ĐỀ THI C HỌC SINH GIỎI LỚP 9

Năm học 2015 – 2016

Môn thi: Toán.

Thời gian: 150 phút.(không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (6 điểm)

a. Cho $M = (1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}):(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6})$

1) Rút gọn M

2) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

b. Tính giá trị của biểu thức P

$P = 3x^{2013} + 5x^{2011} + 2006$ với $x = \sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}}} - \sqrt{3}$

Bài 2: (4 điểm)

a - Giải phương trình: $\sqrt{(1+x^2)^3} - 4x^3 = 1 - 3x^4$

b - Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^2 + 2014$ là một số chính phương

Bài 3: (4 điểm)

a) Cho đường thẳng: $(m-2)x + (m-1)y = 1$ (m là tham số) (1)

Chứng minh rằng đường thẳng (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m

b) Chứng minh rằng: nếu a, b ,c là ba số thỏa mãn a + b +c = 2013 và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ $= \frac{1}{2013}$ thì một trong ba số phải có một số bằng 2013

Bài 4: (5 điểm)

Cho đường tròn (O; R). AB và CD là hai đường kính cố định của (O) vuông góc với nhau. M là một điểm thuộc cung nhỏ AC của (O). K và H lần lượt là hình chiếu của M trên CD và AB.

a) Tính $\sin^2 MBA + \sin^2 MAB + \sin^2 MCD + \sin^2 MDC$

b) Chứng minh: $OK^2 = AH(2R - AH)$

c) Tìm vị trí điểm H để giá trị của: P = MA. MB. MC. MD lớn nhất.

Bài 5: (1 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{a+c-b} + \frac{16c}{a+b-c}$

(Trong đó a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác)

- Hết –

ĐÁP ÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

Bài 1:

a) (4,5đ)

ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ (*)

1) Rút gọn M: Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

8Vậy $M = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$) (*) (2,5đ)

2) $M = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$ (0,75đ)

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3 \vdots \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in U(3)$

Ư$(3) \in \{\pm 1; \pm 3\}$ Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$

Nên $\sqrt{x}+1 \in \{1;3\}$

Xảy ra các trường hợp sau: (0,5đ)

. $\sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (TMĐK (*))

. $\sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$

(không TMĐK (*) loại) (0,25đ)

Vậy x = 0 thì M nhận giá trị nguyên.

b) $x = \sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}}}.-\sqrt{3}$

Có $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} = \left|4-\sqrt{2}\right| = 4-\sqrt{2}$ (0,5đ)

$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}+4} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \left|\sqrt{3}+1\right|$ (0,25đ)

$x = \sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{3}+1}} = \sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$

$x = \sqrt{6+2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} - \sqrt{3} = \sqrt{6+2\sqrt{3}-1} - \sqrt{3} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

$x = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3} = \left|\sqrt{3}+1\right| - \sqrt{3} = \sqrt{3}+1-\sqrt{3} = 1$ (0,75đ)

Với x = 1.Ta có $P = 3.1^{2013} + 5.1^{2011} + 2006 = 3+5+2006 = 2014$

Vậy với x = 1 thì P = 2014

Bài 2:

a_(2,5đ)

$\sqrt{\left(1+x^2\right)^3} - 4x^3 = 1-3x^4$ (1)

Ta có: $4x^3+1-3x^4=-3x^4+4x^3+x^2-x^2+1=1+x^2-x^2\left(3x^2-4x+1\right)$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có:

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{\left(1+x^2\right)^3}-\left(1+x^2\right)=-x^2\left(3x^2-4x+1\right)$ (3) (0,5đ)

Đặt $y=\sqrt{1+x^2}$, với $y\geq 1$. Suy ra $x^2=y^2-1$

Thay vào (3): $y^3-y^2=\left(1-y^2\right)\left(3x^2-4x+1\right)$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow y^2\left(y-1\right)-\left(1-y^2\right)\left(3x^2-4x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(y-1\right)\left[y^2+\left(y+1\right)\left(3x^2-4x+1\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-1=0 \\ y+\left(y+1\right)\left(3x^2-4x+1\right)=0 \end{array}\right.$

* Với y = 1 thì $x=0$ thỏa mãn phương trình.

* Với y $\neq$ 1 và y $\geq$ 1, ta có: $y^2+\left(y+1\right)\left(3x^2-4x+1\right)=0$ (4) (1đ)

Vì $3x^2-4x+1=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\geq-\frac{1}{3}$ và $y > 1$ thay vào vế trái của (4)

$y^2-\left(y+1\right)\frac{1}{3}=\left(y-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{13}{36}>\left(1-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{13}{36}=\frac{1}{3}$ lớn hơn. (0,25đ)

Do đó (4) vô nghiệm

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất x = 0 (0,25đ)

b_ (1,5đ) Giả sử $n^2+2014=k^2(k^2\in N)$
$\Leftrightarrow 2014=k^2-n^2 \Leftrightarrow 2014=(k+n)(k-n)$ (1) (0,5đ)

Suy ra (k + n) và (k – n) = 2k là số chẵn nên (k + n) và (k – n) cùng tính chẵn lẻ

