ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12
ĐỀ SỐ 1

Câu 1: (5,0 điểm)

a. Giải phương trình sau trên tập số thực: $x+1=(2x+1)\sqrt{\sqrt{x+1}+2}$.

b. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+y=8 \\ xy\left(y^2+xy+x+y\right)=12 \end{cases}$.

Câu 2: (5,0 điểm)

a. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;2), B(4;3)$. Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $AMB=45^0$.

b. Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng $6cm$, trọng tâm là G. Một đường thẳng Δ đi qua G, Δ cắt các đoạn thẳng AB và AC lần lượt tại hai điểm M và N sao cho $2AM=3AN$. Tính diện tích tam giác AMN.

Câu 3: (4,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=1$ và $u_{n+1}=u_n+2^n$ với mọi $n\geq 1$.

a. Chứng minh rằng: $u_n=2^n-1$.

b. Tính tổng $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ theo n.

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho các số thực dương a,b,c.

a. Chứng minh rằng: $\left(2+a^2\right)\left(2+b^2\right)\geq \frac{9}{16}\left[2(a+b)^2+7\right]$.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)}{(3+a+b+c)^2}.$$

Câu 5: (3,0 điểm)

Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x+2y=0$.

------ Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.
Họ và tên thí sinh:………………………………………;Số báo danh:…………

Hướng dẫn

Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

Câu	Đáp án	Thang điểm
1 **(5,0 điểm)**	**a. (2,5 điểm)**	
	Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$. Đặt $y = \sqrt{\sqrt{x+1}+2}$ ($y > \sqrt{2}$), ta thu được hệ $\begin{cases} x+1+y = 2(x+1)y \\ y^2 - \sqrt{x+1} = 2 \end{cases}$	**0,25** **0,25**
	Suy ra $x+1+y = \left(y^2 - \sqrt{x+1}\right)(x+1)y$ $\Leftrightarrow \left(y\sqrt{x+1}+1\right)\left(y+x+1-y^2\sqrt{x+1}\right) = 0$	**0,25** **0,25**
	$\Leftrightarrow \left(y\sqrt{x+1}+1\right)\left(y-2\sqrt{x+1}\right) = 0$ $\Leftrightarrow y = 2\sqrt{x+1}$	**0,25** **0,25**
	Do vậy $\sqrt{\sqrt{x+1}+2} = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{-15+\sqrt{33}}{32}$.	**0,5**
	Thay vào, thử lại thấy $x = \frac{-15+\sqrt{33}}{32}$ thỏa mãn. Đáp số: $x = \frac{-15+\sqrt{33}}{32}$.	**0,25** **0,25**
	b. (2,5 điểm)	
	Đặt $u = x(x+y), v = y(y+1)$, hệ trở thành: $\begin{cases} u+v = 8 \\ u.v = 12 \end{cases}$	**0,5**
	Giải hệ tìm được $\begin{cases} u = 2 \\ v = 6 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u = 6 \\ v = 2 \end{cases}$	**0,25 + 0,25**
	Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 6 \end{cases}$ ta tìm được: $\begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y = -3 \end{cases}$	**0,25 + 0,25**

	Với $\begin{cases} u=6 \\ v=2 \end{cases}$ ta tìm được: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1\pm\sqrt{7} \\ y=-2 \end{cases}$	**0,25** **0,25**
	Kết luận : Hệ đã cho có các nghiệm $\begin{cases} x=-1\pm\sqrt{3} \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \\ y=-3 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1\pm\sqrt{7} \\ y=-2 \end{cases}$	**0,5**
2 (5,0 điểm)	**a. (2,5 điểm)**	
	Gọi $I(x;y)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB. Ta có: $\begin{cases} AI=BI \\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI}=0 \end{cases}$	**0,25 + 0,25**
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=10 \\ x^2+y^2-5x-5y+10=0 \end{cases}$	**0,25 + 0,25**
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$	**0,25 + 0,25**
	• Với $I(3;1)$ thì $IA=\sqrt{5}$. Đường tròn tâm I bán kính IA có phương trình $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ cắt trục hoành tại hai điểm $M_1(1;0)$ và $M_2(5;0)$.	**0,5**
	• Với $I(2;4)$ thì $IA=\sqrt{5}$. Đường tròn tâm I, bán kính IA không cắt trục hoành.	**0,5**
	b. (2,5 điểm)	
	Đặt $AM=x, AN=y$ với $x>0, y>0$. $S_{AMG}=\dfrac{1}{2}AM.AG.\sin 30^0=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $S_{ANG}=\dfrac{1}{2}AN.AG.\sin 30^0=\dfrac{y\sqrt{3}}{2}$	**0,25 + 0,25**
	$S_{AMN}=\dfrac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0=\dfrac{xy\sqrt{3}}{4}$, $S_{AMN}=S_{AMG}+S_{ANG}$	**0,25 + 0,25**
	Nên ta có: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+y)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy \Leftrightarrow 2(x+y)=xy$. Vậy ta có hệ : $\begin{cases} 2(x+y)=xy \\ 2x=3y \end{cases}$	**0,25** **0,25**
	Giải hệ tìm được $\begin{cases} x=5cm \\ y=\dfrac{10}{3}cm \end{cases}$	**0,5**
	Diện tích cần tìm: $S_{AMN}=\dfrac{xy\sqrt{3}}{4}=\dfrac{25\sqrt{3}}{6}\ cm^2$	**0,5**

