ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9

ĐỀ SỐ 1

Câu 1: Với $\sqrt{(1-3x)^2} = 4$, ta có:

A) x = - 1 B) x = - $\frac{5}{3}$

C) $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{5}{3}$ D) $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{5}{3}$

Câu 2 : Biểu thức $\sqrt{\frac{x^2}{y}}, (y > 0)$ bằng biểu thức nào sau đây:

A) $\frac{x}{y}$ B) $\frac{|x|}{y}$

C) $\frac{|x|}{\sqrt{y}}$ D) - $\frac{|x|}{y}$

Câu 3: Rút gọn biểu thức: $\frac{-12}{1-a}\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{4}}$ với a > 1, được kết quả là:

A) 6 B) - 6 C) 6 (1 – a) D) Một kết qủa khác.

Câu 4: Rút gọn biểu thức $\frac{1-a^2}{48}\sqrt{\frac{36}{(a-1)^2}}$ với a < 1, được kết quả là:

A) $\frac{1}{8}$ B) - $\frac{1}{8}$

C) $\frac{1}{8}(1 + a)$ D) $\frac{1}{8}(1 - a^2)$

Câu 5: Rút gọn biểu thức E = $\frac{a-b}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a.b}{(a-b)^2}}$ với 0 < a < b, được kết quả là:

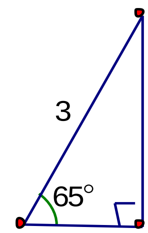
A) E = $\sqrt{b}$ B) E = - $\sqrt{b}$

C) E = - a$\sqrt{b}$ D) E = a$\sqrt{b}$

Câu 6: Cho biểu thức $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$. Điều kiện xác định của biểu thức là:

A) x > 4 B) x > 0 và $x \neq 4$

C) $x \geq 0$ D) $x \geq 0$ và $x \neq 4$



Câu 7: Cho hình vẽ bên có cạnh huyền dài 3cm, góc nhọn 65^0

Độ dài cạnh góc vuông kề với góc 65^0 gần bằng giá trị nào sau đây

A) 1cm B) 2cm C) 1,2 cm D) 1,27cm.

Câu 8: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^0$, AH vuông góc với BC, sinB = 0,6.

Kết quả nào sau đây là sai**:**

A) cos C = $\dfrac{AH}{AC}$ B) cos C = sin $\widehat{HAC}$

C) cos C = 0,6 D) cos C = $\dfrac{CH}{AC}$

II. PHẦN TỰ LUẬN: *16,0 điểm*

Bài 1: (2,0 điểm)

Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in N$ và n > 1 không phải là số chính phương

Bài 2: (4,0 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \dfrac{y\sqrt{x-1}+x\sqrt{y-4}}{xy}$

Bài 3: (4,0 điểm)

Chứng minh rằng nếu $\dfrac{x^2-yz}{x(1-yz)} = \dfrac{y^2-xz}{y(1-xz)}$ với $x \neq y, yz \neq 1, xz \neq 1, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

thì $x+y+z = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho AB là đường kính của đường tròn (O; R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC; OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) tại M; MB cắt CH tại K.

a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O; R).

c) Chứng minh K là trung điểm của CH

d) Xác định vị trí của điểm C để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÙ NINH

HD CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC 2016-2017

Môn: Toán

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM: 4,0 điểm. *Đúng mỗi câu được 0,5 điểm*

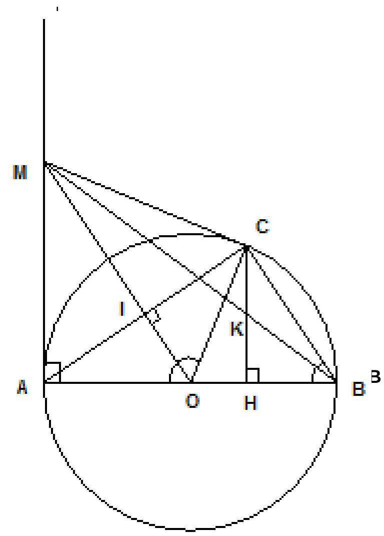
Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	D	C	A	C	A	D	D	A

II. PHẦN TỰ LUẬN: *16,0 điểm*

Bài 1: Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in N$ và $n > 1$ không phải là số chính phương

