \geq 9 \quad (6)$$

Vậy từ (1) có được (3),(4),(5),(6).

Xuất phát từ (2) ta có:

$$\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right)^2 \geq 3\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\right) = 3$$

$$\Rightarrow tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \quad (7)$$

$$(7) \Rightarrow tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2} \geq \frac{1}{3}\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right)^2 = 1 \quad (8)$$

$$3\left[tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\right]^{\frac{2}{3}} \leq \left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (9)$$

Từ (3) và (9)$\Rightarrow tgA + tgB + tgC \geq 27tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$ (10)

Tóm lại từ một số hệ thức ta có thể thấy trong nó ẩn chứa nhiều BĐT cần được khai thác.

**II. Những phương pháp chứng minh chọn lọc các BĐT tam giác.**

Việc lựa chọn phương pháp để chứng minh các BĐT cơ bản quen thuộc trong tam giác giúp rút ngắn thời gian làm bài.

<u>Ví dụ 1 :</u> CM BĐT: $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (1)

Giải : (1) được CM theo nhiều phương pháp, sau đây là phương pháp ngắn gọn:

Ta có

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\le\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{C}{2}\right)\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\le\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\left(\sqrt{3}\cos\frac{C}{2}+1+\sin\frac{C}{2}\right)\frac{1}{2}\right]^2=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\Pi}{6}\right)\right]^2\le\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+1\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

<u>Ví dụ 2 :</u> CM BĐT $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ (2)

(2) được CM đơn giản như sau :

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=$$

$$2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)+1$$

$$\le 2\sin\frac{C}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)+1\le\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}+1-\sin\frac{C}{2}\right)^2+1=\frac{3}{2}$$

<u>Ví dụ 3:</u> CM BĐT $\sin A\sin B\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (3)

(3) được cm dễ dàng từ (1), nhưng ta cũng có thể cm (3) như sau

$$\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{2}(\cos(A-B)+\cos C).\sin C\le\frac{1}{2}(1+\cos C)\left(\frac{\sin C}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}$$

$$\le\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\left(1+\cos C+\frac{\sin C}{\sqrt{3}}\right)^2.\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(1+2\cos\left(C-\frac{\Pi}{3}\right)\right)^2\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

<u>Ví dụ 4:</u> CM BĐT $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$ (4)

Ta có

$$\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos C\right)\cos C\le\frac{1}{2}(1-\cos C)\cos C$$

$$\le\frac{1}{2}.\frac{1}{4}(1-\cos C+\cos C)^2=\frac{1}{8}$$

<u>Ví dụ 5 :</u> CM $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$

Ta có $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+1-2\sin^2\frac{A+B}{4}$

$$\le 2\sin\frac{A+B}{4}+1-2\sin^2\frac{A+B}{4}=-2\left(\sin\frac{A+B}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\le\frac{3}{2}$$

## C. KẾT LUẬN

Trên đây là một số kinh nghiệm đúc rút trong quá trình giảng dạy hơn 30 năm qua, đặc biệt là trong quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi. Từ những vấn đề trình bày trên đây có thể rút ra kết luận rằng: việc nghiên cứu giải các bài toán về bất đẳng thức đối với học sinh phải là một quá trình thường xuyên và đặc biệt là phải được nghiên cứu chu đáo ngay từ những kiến thức cơ bản ở lớp 10. Trong đó phương pháp chứng minh BĐT theo suốt chương trình từ lớp 10 và được hoàn thiện ở lớp 12 là tìm cực trị và GTLN, GTNN của hàm số. BĐT lượng giác trong tam giác là một sự vận dụng của BĐT và các hệ thức lượng trong tam giác nhưng lại ẩn chứa những phép biến đổi rất tinh vi mà ít người có thể thấy được.

Mặc dù có thể còn nhiều hạn chế nhưng tôi hy vọng rằng đề tài này sẽ đóng góp rất tốt cho các bạn đồng nghiệp và học sinh có thể tìm hiểu sâu sắc hơn về bất đẳng thức nhằm nâng cao hiệu quả trong giảng dạy và học tập. Tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả.

## D. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ sách giáo khoa hợp nhất năm 2000.

2. Bộ sách giáo khoa-Ban khoa học tự nhiên-Bộ sách thứ nhất-NXBGD 2003.

3. Phương pháp tìm GTLN và GTNN của Phan Huy Khải

4. Tài liệu bồi dưỡng giáo viên THPT chuyên. Bất đẳng thức và các vấn đề liên quan của Trần Nam Dung, Nguyễn Văn Mậu

5. Bất đẳng thức: suy luận và khám phá - Phạm Văn Thuận Lê Vĩ

6. 500 Bất đẳng thức của Cao Minh Quang.

7. Sáng tạo bất đẳng thức - Phạm Kim Hùng

*Sưu tầm từ Tài Liệu Do Cô Đinh Thị Lựu Trường PTTH Chuyên Quảng Bình biên soạn*