Câu	Đáp án	Thang điểm
3 (4,0 điểm)	**a. 2,0 điểm**	
	Khi $n=1$: $u_2=u_1+2^1=1+2=2^2-1$ đúng.	**0,5**
	Giả sử $u_k=2^k-1$ đúng với $k\ge 1, k\in N$.	**0,5**
	Ta chứng minh: $u_{k+1}=2^{k+1}-1$	**0,5**
	Thật vậy: $u_{k+1}=u_k+2^k=2^k-1+2^k=2^{k+1}-1$	**0,5**
	b. 2,0 điểm	
	$S=\left(2^1-1\right)+\left(2^2-1\right)+...+\left(2^n-1\right)=2^1+2^2+...+2^n-n$	**0,5 + 0,5**
	$S=2.\dfrac{2^n-1}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$	**0,5 + 0,5**
4 (3,0 điểm)	**a. 1,5 điểm**	
	Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương: $14a^2+14b^2+16a^2b^2-36ab+1\ge 0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow 14(a-b)^2+(4ab-1)^2\ge 0$ đúng	**0,5**
	Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{2}$	**0,5**
	b. 1,5 điểm	
	Đặt $t=a+b$, ta có: $\dfrac{16P}{9}\ge\dfrac{(2t^2+7)(c^2+2)}{(3+t+c)^2}$	**0,5**
	$\dfrac{(2t^2+7)(c^2+2)}{(3+t+c)^2}=1+\dfrac{2\left(tc-\frac{1}{2}\right)^2+3(t-1)^2+6\left(c-\frac{1}{2}\right)^2}{(3+t+c)^2}\ge 1$	**0,25 + 0,25**
	Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{9}{16}$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$	**0,25 + 0,25**
5 (3,0 điểm)	$y'=mx^2+2(m-1)x+4-3m$. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2	**0,25 + 0,25**
	Ta tìm $m: mx^2+2(m-1)x+4-3m=2$ $(*)$ có đúng một nghiệm âm	**0,5**
	$(*)\Leftrightarrow(x-1)(mx+3m-2)=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $mx=2-3m$	**0,25 + 0,25**
	$m=0$: không thỏa yêu cầu	**0,5**
	$m\ne 0$, yêu cầu bài toán xảy ra khi $\dfrac{2-3m}{m}<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$	**0,25 + 0,25**
	Kết luận: $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$	**0,5**

Đề số 2

Câu 1 (2 điểm)

1. Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C) và điểm M tùy ý thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận tại A và B. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Chứng minh tam giác IAB có diện tích không phụ thuộc vị trí điểm M.
2. Tìm *m* để hàm số $y=9x+m\sqrt{x^2+9}$ có cực đại.

Câu 2 (2 điểm)

c. Giải phương trình $\sin^{2012}x+\cos^{2012}x=\frac{1}{2^{1005}}$

d. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2-1} \\ x^2+y^2-xy=1 \end{cases}$

Câu 3 (2 điểm)

1. Chứng minh $\tan x+\sin x\ge\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}(\sqrt{3}-\pi),\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó suy ra trong mọi tam giác nhọn *ABC* ta có $\tan A+\tan B+\tan C+\sin A+\sin B+\sin C\ge\frac{9\sqrt{3}}{2}$.
2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}-\sqrt{16-x^2}$.

Câu 4 (3 điểm)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*, SA = $a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D' theo *a*.
2. *M* và *N* là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh *BC* và *DC* sao cho $MAN=45^0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp *S.AMN*.

Câu 5 (1 điểm)

Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh

$$\frac{a^2+ab+1}{\sqrt{a^2+3ab+c^2}}+\frac{b^2+bc+1}{\sqrt{b^2+3bc+a^2}}+\frac{c^2+ca+1}{\sqrt{c^2+3ca+b^2}}\ge\sqrt{5}(a+b+c)$$

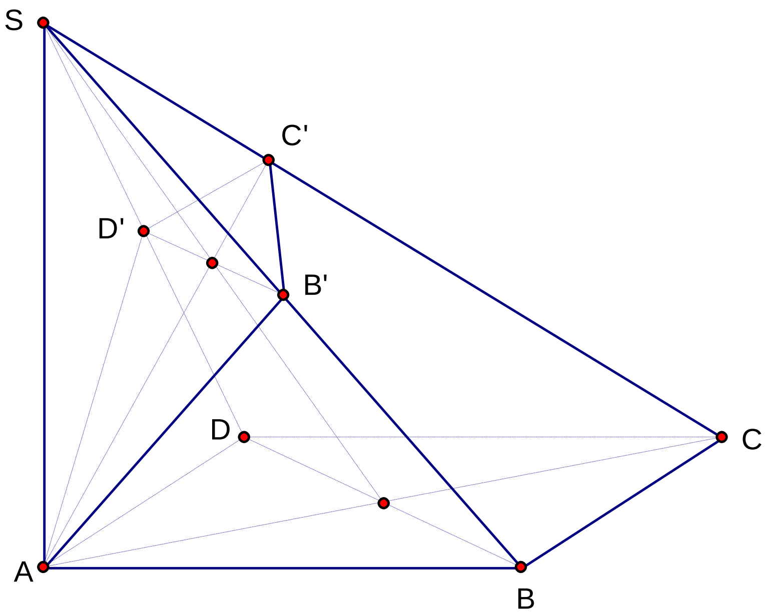
ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2011 – 2012

