

ÔN TẬP HỌC KÌ II MÔN TOÁN 10

A. CÁC VẤN ĐỀ TRONG HỌC KÌ II

I. Đại số:

1. Xét dấu nhị thức, tam thức bậc hai; Giải phương trình, bất phương trình qui về bậc nhất; bậc hai; phương trình có chứa căn, trị tuyệt đối, tìm điều kiện phương trình, bất phương trình có nghiệm, vô nghiệm, có nghiệm thỏa mãn điều kiện.
2. Giải hệ bất phương trình bậc hai.
3. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn; ứng dụng vào bài toán tối ưu.
4. Tính tần số; tần suất các đặc trưng mẫu; vẽ biểu đồ biểu diễn tần số, tần suất (chủ yếu hình cột và đường gấp khúc).
5. Tính số trung bình, số trung vị, mốt, phương sai và độ lệch chuẩn của số liệu thống kê.
6. Tính giá trị lượng giác một cung, một biểu thức lượng giác.
7. Vận dụng các công thức lượng giác vào bài toán rút gọn hay chứng minh các đẳng thức lượng giác.

II. Hình học:

1. Viết phương trình đường thẳng (tham số, tổng quát, chính tắc)
2. Xét vị trí tương đối điểm và đường thẳng; đường thẳng và đường thẳng
3. Tính góc giữa hai đường thẳng; khoảng cách từ điểm đến đường thẳng.
4. Viết phương trình đường phân giác (trong và ngoài).
5. Viết phương trình đường tròn; Xác định các yếu tố hình học của đường tròn. viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn; biết tiếp tuyến đi qua một điểm (trên hay ngoài đường tròn), song song, vuông góc một đường thẳng.
6. Viết phương trình chính tắc của elíp; xác định các yếu tố của elíp.
7. Viết phương trình chính tắc của hypebol; xác định các yếu tố của hypebol.
8. Viết phương trình chính tắc của parabol; xác định các yếu tố của parabol.
9. Ba đường cô níc: khái niệm đường chuẩn, tính chất chung của ba đường conic.

B. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

I. Phần Đại số

1. Bất phương trình và hệ bất phương trình

Các phép biến đổi bất phương trình:

a) Phép cộng: Nếu $f(x)$ xác định trên D thì $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$

b) Phép nhân:

* Nếu $f(x) > 0, \forall x \in D$ thì $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x)$

* Nếu $f(x) < 0, \forall x \in D$ thì $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x)$

c) Phép bình phương: Nếu $P(x) \geq 0$ và $Q(x) \geq 0, \forall x \in D$ thì $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x)$

2. Dấu của nhị thức bậc nhất

❖ **Dấu nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$**

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f(x)	(Trái dấu với hệ số a)		(Cùng dấu với hệ số a)

* **Chú ý:** Với $a > 0$ ta có:

$$|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a$$

$$|f(x)| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq -a \\ f(x) \geq a \end{cases}$$

3. Phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

a. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ (1) ($a^2 + b^2 \neq 0$)

Bước 1: Trong mp Oxy, vẽ đường thẳng (Δ): $ax + by = c$

Bước 2: Lấy $M_o(x_o; y_o) \notin (\Delta)$ (thường lấy $M_o \equiv O$)

Bước 3: Tính $ax_o + by_o$ và so sánh $ax_o + by_o$ và c .

Bước 4: Kết luận

- ♦ Nếu $ax_o + by_o < c$ thì nửa mp bờ (Δ) chứa M_o là miền nghiệm của $ax + by \leq c$
- ♦ Nếu $ax_o + by_o > c$ thì nửa mp bờ (Δ) không chứa M_o là miền nghiệm của $ax + by \leq c$

b. Bỏ bờ miền nghiệm của bpt (1) ta được miền nghiệm của bpt $ax + by < c$. Miền nghiệm của các bpt $ax + by \geq c$ và $ax + by > c$ được xác định tương tự.

c. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn:

- ♦ Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ miền còn lại.
- ♦ Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bpt trong hệ trên cùng một mp tọa độ, miền còn lại không bị gạch chính là miền nghiệm của hệ bpt đã cho.

4. Dấu của tam thức bậc hai

a. Định lí về dấu của tam thức bậc hai:

@, **Định lí:** $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

Nếu có một số α sao cho $a.f(\alpha) < 0$ thì:

- $f(x)=0$ cso hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2
- Số α nằm giữa 2 nghiệm $x_1 < \alpha < x_2$

Hệ quả 1:

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac$

* Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a ($a.f(x) > 0$), $\forall x \in \mathbb{R}$

* Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a ($a.f(x) > 0$), $\forall x \neq \frac{-b}{2a}$

* Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$. (Với x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ và $x_1 < x_2$)

Bảng xét dấu: $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0$

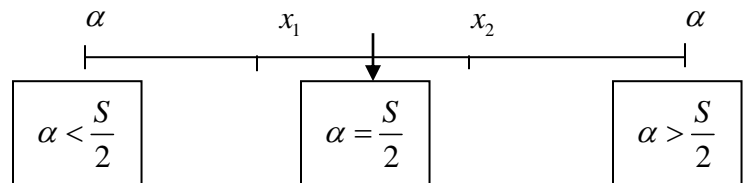
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
f(x)	(Cùng dấu với hệ số a)	0	(Trái dấu với hệ số a)	0	(Cùng dấu với hệ số a)

Hệ quả 2:

+ $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a.f(\alpha) < 0$

+ $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}$

+ $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}$



$$+ \alpha \notin [x_1, x_2] \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

Hệ quả 3:

$$+ x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) < 0 \end{cases}$$

$$+ \alpha < x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) > 0 \\ a.f(\beta) < 0 \end{cases}$$

$$+ x_1 < \alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) > 0 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \alpha < x_1 < \beta < x_2 \\ x_1 < \alpha < x_2 < \beta \end{cases} \Leftrightarrow f(\alpha).f(\beta) < 0$$

$$+ \alpha < x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) > 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta \end{cases}$$

b. Dấu của nghiệm số

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

a) $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

b) $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$

c) $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.c > 0 \end{cases}$

c) $ax^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$

d) $ax^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$

Chú ý: Dấu của tam thức bậc hai luôn luôn cùng dấu với hệ số a khi $\Delta < 0$

i) $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ ii) $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$$\text{iii) } ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \text{iv) } ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

5. Bất phương trình bậc hai

a. Định nghĩa:

Bất phương trình bậc 2 là bpt có dạng $f(x) > 0$ (Hoặc $f(x) \geq 0, f(x) < 0, f(x) \leq 0$), trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai. ($f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$)

b. Cách giải:

Để giải bất pt bậc hai, ta áp dụng định lí và dấu tam thức bậc hai

♦*Bước 1:* Đặt về trái bằng $f(x)$, rồi xét dấu $f(x)$

♦*Bước 2:* Dựa vào bảng xét dấu và chiều của bpt để kết luận nghiệm của bpt

6. Thống kê

Kiến thức cần nhớ

i) Bảng phân bố tần suất

ii) Biểu đồ

iii) Số trung bình cộng, số trung vị, mốt

iv) Phương sai độ lệch chuẩn

7. Lượng giác

- Đã có tài liệu kèm theo

II. Phần Hình học

1. Các vấn đề về hệ thức lượng trong tam giác

a. Các hệ thức lượng trong tam giác:

Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$, trung tuyến $AM = m_a, BM = m_b, CM = m_c$

Định lý cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Định lý sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (\text{với } R \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC})$$

b. Độ dài đường trung tuyến của tam giác:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{2(b^2 + a^2) - c^2}{4}$$

c. Các công thức tính diện tích tam giác:

$$\bullet \quad S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c \quad S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

$$S = \frac{abc}{4R} \qquad S = pr \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{với } p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