Bài	Gợi ý	Điểm
1	$n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2.(n^4 - n^2 + 2n + 2)$ $= n^2.[n^2(n - 1)(n + 1) + 2(n + 1)]$ $= n^2[(n + 1)(n^3 - n^2 + 2)]$ $= n^2(n + 1).[(n^3 + 1) - (n^2 - 1)]$ $= n^2(n+1)^2.(n^2 - 2n + 2)$ Với $n \in N$, $n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1 > (n - 1)^2$ và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n - 1) < n^2$ Vậy $(n - 1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow$ $n^2 - 2n + 2$ không phải là một số chính phương	0,5 0,5 0,5 0,5
2	Với điều kiện $x \ge 1, y \ge 4$ ta có: M = $\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-4}}{y}$ Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, Ta có: $\sqrt{x-1} = \sqrt{1(x-1)} \le \frac{1+x-1}{2} = \frac{x}{2}$ $\Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} \le \frac{1}{2}$ (vì x dương) Và: $\sqrt{y-4} = \frac{1}{2}\sqrt{4(y-4)} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{4+y-4}{2} = \frac{y}{4}$	0,25 0,5 0,5 0,5 0,75

	$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{y-4}}{y} \le \dfrac{1}{4}$ (vì y dương) Suy ra: M = $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x} + \dfrac{\sqrt{y-4}}{y} \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ Vậy giá trị lớn nhất của M là $\dfrac{3}{4}$ $\Leftrightarrow$ x = 2, y = 8	0,5 0,5 0,5
3	$\dfrac{x^2 - yz}{x(1-yz)} = \dfrac{y^2 - xz}{y(1-xz)}$ $\Leftrightarrow (x^2 - yz)(y - xyz) = (y^2 - xz)(x - xyz)$ $\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 - xy^2 + xy^3z + x^2z - x^2yz^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2y - xy^2) - (x^3yz - xy^3z) + (x^2z - y^2z) - (x^2yz^2 - xy^2z^2) = 0$ $\Leftrightarrow xy(x-y) - xyz(x^2 - y^2) + z(x^2 - y^2) - xyz^2(x-y) = 0$ $\Leftrightarrow (x-y)\left[xy - xyz(x+y) + z(x+y) - xyz^2\right] = 0$ $\Leftrightarrow xy - xyz(x+y) + z(x+y) - xyz^2 = 0$ (vì $x \ne y \Rightarrow x - y \ne 0$) $\Leftrightarrow xy + xz + yz = xyz(x+y) + xyz^2$ $\Leftrightarrow \dfrac{xy + xz + yz}{xyz} = \dfrac{xyz(x+y) + xyz^2}{xyz}$ (vì $xyz \ne 0$) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = x + y + z$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

4	Hình vẽ a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn Chứng minh $OI \perp AC \Rightarrow \Delta OIC$ vuông tại I => I thuộc đường tròn đường kính OC. $CH \perp AB(gt) \Rightarrow \Delta CHO$ vuông tại H => H thuộc đường tròn đường kính OC. => I, H cùng thuộc đường tròn đường kính OC. Hay 4 điểm C, I, H, O cùng thuộc một đường tròn đường kính OC.		1,5
	b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O, R) - Chứng minh $AOM = COM$ - Chứng minh $\Delta AOM = \Delta COM$ - Chứng minh $MC \perp CO$ $\Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của (O, R)		1,5
	c) Chứng minh K là trung điểm của CH ΔMAB có KH // MA (vì cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \frac{KH}{AM} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow KH = \frac{AM.HB}{AB} = \frac{AM.HB}{R}$ (1) Chứng minh CB // MO $\Rightarrow AOM = CBH$ (đồng vị) Chứng minh $\Delta MAO \sim \Delta CHB \Rightarrow \frac{MA}{CH} = \frac{AO}{HB} \Rightarrow CH = \frac{AM.HB}{AO} = \frac{AM.HB}{R}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$CH = 2CK $\Rightarrow$ CK = KH $\Rightarrow$ K là trung điểm của CH.		1,5

	d) Xác định vị trí của điểm C để chu vi tam giác ACB đạt GTLN? Tìm GTLN đó? Chu vi tam giác ACB là: $P_{\Delta ACB} = AB + AC + CB = 2R + AC + BC$ Ta lại có: $\left(AC - CB\right)^2 \geq 0 \Rightarrow AC^2 + BC^2 \geq 2AC.BC \Rightarrow 2\left(AC^2 + BC^2\right) \geq \left(AC + CB\right)^2$ $\Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2\left(AC^2 + CB^2\right)} \Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2AB^2}$ (định lý Pi -Ta - Go) $\Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2.4R^2} \Rightarrow AC + CB \leq 2R\sqrt{2}$ Đẳng thức xảy ra khi AC = CB $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa cung AB. Suy ra $P_{\Delta ACB} \leq 2R + 2R\sqrt{2} = 2R\left(1 + \sqrt{2}\right)$ Dấu bằng xảy ra khi M là điểm chính giữa cung AB. Vậy $MaxP_{\Delta CAB} = 2R\left(1 + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa cung AB	1,5