Do 2014 là số chẵn nên (k + n) và (k – n) đều là số chẵn (0,5đ)

$\Rightarrow (k+n)(k-n)\vdots 4$

Khi đó từ (1) suy ra ta lại có $2014\vdots 4$ (điều này vô lí)

Vậy không có số nguyên n nào để n^2+2014 là số chính phương (0,5đ)

Bài 3:

a) (2đ) Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(m-2)x+(m-1)y=1$ đi qua điểm cố định $N(x_0;y_0)$ với mọi m là : (0,5đ)

$(m-2)x_0+(m-1)y_0=1$ với mọi m

$\Leftrightarrow mx_0-2x_0+my_0-y_0-1=0$ với mọi m

$\Leftrightarrow (x_0+y_0)m-(2x_0+y_0+1)=0$ với mọi m (0,75đ)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+y_0=0 \\ 2x_0+y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=1 \end{cases}$ (0,5đ)

Vậy các đường thẳng (1) luôn đi qua điểm cố định N(-1; 1) (0,25đ)

b) Điều kiện a, b, c $\neq 0$

Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ Suy ra (bc +ac +ab) (a+b+c) – abc = 0 (0,25đ)

$\Leftrightarrow$ (a+b) (b+c) (c+a) = 0 $\Leftrightarrow$ a+b =0 hoặc b+c=0 hoặc c+a=0 (0,5đ)

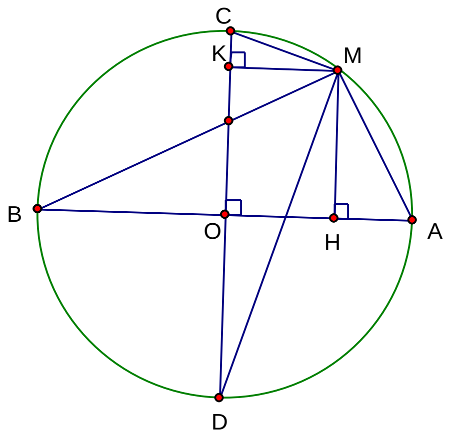
Nếu a+b =0 mà a+b+c =2013 nên c=2013

Nếu b+ c =0 mà a+b+c =2013nên a=2013

Nếu a+c=0 mà a+b+c =2013nên b=2013 (0,5đ)

Vậy 1 trong các số a, c , b bằng 2013 (0,25đ)

Bài 4:



(0,5đ)

a) Vì M thuộc (O) nên các tam giác: BMA và CMD vuông tại M nên:

$$\sin^2 MBA+\sin^2 MAB+\sin^2 MCD+\sin^2 MDC=$$

$$(\sin^2 MBA+\cos^2 MBA)+(\sin^2 MCD+\cos^2 MCD) = 1+1=2 \quad (1,5đ)$$

b) Chứng minh: $OK^2=AH(2R-AH)$

Thật vậy: KOHM là hình chữ nhật nên: OK = MH

Mà MH^2 = HA.HB (Hệ thức lượng trong tam giác vuông MAB có MH đường cao) (1đ)

và BH = AB – AH = 2R – AH

Suy ra:$OK^2=MH^2$=AH(2R-AH) (1đ)

c) P = MA. MB. MC. MD =AB.MH.CD.MK = $4R^2$.OH.MH (Vì MK = OH) (0,25đ)

Mà OH.MH$\leq \frac{OH^2+MH^2}{2}=\frac{OM^2}{2}=\frac{R^2}{2}$ (Pitago) (0,25đ)

Vậy $P\leq 4R^2.\frac{R^2}{2}=2R^4$. đẳng thức xẩy ra $\Leftrightarrow$ MH = OH (0,25đ)

$\Leftrightarrow$ OH=$\frac{R\sqrt{2}}{2}$ (0,25đ)

Bài 5:

Đặt x = b + c – a, y = a + c – b, z=a + b – c thì $x,y,z>0$`

Ta có $\begin{cases} b+c-a=x \\ a+c-b=y \\ a+b-c=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{z+y}{2} \\ b=\dfrac{x+z}{2} \\ c=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$ (0,25đ)

Vậy

$$P=\frac{2y+2z}{x}+\frac{9z+9x}{2y}+\frac{8x+8y}{z}$$

$$=\left(\frac{2y}{x}+\frac{9x}{2y}\right)+\left(\frac{2z}{x}+\frac{8x}{z}\right)+\left(\frac{9z}{2y}+\frac{8y}{z}\right)\geq 2\sqrt{9}+2\sqrt{16}+2\sqrt{36}=26$$ (0,25đ)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{2y}{x}=\dfrac{9x}{2y} \\ \dfrac{2z}{x}=\dfrac{8x}{z} \\ \dfrac{9z}{2y}=\dfrac{8y}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2=9x^2 \\ 2z^2=8x^2 \\ 9z^2=8y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{z}{2} \\ y=\dfrac{3}{2}x \\ z=\dfrac{4}{3}y \end{cases}$ (0,25đ)

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 26 khi và chỉ khi $\begin{cases} x=\dfrac{z}{2} \\ y=\dfrac{3}{2}x \\ z=\dfrac{4}{3}y \end{cases}$ (0,25đ)