2. Phương trình đường thẳng

* Để viết được phương trình đường thẳng dạng tham số cần phải biết được Toạ độ 1 điểm và 1 vector chỉ phương

* Để viết được phương trình đường thẳng dạng tổng quát cần biết được toạ độ 1 điểm và 1 vector pháp tuyến

a. Phương trình tham số của đường thẳng Δ :

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad \text{với } M(x_0; y_0) \in \Delta \quad \text{và } \vec{u} = (u_1; u_2) \text{ là vector chỉ phương (VTCP)}$$

b. Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ hay $ax + by + c = 0$

(với $c = -ax_0 - by_0$ và $a^2 + b^2 \neq 0$) trong đó $M(x_0; y_0) \in \Delta$ và $\vec{n} = (a; b)$ là vector pháp tuyến (VTPT)

• Phương trình đường thẳng cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

• Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc k có dạng: $y - y_0 = k(x - x_0)$

c. Khoảng cách từ một điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ được tính theo công

thức: $d(M; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

d. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

$$\Delta_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}; \quad \text{Toạ độ giao điểm của } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}; \quad \Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{với } a_2, b_2, c_2 \text{ khác } 0)$$

3. Đường tròn

a. Phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R có dạng:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (1)$$

hay $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (2)$ với $c = a^2 + b^2 - R^2$

• Với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$ thì phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn tâm

$I(a; b)$ bán kính R

• Đường tròn (C) tâm $I(a; b)$ bán kính R tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

khi và chỉ khi: $d(I; \Delta) = \frac{|\alpha.a + \beta.b + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = R$

▸ Δ cắt (C) $\Leftrightarrow d(I; \Delta) < R$

▸ Δ không có điểm chung với (C) $\Leftrightarrow d(I; \Delta) > R$

▸ Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$

- b. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn
 Dạng 1: Điểm A thuộc đường tròn
 Dạng 2: Điểm A không thuộc đường tròn
 Dạng 3: Biết phương trình tiếp tuyến của đường tròn vuông góc hay song song với 1 đường thẳng nào đó

4. Phương trình Elip

a. Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ và $F_1F_2 = 2a$ ($a > c > 0$, $a = \text{const}$). Elip (E) là tập hợp các điểm M : $F_1M + F_2M = 2a$. Hay $(E) = \{M / F_1M + F_2M = 2a\}$

b. Phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a^2 = b^2 + c^2$)

c. Các thành phần của elip (E) là:

- ❖ Hai tiêu điểm : $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$
- ❖ Bốn đỉnh : $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(-b; 0)$, $B_2(b; 0)$
- ❖ Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a$
- ❖ Độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$
- ❖ Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$

d. Hình dạng của elip (E);

- (E) có 2 trục đối xứng là Ox, Oy và có tâm đối xứng là gốc tọa độ
- Mọi điểm của (E) ngoại trừ 4 đỉnh đều nằm trong hình chữ nhật có kích thước 2a và 2b giới hạn bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$. Hình chữ nhật đó gọi là hình chữ nhật cơ sở của elip.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

I. Phần Đại số

1. Bất phương trình và hệ bất phương trình

Bài 1: Tìm điều kiện của các phương trình sau đây:

a) $\sqrt{\frac{x+2}{(x-3)^2}} < x+2$

b) $\sqrt[3]{\frac{x+2}{2x^2-3x+1}} + x^3 \geq 9$

Bài 2: Giải bất phương trình sau:

a) $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} \geq -10$

b) $\frac{(x-2)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} < 2$

c) $\frac{x+2}{3} - x + 1 > x + 3$

d) $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$

e) $(\sqrt{1-x} + 3)(2\sqrt{1-x} - 5) > \sqrt{1-x} - 3$

f) $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0$

Bài 3: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \frac{5x+2}{3} \geq 4-x \\ \frac{6-5x}{13} < 3x+1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x+3 \\ \frac{3x+8}{4} > 2x-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-1 \leq 2x-3 \\ 3x < x+5 \\ \frac{5-3x}{2} \leq x-3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{3} \\ x - \frac{1}{2} < \frac{5(3x-1)}{2} \end{cases}$

Bài 4: Giải các bpt sau:

a. $(4x - 1)(4 - x^2) > 0$

b. $\frac{(2x-3)(x^2-x+1)}{4x^2-12x+9} < 0$

c. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} < \frac{3}{x-3}$

d. $\frac{x+1}{x-1} + 2 > \frac{x-1}{x}$

e. $\frac{10-x}{5+x^2} \geq \frac{1}{2}$

Bài 5: Giải các hệ bpt sau:

a. $\begin{cases} 5x-10 > 0 \\ x^2-x-12 < 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x^2-20x-7 < 0 \\ 2x^2-13x+18 > 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \frac{2-4x}{x+1} > \frac{3x}{2-x} \\ x^2-6x-16 < 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x-7-x^2 < 0 \\ x^2-2x-1 \geq 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7} \\ \frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} < \frac{5x+1}{3} \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x^2+8x-3 \leq 0 \\ \frac{2}{x} + x > 0 \end{cases}$

Bài 6: Giải các bất phương trình sau

a. $(2-x)(2x^2-5x+2) \geq 0$

b. $\frac{x+2}{x-1} > \frac{x+4}{x-3}$

c. $\frac{(x-1)(5-x)}{x^2-3x+2} \leq 0$

d. $\frac{3-3x}{15-2x-x^2} \geq 1$

e. $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} > 1$

f. $\frac{x^2-9x+14}{x^2+9x+14} \geq 0$

Bài 7: Giải các hệ bất phương trình sau

a. $\begin{cases} 4x-3 < 3x+4 \\ x^2-7x+10 \leq 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x^2-13x+18 > 0 \\ 3x^2-20x-7 < 0 \end{cases}$

2. Dấu của nhị thức bậc nhất

Bài 1: Giải các bất phương trình

a) $x(x-1)(x+2) < 0$

b) $(x+3)(3x-2)(5x+8)^2 < 0$

c) $\frac{5}{3-x} > 1$

d) $\frac{-4x+1}{3x+1} \leq -3$

e) $\frac{x^2+3x-1}{2-x} > -x$

f) $|2x-5| < 3$

g) $|x-2| > 2x-3$

h) $2|x|-|x-3|=8$

k) $|x+1| \leq |x|-x+2$

3. Phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài 1: Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $2x + 3y + 1 > 0$ b) $x - 5y < 3$ c) $4(x - 1) + 5(y - 3) > 2x - 9$ d) $3x + y > 2$

Bài 2: Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình:

a)
$$\begin{cases} 3x + y - 9 \geq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} 3 - x < 0 \\ 2x - 3y + 1 > 0 \end{cases}$$
 c)
$$\begin{cases} x - 3y < 0 \\ x + 2y > -3 \\ y + x < 2 \end{cases}$$
 e)
$$\begin{cases} y - x < 1 \\ y + x < 3 \\ y > \frac{1}{2}x \end{cases}$$

4. Dấu của tam thức bậc hai

Bài 1: Xét dấu các tam thức bậc hai:

a) $3x^2 - 2x + 1$ b) $-x^2 - 4x + 5$ c) $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$
 d) $x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3}$ e) $\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + 1$ f) $x^2 - (\sqrt{7} - 1)x + \sqrt{3}$

Bài 2: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \left(x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2x - \frac{7}{2}\right)^2$ b) $B = \frac{3x^2 - 2x - 5}{9 - x^2}$
 c) $C = \frac{11x + 3}{-x^2 + 5x - 7}$ d) $D = \frac{x^2 - 3x - 2}{-x^2 + x - 1}$

Bài 3: Tìm các giá trị của tham số m để mỗi phương trình sau có nghiệm:

a) $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$ b) $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$

Bài 4: Tìm các giá trị m để phương trình:

a) $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt
 b) $x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt
 c) $(m^2 + m + 1)x^2 + (2m - 3)x + m - 5 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

Bài 5: Xác định m để tam thức sau luôn dương với mọi x:

a) $x^2 + (m+1)x + 2m + 7$ b) $x^2 + 4x + m - 5$ c) $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m + 4$
 d) $mx^2 - 12x - 5$

Bài 6: Xác định m để tam thức sau luôn âm với mọi x:

a) $mx^2 - mx - 5$ b) $(2 - m)x^2 + 2(m - 3)x + 1 - m$
 c) $(m + 2)x^2 + 4(m + 1)x + 1 - m^2$ d) $(m - 4)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1$

Bài 7: Xác định m để hàm số $f(x) = \sqrt{mx^2 - 4x + m + 3}$ được xác định với mọi x.