ĐỀ SỐ 2

Câu 1. (4,0 điểm):

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2} - 2\right) : \dfrac{1}{x - 1}$

1) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.

2) Rút gọn biểu thức A.

3) Tìm giá trị của x để $\dfrac{2}{A}$ là số tự nhiên.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2 - 10x + 27 = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 4}$

2) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

Câu 3. (4,0 điểm):

Cho hai đường thẳng: y = x + 3 (d_1); y = 3x + 7 (d_2)

1) Gọi A và B lần lượt là giao điểm của (d_1) và (d_2) với trục Oy. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

2) Gọi J là giao điểm của (d_1) và (d_2). Tam giác OIJ là tam giác gì? Tính diện tích của tam giác đó.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho đường tròn (O;R) đường kính AB. Gọi M là điểm nằm giữa A và B. Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB, lấy điểm E đối xứng với A qua M.

1) Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao?

2) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Chứng minh rằng:

$$\frac{HM}{HK} \cdot \frac{MK}{MC} = \frac{CD}{4R}$$

3) Gọi C' là điểm đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng C' nằm trên một đường tròn cố định khi M di chuyển trên đường kính AB (M khác A và B).

Câu 5. (2,0 điểm)

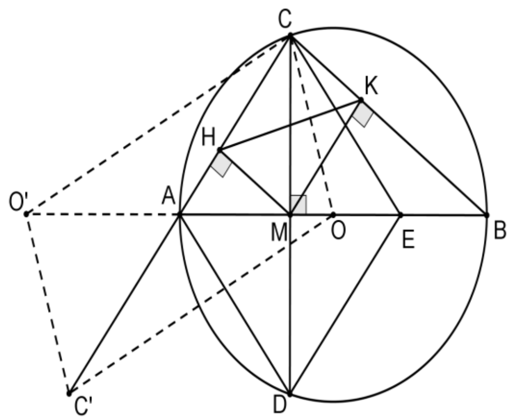
Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn: a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{c+ab}{a+b} + \frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ac}{a+c} \geq 2$$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9

Câu	Ý	Lời giải	Điểm
1	1	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$	0,5
	2	$A = \left(\dfrac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2} - 2 \right) : \dfrac{1}{x - 1}$ $= \dfrac{x + 3\sqrt{x} + 2}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} \cdot (x - 1)$ $= \dfrac{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} \cdot \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)$ $= \left(\sqrt{x} + 1\right)^2$	0,5 0,5 0,5 0,5
	3	Với điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ Ta có: A = $\left(\sqrt{x} + 1\right)^2$ Vì A = $\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 \geq 1$ với mọi x $\geq$ 0 nên 0 $\leq$ $\dfrac{2}{\left(\sqrt{x} + 1\right)^2} \leq 2$ Do đó: $\dfrac{2}{A} = \dfrac{2}{\left(\sqrt{x} + 1\right)^2} \in \mathbb{N}$ khi $\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 = 1$ hoặc $\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 = 2$ Mà $\sqrt{x} + 1 > 0$ nên $\sqrt{x} + 1 = 1$ hoặc $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2}$ Do đó: $x = 0$ hoặc $x = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ Vậy $\dfrac{2}{A}$ là số tự nhiên khi $x = 0$ hoặc $x = 3 - 2\sqrt{2}$	 0,5 0,5 0,5
2	1	Giải phương trình: $x^2 - 10x + 27 = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 4}$ Điều kiện: $4 \leq x \leq 6$	0,5