Bài 8: Tìm giá trị của tham số để bpt sau nghiệm đúng với mọi x

a) $5x^2 - x + m > 0$ b) $mx^2 - 10x - 5 < 0$
 c) $m(m + 2)x^2 + 2mx + 2 > 0$ d) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \geq < 0$

Bài 9: Tìm giá trị của tham số để bpt sau vô nghiệm:

a) $5x^2 - x + m \leq 0$ b) $mx^2 - 10x - 5 \geq 0$

Bài 10: Tìm m để

- b. Bất phương trình $mx^2 + (m-1)x + m - 1 > 0$ vô nghiệm.
- c. Bất phương trình $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 < 0$ có nghiệm với mọi x thuộc R.
- d. Bất phương trình $(m-3)x^2 + (m+2)x - 4 \leq 0$ có nghiệm.
- e. Phương trình $(m+1)x^2 + 2(m-2)x + 2m - 12 = 0$ có hai nghiệm cùng dấu
- f. Phương trình $(m+1)x^2 + 2(m-2)x + 2m - 12 = 0$ có hai nghiệm trái dấu
- g. Phương trình $(m+1)x^2 + 2(m-2)x + 2m - 12 = 0$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1

Bài 11:a. Tìm m để pt sau có hai nghiệm dương phân biệt:

a. $(m^2 + m + 1)x^2 + (2m - 3)x + m - 5 = 0.$

b. $x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2 = 0$

Bài 12:a. Tìm m để bất pt sau vô nghiệm:

a. $5x^2 - x + m \leq 0$.

b. $mx^2 - 10x - 5 \geq 0$.

Bài 13: Tìm các giá trị của m để bpt sau nghiệm đúng với mọi x:

$$mx^2 - 4(m-1)x + m - 5 \leq 0.$$

Bài 14: Cho pt $mx^2 - 2(m-1)x + 4m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để pt có:

a. Hai nghiệm phân biệt.

b. Hai nghiệm trái dấu.

c. Các nghiệm dương.

d. Các nghiệm âm.

Bài 15: Cho phương trình : $-3x^2 - (m-6)x + m - 5 = 0$ với giá nào của m thì :

a. Phương trình vô nghiệm

b. Phương trình có nghiệm

c. Phương trình có 2 nghiệm trái dấu

d. Phương trình có hai nghiệm phân biệt

f. Có nghiệm kép và tìm nghiệm kép đó

g. Có hai nghiệm dương phân biệt

Bài 16: Cho phương trình : $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ với giá nào của m thì

a. Phương trình vô nghiệm

b. Phương trình có nghiệm

c. Phương trình có 2 nghiệm trái dấu

d. Phương trình có hai nghiệm phân biệt

f. Có nghiệm kép và tìm nghiệm kép đó

g. Có hai nghiệm dương phân biệt

Bài 17: Tìm m để bpt sau có nghiệm

a) $2x^2 - (m-9)x + m^2 + 3m + 4 \geq 0$ b) $-3x^2 - (m-6)x + m - 5 < 0$

c) $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 > 0$

Bài 18: Với giá trị nào của m, bất phương trình sau vô nghiệm

a) $x^2 + (3-m)x + 3 - 2m = 0$

b) $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$

Bài 19: với giá trị nào của m thì hệ sau có nghiệm

a) $\begin{cases} x^2 - 9x + 20 \leq 0 \\ 3x - 2m > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0 \\ m - 2x \geq 0 \end{cases}$

Bài 20: Với giá trị nào của m thì hệ sau vô nghiệm

a) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x - 3m < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 4 \geq 0 \\ 4x - m - 2 < 0 \end{cases}$

5. Phương trình bậc hai & bất phương trình bậc hai

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = x^2 + 3x - 4$ b) $\sqrt{x^2 - 4x} = x - 3$ c) $|x+1| + |x+3| = x+4$ d) $\sqrt{x^2 - 2x - 15} = x - 3$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau

$$a) \frac{(2x-5)(3-x)}{x+2} \leq 0 \quad b) \frac{(2x-1)(3-x)}{x^2-5x+4} > 0$$

$$c) \frac{2}{2x^2-5x+3} > \frac{1}{x^2-9} \quad d) \frac{x^2-4x+3}{3-2x} < 1-x \quad e) \frac{2x-1}{x-2} < \frac{1}{4x+2}$$

$$f) \frac{|1-2x|}{x^2-x-2} \leq \frac{1}{2} \quad g) \sqrt{3x^2+24x+22} \geq 2x+1 \quad h) |x^2-5x+4| > x^2+6x+5$$

Bài 3. Giải các hệ bất phương trình

$$a) \begin{cases} -x^2+3x+4 \geq 0 \\ (x-1)(x-2) < -2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{(x-5)(x+1)}{x^2} \leq 0 \\ \sqrt{x^2-4x} < x-3 \end{cases}$$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

$$a) x^2+x+1 \geq 0 \quad b) x^2-2(1+\sqrt{2})x+3+2\sqrt{2} > 0$$

$$c) x^2-2x+1 \leq 0 \quad d) x(x+5) \leq 2(x^2+2)$$

$$e) x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2} > 0 \quad f) -3x^2+7x-4 \geq 0$$

$$g) 2(x+2)^2-3,5 \geq 2x \quad h) \frac{1}{3}x^2-3x+6 < 0$$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau:

$$a) (x-1)(x^2-4)(x^2+1) \leq 0 \quad b) (-x^2+3x-2)(x^2-5x+6) \geq 0$$

$$c) x^3-13x^2+42x-36 > 0 \quad d) (3x^2-7x+4)(x^2+x+4) > 0$$

Bài 6: Giải các bất phương trình sau:

$$a) \frac{10-x}{5+x^2} > \frac{1}{2} \quad b) \frac{4-2x}{2x-5} > \frac{1}{1-2x} \quad c) \frac{x^2+x+2}{x^2-4x-5} < 0$$

$$d) \frac{3x^2-10x+3}{x^2+4x+4} \geq 0 \quad e) \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2} \quad f) \frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}$$

$$g) \frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} \geq \frac{x+1}{x} \quad h) \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \leq 0$$

2) Giải các hệ bpt sau

$$a) \begin{cases} 6x+\frac{5}{7} < 4x+7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 15x-2 > 2x+\frac{1}{3} \\ 3x^2+7x-10 \geq 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x^2-7x+12 < 0 \\ (9-x^2)(x-1) \geq 0 \end{cases}$$

6. Thống kê

Bài 1: Cho bảng thống kê: Năng suất lúa hè thu (tạ/ha) năm 1998 của 31 tỉnh từ Nghệ An trở vào là:

30	30	25	25	35	45	40	40	35	45
35	25	45	30	30	30	40	30	25	45
45	35	35	30	40	40	40	35	35	35

a) Dấu hiệu điều tra là gì? Đơn vị điều tra?

b) Hãy lập:

- o Bảng phân bố tần số
- o Bảng phân bố tần suất

c) Dựa vào kết quả của câu b) Hãy nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê

Bài 2: Đo khối lượng của 45 quả táo (khối lượng tính bằng gram), người ta thu được mẫu số liệu sau:

86	86	86	86	87	87	88	88	88	89
89	89	89	90	90	90	90	90	90	91
92	92	92	92	92	92	93	93	93	93
93	93	93	93	93	94	94	94	94	95
96	96	96	97	97					

a) Dấu hiệu điều tra là gì? Đơn vị điều tra? Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

b) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp gồm 4 lớp với độ dài khoảng là 2: Lớp 1 khoảng [86;88] lớp 2 khoảng [89;91] . . .

Bài 3: Cho mẫu số liệu có bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp như sau:

Nhóm	Khoảng	Tần số(n_i)	Tần suất (f_i)
1	[86;88]	9	20%
2	[89;91]	11	24.44%
3	[92;94]	19	42.22%
4	[95;97]	6	13.34%
Tổng		N = 45	100%

a) Vẽ biểu đồ hình cột tần số

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần suất

c) Vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần số

d) Vẽ biểu đồ hình quạt

Bài 4: Đo độ dài một chi tiết máy (đơn vị độ dài là cm) ta thu được mẫu số liệu sau:

40.4	40.3	42.0	44.5	49.8	50.6	51.2	53.4	55.5	56.0	56.4	57.2
57.4	58.0	58.7	58.8	58.9	59.1	59.3	59.4	60.0	60.3	60.5	62.8

a) Tính số trung bình, số trung vị và mốt

b) Lập bảng tần số ghép lớp gồm 6 lớp với độ dài khoảng là 4: nhóm đầu tiên là [40;44) nhóm thứ hai là [44;48);...

Bài 5: Thành tích nhảy xa của 45 hs lớp 10D₁ ở trường THPT Trần Quang Khải:

1) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp, với các lớp như ở bảng bên

2) Vẽ biểu đồ tần số hình cột thể hiện bảng bên.

3 Nhận xét về thành tích nhảy xa của 45 học sinh lớp 10D₁

Lớp thành tích	Tần số
[2,2;2,4)	3
[2,4;2,6)	6
[2,6;2,8)	12
[2,8;3,0)	11
[3,0;3,2)	8
[3,2;3,4)	5
Cộng	45

Bài 6: Khối lượng của 85 con lợn (của đàn lợn I) được xuất chuồng (ở trại nuôi lợn N)

1) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp, với các lớp như ở bảng bên

2) Vẽ biểu đồ tần số hình cột thể hiện bảng bên.

3) Biết rằng sau đó 2 tháng, trại N cho xuất thêm hai đàn lợn, trong đó:

Đàn lợn II có khối lượng TB là 78kg và phương sai bằng 100

Đàn lợn III có khối lượng TB là 78kg và phương sai bằng 110

Hãy so sánh khối lượng của lợn trong 2 đàn II và III ở trên.

Lớp khối lượng	Tần số
[45;55)	10
[55;65)	20
[65;75)	35
[75;85)	15
[85;95)	5
Cộng	85

Bài 7: Thống kê điểm toán của một lớp 10D₁ được kết quả sau:

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	1	2	4	3	3	7	13	9	3	2

Tìm một ? Tính số điểm trung bình, trung vị và độ lệch chuẩn?

Bài 8: Sản lượng lúa (đơn vị tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	N=40

- Tìm sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng
- Tìm phương sai và độ lệch chuẩn

Bài 9. Điều tra về chiều cao của 36 học sinh trung học phổ thông (Tính bằng cm) được chọn ngẫu nhiên người điều tra viên thu được bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Lớp chiều cao	Tần số
[160; 162]	8
[163; 165]	14
[166; 168]	8
[169; 171]	6
cộng	$N = 36$

- Bổ sung vào bảng phân bố trên để được bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp
- Tính giá trị trung bình và phương sai của mẫu số liệu trên (*lấy gần đúng một chữ số thập phân*)

Bài 10: Tiến hành một cuộc thăm dò về số giờ tự học của học sinh lớp 10 ở nhà. Người điều tra chọn ngẫu nhiên 50 học sinh lớp 10 và đề nghị các em cho biết số giờ tự học ở nhà trong 10 ngày. Mẫu số liệu được trình bày dưới dạng bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây

Lớp	Tần số
[0; 10)	5
[10; 20)	9
[20; 30)	15
[30; 40)	10
[40; 50)	9
[50; 60]	2
Cộng	$N = 50$

- Dấu hiệu ,Tập hợp ,kích thước điều tra ?
- Đây là điều tra mẫu hay điều tra toàn bộ ?
- Bổ sung cột tần suất để hình thành bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp.
- Vẽ hai biểu đồ hình cột biểu diễn phân bố tần số, tần suất.
- Tính phương sai của mẫu số liệu trên (*Lấy gần đúng 3 chữ số thập phân*).

Bài 11. Cho bảng số liệu sau:

Số tiền lãi thu được của mỗi tháng (Tính bằng triệu đồng) của 22 tháng kinh doanh kể từ ngày bỏ cáo thành lập công ty cho đến nay của một công ty

12 13 12,5 14 15 16,5 17 12 13,5 14,5 19
12,5 16,5 17 14,5 13 13,5 15,5 18,5 17,5 19,5 20

a) Lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp theo các lớp [12;14), [14;16), [16;18), [18;20]

b) Vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần số

Bài 12. Chọn 23 học sinh và ghi cỡ giấy của các em ta được mẫu số liệu sau:

39 41 40 43 41 40 44 42 41 43 38 39
41 42 39 40 42 43 41 41 42 39 41

a. Lập bảng phân bố tần số, tần suất.

a. Tính số trung vị và số một của mẫu số liệu (lấy gần đúng một chữ số thập phân)

Bài 13 Điểm kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 10A ở trường X được cho ở bảng sau

Điểm	5	6	7	8	9	10
Tần số	1	5	10	9	7	3

Tìm số trung bình, số trung vị và một, phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 14: Bạn Lan ghi lại số cuộc điện thoại nhận được mỗi ngày trong 2 tuần

5 6 10 0 15 6 12 2 13 16 0 16 6 10

a. Tính số trung bình, số trung vị, một, phương sai và độ lệch chuẩn

b. Lập bảng phân bố tần số ghép lớp với các lớp sau: [0;4], [5;9], [10;14], [15;19]

Bài 15: Số liệu sau đây ghi lại mức thu nhập hàng tháng làm theo sản phẩm của 20 công nhân trong một tổ sản xuất (đơn vị tính : trăm ngàn đồng)

Thu nhập	8	9	10	12	15	18	20
Tần số	1	2	6	7	2	1	1

Tính số trung bình, số trung vị, phương sai, độ lệch chuẩn (chính xác đến 0,01)

Bài 16: Cho bảng phân bố tần số

Điểm kiểm tra toán	1	4	6	7	9	Cộng
Tần số	3	2	19	11	8	43

Bài 17: Chiều cao của 30 học sinh lớp 10 được liệt kê ở bảng sau (đơn vị cm):

145	158	161	152	152	167
150	160	165	155	155	164
147	170	173	159	162	156
148	148	158	155	149	152
152	150	160	150	163	171

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp với các lớp là: [145; 155); [155; 165); [165; 175].

b) Vẽ biểu đồ tần số, tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất

c) Phương sai và độ lệch chuẩn

Bài 18: Cho bảng phân bố tần số tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên của một công ty

Tiền thưởng	2	3	4	5	6	Cộng
Tần số	5	15	10	6	7	43

Tính phương sai, độ lệch chuẩn, tìm môđ và số trung vị của phân bố tần số đã cho.