		$VT=x^2-10x+27=(x-5)^2+2\ge 2$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=5$ $VP=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}\le\sqrt{(1^2+1^2)\left[\left(\sqrt{6-x}\right)^2+\left(\sqrt{x-4}\right)^2\right]}\Leftrightarrow VP\le 2$, Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{6-x}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\Rightarrow 6-x=x-4\Leftrightarrow x=5$ $VT=VP\Leftrightarrow x=5$(TMĐK). Vậy nghiệm của phương trình là $x=5$	0,5 0,5 0,5
	2	Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\frac{x+1}{x^2+x+1}$ Ta có: $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ $A=\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+1-x^2}{x^2+x+1}=1-\frac{x^2}{x^2+x+1}\le 1$ (vì $\frac{x^2}{x^2+x+1}\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$) Đẳng thức xảy ra khi x = 0, suy ra: maxA = 1 khi x = 0 $A=\frac{x+1}{x^2+x+1}\Rightarrow 3A=\frac{3x+3}{x^2+x+1}=\frac{x^2+4x+4-\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}$ $=\frac{(x+2)^2}{x^2+x+1}-1\ge -1$ (vì $\frac{(x+2)^2}{x^2+x+1}\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$) Suy ra: $A\ge -\frac{1}{3}$, đẳng thức xảy ra khi $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$ Suy ra: minA = $-\frac{1}{3}$, khi $x=-2$	0,25 0,5 0,25 0,5 0,25 0,25
3	1	Tìm được A(0; 3); B(0; 7) Suy ra I(0; 5)	1,0 0,5
	2	Hoành độ giao điểm J của (d_1) và (d_2) là nghiệm của PT: x + 3 = 3x + 7 $\Rightarrow$x = – 2$\Rightarrow$$y_J$ = 1$\Rightarrow$J(-2;1)	0,5 0,5

		Suy ra: $OI^2 = 0^2 + 5^2 = 25$; $OJ^2 = 2^2 + 1^2 = 5$; $IJ^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ $\Rightarrow OJ^2 + IJ^2 = OI^2 \Rightarrow$ tam giác OIJ là tam giác vuông tại J $\Rightarrow S_{\Delta OIJ} = \frac{1}{2}OI.OJ = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20} = 5$ (đvdt)	0,5 0,5
4			
	1	Vì CD $\perp$ AB $\Rightarrow$ CM = MD Tứ giác ACED có AE cắt CD tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành Mà AE $\perp$ CD $\Rightarrow$ tứ giác ACED là hình thoi	0,5 0,5 0,5 0,5
	2	Vì tam giác ABC có AB là đường kính (O) nên ΔABC vuông tại C, suy ra tứ giác CHMK là hình chữ nhật Áp dụng hệ thức lượng vào các tam giác vuông ta có: $MH.AC = MA.MC \Rightarrow MH = \dfrac{MA.MC}{AC}$ Tương tự ta có: $MK = \dfrac{MB.MC}{BC}$ $\Rightarrow MH.MK = \dfrac{MA.MB.MC^2}{AC.BC}$ Mà $MA.MB = MC^2$; $AC.BC = MC.AB$ (do ΔABC vuông tại C) $\Rightarrow MH.MK = \dfrac{MC^2.MC^2}{MC.AB} = \dfrac{MC^3}{AB} \Rightarrow \dfrac{MH.MK}{MC^2} = \dfrac{MC}{AB}$ Mà MC = MK (do CHMK là hình chữ nhật)	0,5 0,5 0,5

		$\Rightarrow \frac{MH.MK}{HK.MC} = \frac{MC}{AB} = \frac{2MC}{2AB} = \frac{CD}{4R}$ Vậy: $\frac{HM}{HK} \cdot \frac{MK}{MC} = \frac{CD}{4R}$ (đpcm)	0,5
	3	Lấy O' đối xứng với O qua A, suy ra O' cố định. Tứ giác COC'O' là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm A của mỗi đường. Do đó O'C' = OC = R không đổi Suy ra C' nằm trên đường tròn (O';R') cố định khi M di chuyển trên đường kính AB.	0,5 0,5 0,5 0,5
5		Vì a + b + c = 1 nên c + ab = c(a + b + c) + ab = (c + a)(c + b) a + bc = a(a + b + c) + bc = (b + a)(b + c) b + ac = b(a + b + c) + ac = (a + b)(a + c) nên BĐT cần chứng minh tương đương với: $\frac{(c+a)(c+b)}{a+b} + \frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} \geq 2$ $\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{(b+a)(b+c)}{a+c}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}\right)^2} \geq 2$ Mặt khác dễ thấy: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, với mọi x, y, z (*) Áp dụng (*) ta có: $VT \geq b + c + a + b + c + a = 2$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b =c = $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ đpcm	 0,5 0,5 0,5 0,5