Bài 19: Cho các số liệu thống kê được ghi trong bảng sau đây:

645	650	645	644	650	635	650	654
650	650	650	643	650	630	647	650
645	650	645	642	652	635	647	652

- a. Lập bảng phân bố tần số, tần suất lớp ghép với các lớp là: $[630; 635)$, $[635; 640)$, $[640; 645)$, $[645; 650)$, $[650; 655)$
- b. Tính phương sai của bảng số liệu trên.
- c. Vẽ biểu đồ hình cột tần số, tần suất
 Tính phương sai, độ lệch chuẩn và tìm môđ của bảng đã cho

7. Lượng giác

Bài 1: Đổi các số đo góc sau ra độ: $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{5}$; 1; $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{1}{2}$

Bài 2: Đổi các số đo góc sau ra radian: 35° ; $12^\circ 30'$; 10° ; 15° ; $22^\circ 30'$; 225°

Bài 3: Một cung tròn có bán kính 15cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo:

- a) $\frac{\pi}{16}$ b) 25° c) 40° d) 3

Bài 4: Trên đường tròn lượng giác, xác định các điểm M khác nhau biết rằng cung AM có các số đo:

- a) $k\pi$ b) $k\frac{\pi}{2}$ c) $k\frac{2\pi}{5}$ ($k \in \mathbb{Z}$) d) $\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Bài 5: Tính giá trị các hàm số lượng giác của các cung có số đo:

- a) -690° b) 495° c) $-\frac{17\pi}{3}$ d) $\frac{15\pi}{2}$

Bài 6: a) Cho $\cos x = \frac{-3}{5}$ và $180^\circ < x < 270^\circ$. tính $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$

b) Cho $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\cot \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$

Bài 7: Cho $\tan x - \cot x = 1$ và $0^\circ < x < 90^\circ$. Tính giá trị lượng giác $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$

Bài 8: a) Xét dấu $\sin 50^\circ \cdot \cos(-300^\circ)$

c) Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. xét dấu của $\sin(\alpha + 90^\circ)$

Bài 9: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức:

- a) $\cos(\alpha + \pi)$ b) $\tan(\alpha + \pi)$ c) $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$ d) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$

Bài 10: Rút gọn các biểu thức

- a) $A = \frac{2\cos^2 - 1}{\sin x + \cos x}$ b) $B = \sqrt{\sin^2 x(1 + \cot x) + \cos^2(1 + \tan x)}$

Bài 11: Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha}$ biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $\frac{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}{4\sin \alpha - 5\cos \alpha}$; $\frac{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\sin^3 \alpha + 4\cos^3 \alpha}$

Bài 12: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} &= \frac{2}{\sin x} & \text{b) } \sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x & \text{c) } \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \tan x \\ \text{d) } \sin^6 x + \cos^6 x &= 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x & \text{e) } \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} &= \sin^2 x \cdot \cos^2 x & \text{f) } \end{aligned}$$

$$\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x$$

Bài 13: Tính giá trị lượng giác của các cung:

$$\text{a) } \frac{\pi}{12} \qquad \text{b) } \frac{5\pi}{12} \qquad \text{c) } \frac{7\pi}{12}$$

Bài 14: Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right); \quad \text{b) } \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

Bài 15: a) Biến đổi thành tổng biểu thức: $A = \cos 5x \cdot \cos 3x$

b. Tính giá trị của biểu thức: $B = \cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$

Bài 16: Biến đổi thành tích biểu thức: $A = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

Bài 17: Tính $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ nếu $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Bài 18: Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \qquad \text{b) } \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

Bài 19: Tính giá trị của các biểu thức

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} & \text{c) } C &= (\cos 15^\circ - \sin 15^\circ) \cdot (\cos 15^\circ + \sin 15^\circ) \\ \text{b) } B &= 2 \cos^2 75^\circ - 1 \end{aligned}$$

Bài 20: Không dùng bảng lượng giác, tính các giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } P = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \qquad \text{b) } Q = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$$

Bài 21: Rút gọn biểu thức:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} & \text{b) } B &= \frac{4 \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} & \text{c) } \frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha} \end{aligned}$$

Bài 22: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào α, β

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 6\alpha \cdot \cot 3\alpha - \cos 6\alpha & \qquad \text{b) } (\tan \alpha - \tan \beta) \cot(\alpha - \beta) - \tan \alpha \cdot \tan \beta \\ \text{c) } \left(\cot \frac{\alpha}{3} - \tan \frac{\alpha}{3}\right) \cdot \tan \frac{2\alpha}{3} & \end{aligned}$$

Bài 23. Tính các giá trị lượng giác khác của góc a biết

$$\text{a) } \cos a = \frac{2}{\sqrt{5}}; 0 < a < \frac{\pi}{2} \qquad \text{b) } \tan a = -2; \frac{\pi}{2} < a < \pi$$

$$c) \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{2} < a < \pi \quad d) \tan a = -1; \pi < a < 3\frac{\pi}{2}$$

Bài 24. Tính

$$a) A = \frac{1}{\cos 80^\circ} - 4 \cos 20^\circ \quad b) \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \quad c) C = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ}$$

$$d) D = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ + \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ.$$

$$e) E = [\sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{3} - x) \cdot \sin(\frac{\pi}{3} + x)]^2 + [\cos x \cdot \cos(\frac{\pi}{3} - x) \cdot \cos(\frac{\pi}{3} + x)]^2$$

Bài 25. Tính các giá trị lượng giác của góc x khi biết $\cos \frac{x}{2} = \frac{4}{5}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Bài 26. Rút gọn

$$a) A = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a + \sin 2a} \quad b) B = \frac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x} \quad c) C = \frac{\cos 2a - \sin(b-a)}{2 \cos a \cos b - \cos(a-b)}$$

Bài 27. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)} \quad b) \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1$$

Bài 28: Tính giá trị lượng giác của góc α nếu:

$$a) \sin \alpha = -\frac{2}{5} \text{ và } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$b) \cos \alpha = 0.8 \text{ và } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

$$c) \tan \alpha = \frac{13}{8} \text{ và } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$d) \cot \alpha = -\frac{19}{7} \text{ và } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

Bài 29: Cho $\tan \alpha = \frac{3}{5}$, tính:

$$a. A = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

$$b. B = \frac{3 \sin^2 \alpha + 12 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha}$$

Bài 30: Chứng minh các đẳng thức sau

$$a. \frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$$

$$b. \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$$

$$c. \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$$

$$d. \frac{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha} = \tan^6 \alpha$$

$$e. \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

II. Phần Hình học

1. Hệ thức lượng trong tam giác

Bài 1: Cho ΔABC có $c = 35$, $b = 20$, $A = 60^\circ$. Tính h_a ; R ; r

Bài 2: Cho ΔABC có $AB = 10$, $AC = 4$ và $A = 60^\circ$. Tính chu vi của ΔABC , tính $\tan C$

Bài 3: Cho ΔABC có $A = 60^\circ$, cạnh $CA = 8\text{cm}$, cạnh $AB = 5\text{cm}$

- a) Tính BC b) Tính diện tích ΔABC c) Xét xem góc B tù hay nhọn?
 b) Tính độ dài đường cao AH e) Tính R

Bài 4: Trong ΔABC , biết $a - b = 1$, $A = 30^\circ$, $h_c = 2$. Tính $\sin B$

Bài 5: Cho ΔABC có $a = 13\text{cm}$, $b = 14\text{cm}$, $c = 15\text{cm}$

- a) Tính diện tích ΔABC b) Góc B tù hay nhọn? Tính B
 c) Tính bán kính R , r d) Tính độ dài đường trung tuyến m_b

Bài 6: Cho ΔABC có $a = 13\text{cm}$, $b = 14\text{cm}$, $c = 15\text{cm}$

- a) Tính diện tích ΔABC b) Góc B tù hay nhọn? Tính B
 c) Tính bán kính đường tròn R , r d) Tính độ dài đường trung tuyến

Bài 7: Cho ΔABC có $BC = 12$, $CA = 13$, trung tuyến $AM = 8$. Tính diện tích ΔABC ? Tính góc B ?

Bài 8: Cho ΔABC có 3 cạnh 9; 5; và 7. Tính các góc của tam giác? Tính khoảng cách từ A đến BC

Bài 9: Chứng minh rằng trong ΔABC luôn có công thức $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Bài 10: Cho ΔABC

- a) Chứng minh rằng $\sin B = \sin(A+C)$ b) Cho $A = 60^\circ$, $B = 75^\circ$, $AB = 2$, tính các cạnh còn lại của ΔABC

Bài 11: Cho ΔABC có G là trọng tâm. Gọi $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Chứng minh rằng:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 12: Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng: $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

Bài 13: Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và đường trung tuyến $AM = \frac{c}{2}$. Chứng minh rằng:

- a) $a^2 = 2(b^2 - c^2)$ b) $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$

Bài 14: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

- a) $b^2 - c^2 = a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B)$ b) $(b^2 - c^2) \cos A = a(c \cdot \cos C - b \cdot \cos B)$ c) $\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

Bài 15: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có: $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} R$

Bài 16: Một hình thang cân $ABCD$ có hai đáy $AB = a$, $CD = b$ và $\angle BCD = \alpha$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình thang.

Bài 17: Tính diện tích của ΔABC , biết chu vi tam giác bằng $2p$, các góc $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$.

Bài 18*: Chứng minh rằng nếu các góc của ΔABC thỏa mãn điều kiện $\sin B = 2 \sin A \cdot \cos C$, thì Δ đó cân.

Bài 19*: Chứng minh đẳng thức đúng với mọi ΔABC :

- a) $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cdot \cot A$ b) $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$
 c) $bc(b^2 - c^2) \cdot \cos A + ca(c^2 - a^2) \cdot \cos B + ab(a^2 - b^2) \cdot \cos C = 0$

Bài 20: Tính độ dài m_a , biết rằng $b = 1$, $c = 3$, $\angle BAC = 60^\circ$

2. Phương trình đường thẳng

Bài 1: Lập phương trình tham số và tổng quát của đường thẳng (Δ) biết:

- a) (Δ) qua $M(-2; 3)$ và có VTPT $\vec{n} = (5; 1)$ b) (Δ) qua $M(2; 4)$ và có VTCP $\vec{u} = (3; 4)$

Bài 2: Lập phương trình đường thẳng (Δ) biết: (Δ) qua M (2; 4) và có hệ số góc $k = 2$

Bài 3: Cho 2 điểm A(3; 0) và B(0; -2). Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 4: Cho 3 điểm A(-4; 1), B(0; 2), C(3; -1)

a) Viết pt các đường thẳng AB, BC, CA

b) Gọi M là trung điểm của BC. Viết pt tham số của đường thẳng AM

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A và tâm đường tròn ngoại tiếp Δ

Bài 5: Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình lần lượt là: $13x - 7y + 11 = 0, 19x + 11y - 9 = 0$ và điểm M(1; 1).

Bài 6: Lập phương trình đường thẳng (Δ) biết: (Δ) qua A (1; 2) và song song với đường thẳng $x + 3y - 1 = 0$

Bài 7: Lập phương trình đường thẳng (Δ) biết: (Δ) qua C (3; 1) và song song đường phân giác thứ (I) của mặt phẳng tọa độ

Bài 8: Cho biết trung điểm ba cạnh của một tam giác là $M_1(2; 1); M_2(5; 3); M_3(3; -4)$. Lập phương trình ba cạnh của tam giác đó.

Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ cho tam giác với M (-1; 1) là trung điểm của một cạnh, hai cạnh kia có phương trình là: $x + y - 2 = 0, 2x + 6y + 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác.

Bài 10: Lập phương trình của đường thẳng (D) trong các trường hợp sau:

a) (D) qua M (1; -2) và vuông góc với đt $\Delta: 3x + y = 0$. b) (D) qua gốc tọa độ và vuông góc với đt

$$\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

Bài 11: Viết pt đường thẳng đi qua gốc tọa độ và cách điểm M(3; 4) một khoảng lớn nhất.

Bài 12: Cho tam giác ABC có đỉnh A (2; 2)

a) Lập phương trình các cạnh của tam giác biết các đường cao kẻ từ B và C lần lượt có phương trình:

$$9x - 3y - 4 = 0 \text{ và } x + y - 2 = 0$$

b) Lập phương trình đường thẳng qua A và vuông góc AC.

Bài 13: Cho ΔABC có phương trình cạnh (AB): $5x - 3y + 2 = 0$; đường cao qua đỉnh A và B lần lượt là: $4x - 3y + 1 = 0; 7x + 2y - 22 = 0$. Lập phương trình hai cạnh AC, BC và đường cao thứ ba.

Bài 14: Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases}$, t là tham số. Hãy viết phương trình tổng quát của d.

Bài 15: Viết phương trình tham số của đường thẳng: $2x - 3y - 12 = 0$

Bài 16: Viết phương trình tổng quát, tham số, chính tắc (nếu có) của các trục tọa độ

Bài 17: Viết phương trình tham số của các đường thẳng $y + 3 = 0$ và $x - 5 = 0$

Bài 18: Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a) $d_1: 2x - 5y + 6 = 0$ và $d_2: -x + y - 3 = 0$

b) $d_1: -3x + 2y - 7 = 0$ và $d_2: 6x - 4y - 7 = 0$

c) $d_1: \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

d) $d_1: 8x + 10y - 12 = 0$ và $d_2:$

$$\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$$

Bài 19: Tính góc giữa hai đường thẳng

a) $d_1: 2x - 5y + 6 = 0$ và $d_2: -x + y - 3 = 0$

b) $d_1: 8x + 10y - 12 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$

c) $d_1: x + 2y + 4 = 0$ và $d_2: 2x - y + 6 = 0$

Bài 20: Cho điểm M(1; 2) và đường thẳng d: $2x - 6y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' đi qua M và hợp với d một góc 45° .

Bài 21: Viết pt đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tạo với đt Ox một góc 60° .

Bài 22: Viết pt đường thẳng đi M(1; 1) và tạo với đt Oy một góc 60° .

Bài 23: Điểm A(2; 2) là đỉnh của tam giác ABC. Các đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh B, C nằm trên các đường thẳng có các pt tương ứng là: $9x - 3y - 4 = 0, x + y - 2 = 0$. Viết pt đường thẳng qua A và tạo với AC một góc 45° .

Bài 24: Cho 2 điểm M(2; 5) và N(5; 1). Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cách điểm N một khoảng bằng 3.

Bài 25: Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và cách điểm M(1; 2) một khoảng bằng 2.

Bài 26: Viết phương trình đường thẳng song² và cách đều 2 đường thẳng $x + 2y - 3 = 0$ và $x + 2y + 7 = 0$.

Bài 27: (ĐH Huế khối D -1998) Cho đường thẳng d: $3x - 4y + 1$ viết pt đt d' song² d và khoảng cách giữa 2 đường thẳng đó bằng 1.

Bài 28: Viết pt đường thẳng vuông góc với đường thẳng d: $3x - 4y = 0$ và cách điểm M(2; -1) một khoảng bằng 3.

Bài 29: Cho đường thẳng Δ : $2x - y - 1 = 0$ và điểm M(1; 2).

a) Viết phương trình đường thẳng (Δ') đi qua M và vuông góc với Δ .

Tìm tọa độ hình chiếu H của M trên Δ .

c) Tìm điểm M' đối xứng với M qua Δ .

Bài 30: Viết phương trình tham số, phương trình tổng quát của đường thẳng (d) trong các trường hợp sau:

a) d qua A(2; -3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1)$

b) d qua B(4; -2) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; -1)$

c) d qua hai điểm D(3; -2) và E(-1; 3)

d) d qua M(2; -4) và vuông góc với đường thẳng d': $x - 2y - 1 = 0$

e) d qua N(-2; 4) và song song với đường thẳng d': $x - y - 1 = 0$

Bài 33: Lập ptt của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a. d đi qua điểm A(-5; 2) và có vtcp $\vec{u} = (4; -1)$.

b. d đi qua hai điểm A(-2; 3) và B(0; 4)

Bài 34: Lập ptt của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a. Δ đi qua M(2; 1) và có vtpt $\vec{n} = (-2; 5)$.

b. Δ đi qua điểm (-1; 3) và có hsg $k = -\frac{1}{2}$.

c. Δ đi qua hai điểm A(3; 0) và B(0; -2).

Bài 35: Cho đường thẳng Δ có ptt $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

a. Tìm điểm M nằm trên Δ và cách điểm A(0; 1) một khoảng bằng 5.

b. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

c. Tìm điểm M trên Δ sao cho AM là ngắn nhất.

Bài 36: Lập phương trình ba đường trung trực của một tam giác có trung điểm các cạnh lần lượt là M(-1; 0); N(4; 1); P(2; 4).

Bài 37: Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau vuông góc:

$$\Delta_1: mx + y + q = 0$$

$$\Delta_2: x - y + m = 0$$

Bài 38: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

a. d: $\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

b. d: $\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và d' $2x + 4y - 10 = 0$

c. d: $x + y - 2 = 0$ và d': $2x + y - 3 = 0$

Bài 39: Tìm góc giữa hai đường thẳng:

$$d: x + 2y + 4 = 0$$

$$d': 2x - y + 6 = 0$$

Bài 40: Tính bán kính của đường tròn có tâm là điểm $I(1; 5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 1 = 0$.

Bài 41: Lập phương trình đường phân giác của các góc giữa hai đường thẳng:

$d: 2x + 4y + 7 = 0$ và $d': x - 2y - 3 = 0$

Bài 42: Cho tam giác ABC biết phương trình đường thẳng AB: $x - 3y + 11 = 0$, đường cao AH: $3x + 7y - 15 = 0$, đường cao BH: $3x - 5y + 13 = 0$. Tìm phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại của tam giác.

Bài 43: Tìm phương trình của tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng:

$d: 5x + 3y - 3 = 0$ và $d': 5x + 3y + 7 = 0$

Bài 44: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a. Δ đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(4; 7)$

b. Δ cắt Ox, Oy lần lượt tại $A(1; 0)$ và $B(0; -4)$

c. Δ đi qua điểm $M(2; -3)$ và có hệ số góc $k = -\frac{1}{3}$

d. Δ vuông góc với Ox tại $A(-3; 0)$

Bài 45 : Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

a. Tìm điểm M nằm trên Δ và cách điểm $A(0; 1)$ một khoảng bằng 5

b. Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng Δ với đường thẳng $d: x + y + 1 = 0$

c. Viết phương trình đường thẳng d_1 đi qua $B(2; 3)$ và vuông góc với đường thẳng Δ

d. Viết phương trình đường thẳng d_2 đi qua $C(-2; 1)$ và song song với đường thẳng

Bài 46 Viết phương trình tổng quát, phương trình tham số của đường thẳng trong mỗi trường hợp sau:

a. Đi qua $A(1; -2)$ và song song với đường thẳng $2x - 3y - 3 = 0$.

b. Đi qua hai điểm $M(1; -1)$ và $N(3; 2)$.

c. Đi qua điểm $P(2; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $x - y + 5 = 0$.

Bài 47: Cho tam giác ABC có: $A(3; -5)$, $B(1; -3)$, $C(2; -2)$.Viết phương trình đường thẳng

a) đường thẳng AB, AC, BC

b) Đường thẳng qua A và song song với BC

c) Trung tuyến AM và đường cao AH của tam giác ABC

d) Đường trung trực của BC

a) Tìm tọa độ điểm A' là chân đường cao kẻ từ A trong tam giác ABC

b) Tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AB. Tính diện tích tam giác ABC

Bài 48: Cho đường thẳng $d: x - 2y + 4 = 0$ và điểm $A(4; 1)$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của A xuống d

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua d

c) Viết pt tham số của đường thẳng d

d) Tìm giao điểm của d và đường thẳng $d' \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

e) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d'

3. Đường tròn

Bài 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có:

a) $x^2 + 3y^2 - 6x + 8y + 100 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0$

c) $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 15$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 15 = 0$

Bài 2: Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 2(m - 1)y + 5 = 0$ (1), m là tham số

a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình đường tròn?

b) Nếu (1) là đường tròn hãy tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn theo m.

Bài 3: Viết phương trình đường tròn trong các trường hợp sau:

- a) Tâm I(2; 3) có bán kính 4
 b) Tâm I(2; 3) đi qua gốc tọa độ
 c) Đường kính là AB với A(1; 1) và B(5; -5)
 d) Tâm I(1; 3) và đi qua điểm A(3; 1)

Bài 4: Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A(2; 0); B(0; -1) và C(-3; 1)

Bài 5: Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với A(2; 0); B(0; 3) và C(-2; 1)

Bài 6: a) Viết phương trình đường tròn tâm I(1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng D: $x - 2y - 2 = 0$

b) Viết phương trình đường tròn tâm I(3; 1) và tiếp xúc với đường thẳng D: $3x + 4y + 7 = 0$

Bài 7: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$ và đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

Bài 8: Viết phương trình đường tròn đi qua A(1; 1), B(0; 4) và có tâm \in đường thẳng d: $x - y - 2 = 0$

Bài 9: Viết phương trình đường tròn đi qua A(2; 1), B(-4; 1) và có bán kính R=10

Bài 10: Viết phương trình đường tròn đi qua A(3; 2), B(1; 4) và tiếp xúc với trục Ox

Bài 11: Viết phương trình đường tròn đi qua A(1; 1), có bán kính $R = \sqrt{10}$ và có tâm nằm trên Ox

Bài 12: Cho I(2; -2). Viết phương trình đường tròn tâm I và tiếp xúc với d: $x + y - 4 = 0$

Bài 13: Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$ tại điểm $M_0(4; 2)$ thuộc đường tròn.

Bài 14: Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$ tại điểm M thuộc đường tròn có hoành độ bằng $x_0 = 2$.

Bài 15: Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$ và đi qua điểm M(2; 3)

Bài 16: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) : $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ kẻ từ gốc tọa độ.

Bài 17: Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ và đường thẳng d: $2x + y - 1 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ biết $\Delta \parallel d$; Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 18: Cho đường tròn (C) : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến đó $\parallel d$ có phương trình: $x + y - 7 = 0$.

Bài 19: Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 5$, biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $x - 2y = 0$.

Bài 20: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm A(1; 3)

a) Chứng minh rằng A nằm ngoài đường tròn
 b) Viết pt tiếp tuyến của (C) kẻ từ A

b) Viết pt tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (d): $3x - 4y + 1 = 0$

Bài 21: Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết phương trình của các cạnh AB: $3x + 4y - 6 = 0$; AC: $4x + 3y - 1 = 0$; BC: $y = 0$

Bài 22: Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn (C) sau đây: $3x + y + m = 0$ và $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

Bài 23: Viết pt đường tròn (C) đi qua điểm A(1, 0) và tiếp xúc với 2 đt $d_1: x + y - 4 = 0$ và $d_2: x + y + 2 = 0$.

Bài 24: cho (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x + y + 1 = 0$

Bài 25: Trong mặt phẳng Oxy cho phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ (I)

a) Chứng tỏ phương trình (I) là phương trình của đường tròn, xác định tâm và bán kính của đường tròn đó

b)Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn biết tiếp tuyến qua A(0;-1)

Bài 26: Trong mặt phẳng Oxy, hãy lập phương trình của đường tròn (C) có tâm là điểm (2; 3) và thỏa mãn điều kiện sau:

- a. (C) có bán kính là 5.
- b. (C) đi qua gốc tọa độ O.
- c. (C) tiếp xúc với trục Ox.
- d. (C) tiếp xúc với trục Oy.
- e. (C) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 4x + 3y - 12 = 0$.

Bài 27: Cho ba điểm A(1; 4), B(-7; 4), C(2; -5).

- a. Lập phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC.
- b. Tìm tâm và bán kính của (C).

Bài 28: Cho đường tròn (C) đi qua điểm A(-1; 2), B(-2; 3) và có tâm ở trên đt $\Delta: 3x - y + 10 = 0$.

- a. Tìm tọa độ của (C).
- b. Tìm bán kính R của (C).
- c. Viết phương trình của (C).

Bài 29: Lập phương trình của đường tròn đường kính AB trong các trường hợp sau:

- a. A(-1; 1), B(5; 3).
- b. A(-1; -2), B(2; 1).

Bài 30: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - x - 7y = 0$ và đt d: $3x - 4y - 3 = 0$.

- a. Tìm tọa độ giao điểm của (C) và (d).
- b. Lập phương trình tiếp tuyến với (C) tại các giao điểm đó.
- c. Tìm tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến.

Bài 31: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm A(1; 3).

- a. Chứng tỏ rằng điểm A nằm ngoài đường tròn (C).
- b. Lập phương trình tiếp tuyến với (C) xuất phát từ điểm A.

Bài 32: Lập phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$, biết rằng Δ vuông góc với đường thẳng d: $3x - y + 4 = 0$.

Bài 33: Cho phương trình: $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m - 1 = 0$

- a. Với giá trị nào của m thì (C_m) là đường tròn ?
- b. Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C_3)

Bài 34: Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

- a. (C) có tâm I(-2;3) và đi qua điểm A(4; 6)
- b. (C) có tâm I(-1;2) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x - 2x + 7 = 0$
- c. (C) có đường kính AB với A(1 ; 1), B(7 ; 5)
- d. (C) đi qua ba điểm A(1 ; 2), B(5 ; 2) và C(1;-3)
- e. (C) đi qua hai điểm A(2 ; 1),B(4 ; 3) và có tâm nằm trên đường thẳng d: $x - y + 5 = 0$

Bài 35 :Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

- a. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm A(3 ; 1)
- b. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) xuất phát từ điểm B(1 ; 3)
- c. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với $d_1: 3x - 4y + 2009 = 0$
- d. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến vuông góc với $d_2: x - 2y - 2010 = 0$

Bài 36. Cho đường tròn có phương trình: (C) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$.

- a. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn biết tt qua điểm A(-1;0).
- b. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn biết tiếp tuyến song song với d: $x - 5y + 11 = 0$
- c. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn biết tiếp tuyến vuông góc với d': $x - 4y + 1 = 0$

Bài 37 Viết pt đường tròn trong các trường hợp sau :

- a. (C) có tâm I(3;5) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 4 = 0$
- b. (C) có tâm I(3 ;5) và đi qua B(1 ; -4)
- c. (C) nhận M(-1 ;3) và N(4 ; 5) làm đường kính
- d. (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác M(-1 ;3) ,N(4 ; 5) và P(-3 ;9)

4. Phương trình Elip

Bài 1: Tìm độ dài các trục, tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh của (E) có các phương trình sau:

a) $7x^2 + 16y^2 = 112$ b) $4x^2 + 9y^2 = 16$ c) $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$

d) $mx^2 + ny^2 = 1 (n > m > 0, m \neq n)$

Bài 2: Cho (E) có phương trình $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

- a) Tìm tọa độ tiêu điểm, các đỉnh, độ dài trục lớn trục nhỏ của (E)
 b) Tìm trên (E) những điểm M sao cho M nhìn đoạn thẳng nối hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Bài 3: Cho (E) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Hãy viết phương trình đường tròn (C) có đường kính F_1F_2 trong đó F_1 và F_2 là 2 tiêu điểm của (E)

Bài 4: Tìm tiêu điểm của elip (E): $x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \sin^2 \alpha = 1 (45^\circ < \alpha < 90^\circ)$

Bài 5: Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết:

- a) Một đỉnh trên trục lớn là $A(-2; 0)$ và một tiêu điểm $F(-\sqrt{2}; 0)$
 b) Hai đỉnh trên trục lớn là $M(\sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{5}})$, $N(-1; \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$

Bài 6: Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết:

- a) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm 4, y = \pm 3$
 b) Đi qua 2 điểm $M(4; \sqrt{3})$ và $N(2\sqrt{2}; -3)$ c) Tiêu điểm $F_1(-6; 0)$ và tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

Bài 7: Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết:

- a) Tiêu cự bằng 6, tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ b) Đi qua điểm $M(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}})$ và ΔMF_1F_2 vuông tại M
 b) Hai tiêu điểm $F_1(0; 0)$ và $F_2(1; 1)$, độ dài trục lớn bằng 2.

Bài 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(x; y)$ di động có tọa độ luôn thỏa mãn $\begin{cases} x = 7 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}$, trong đó t là tham số. Hãy chứng tỏ M di động trên một elip.

Bài 9: Tìm những điểm trên elip (E) : $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ thỏa mãn

- a) Nhìn 2 tiêu điểm dưới một góc vuông c) Nhìn 2 tiêu điểm dưới một góc 60°

Bài 10: Cho (E) có phương trình $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$. Tìm những điểm trên elip cách đều 2 điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 0)$

Bài 11: Cho (E) có phương trình $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ và đường thẳng d: $y = 2x$. Tìm những điểm trên (E) sao cho khoảng cách từ điểm đó đến d bằng $\sqrt{3}$.

Bài 22. Viết phương trình chính tắc elip có một tiêu điểm $F_2(5; 0)$ trục nhỏ $2b$ bằng $4\sqrt{6}$, tìm tọa độ các đỉnh, tiêu điểm của elíp.

Bài 23: Trong mặt phẳng Oxy Cho các điểm $A(0; -1); B(0; 1); C(1; \frac{2\sqrt{2}}{3})$

- a) Viết phương trình đường tròn đường kính AB và tiếp tuyến của đường tròn tại $M(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$
 b) Viết phương trình chính tắc của elíp nhận hai điểm A, B làm các đỉnh và elíp đi qua C

Bài 24 : (NC) Tìm tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài các trục và vẽ Elip (E) trong các trường hợp sau :

a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b. $9x^2 + 25y^2 = 225$

Bài 25 : (NC) Viết phương trình chính tắc của (E) biết :

a. (E) có độ dài trục lớn 26 và tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{5}{13}$

b. (E) có tiêu điểm $F_1(-6;0)$ và tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

c. (E) đi qua hai điểm $M\left(4; \frac{9}{5}\right)$ và $N\left(3; \frac{12}{5}\right)$

d. (E) đi qua hai điểm $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và tam giác MF_1F_2 vuông tại M