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
I	**1**	CM tam giác IAB có diện tích không phụ thuộc vị trí điểm M	**1,00**
		$M \in (C) \Rightarrow M\left(a; \dfrac{a-2}{a+1}\right), a \neq -1$. $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(a) = \dfrac{3}{(a+1)^2}$	0,25
		Tiếp tuyến của (C) tại M có pt $y = \dfrac{3}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{a-2}{a+1}$ (Δ) Tiệm cận đứng Δ_1 có phương trình $x = -1$ Tiệm cận ngang Δ_2 có phương trình $y = 1 \Rightarrow I(-1;1)$	0,25
		$\Delta \cap \Delta_1 = A \Rightarrow A\left(-1; \dfrac{a-5}{a+1}\right)$, $\Delta \cap \Delta_2 = B \Rightarrow B(2a+1;1)$	0,25
		$S_{IAB} = \dfrac{1}{2} IA.IB = \dfrac{1}{2}\left\|\dfrac{a-5}{a+1} - 1\right\|.\|2a+2\| = \dfrac{1}{2}.\dfrac{6}{\|a+1\|}.2\|a+1\| = 6$ (không phụ thuộc vào a, đpcm)	0,25
	2	Tìm m để hàm số $y = 9x + m\sqrt{x^2+9}$ có cực đại	**1,00**
		TXĐ: $\mathbb{R}$, $y' = 9 + \dfrac{mx}{\sqrt{x^2+9}}, y'' = \dfrac{9m}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$ $y' = 0 \Leftrightarrow 9\sqrt{x^2+9} + mx = 0 \Leftrightarrow 9\sqrt{x^2+9} = -mx \Leftrightarrow$ $\begin{cases} mx < 0 \\ 81(x^2+9) = m^2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx < 0 \\ (m^2-81)x^2 = 81.9 \end{cases}$ (I)	0,25
		TH 1. $m^2 \leq 81 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq 9 \Rightarrow \|m\|.\|x\| \leq 9\|x\| < 9\sqrt{x^2+9} (\forall x)$ nên $y' = \dfrac{9\sqrt{x^2+9} + mx}{\sqrt{x^2+9}} > 0, \forall x$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị.	0,25
		TH 2. $m > 9 \Rightarrow (I) \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-27}{\sqrt{m^2-81}}$ $y''(x_1) = \dfrac{9m}{(x_1^2+9)\sqrt{x_1^2+9}} > 0 \Rightarrow x_1$ là điểm cực tiểu $\Rightarrow m > 9$ loại	0,25
		TH 3. $m < -9 \Rightarrow (I) \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{27}{\sqrt{m^2-81}}$ $y''(x_2) = \dfrac{9m}{(x_2^2+9)\sqrt{x_2^2+9}} < 0 \Rightarrow x_2$ là điểm cực đại. Vậy hàm số có cực đại $\Leftrightarrow m < -9$	0,25
II	**1**	Giải phương trình $\sin^{2012} x + \cos^{2012} x = \dfrac{1}{2^{1005}}$ (1)	**1,00**
		Đặt $t = \sin^2 x, t \in [0;1]$. (1) có dạng: $t^{1006} + (1-t)^{1006} = \dfrac{1}{2^{1005}}$ (2)	0,25

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td>Xét hàm số $f(t)=t^{1006}+(1-t)^{1006}, t\in[0;1]$
$f'(t)=1006[t^{1005}-(1-t)^{1005}]$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$f(0)=f(1)=1, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{1005}}\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(t)=\frac{1}{2^{1005}}$ Vậy (2) $\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>hay (1) $\Leftrightarrow$ $\sin^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} (k\in Z)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td>2</td><td>Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2-1} & (1)\\ x^2+y^2-xy=1 & (2)\end{cases}$</td><td>1,00</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>ĐK: $|y|\ge 1$. (1) $\Leftrightarrow x-y=\sqrt{y^2-1}-\sqrt{x^2+1}$
$\Rightarrow x^2-2xy+y^2=y^2-1+x^2+1-2\sqrt{(y^2-1)(x^2+1)}$
$\Leftrightarrow xy=\sqrt{(y^2-1)(x^2+1)}\Rightarrow x^2y^2=x^2y^2+y^2-x^2-1\Leftrightarrow x^2-y^2=-1$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Kết hợp với (2) ta được $\begin{cases} x^2-y^2=-1\\ x^2+y^2-xy=1\end{cases}\Rightarrow 2x^2-xy=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ y=2x\end{array}\right.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$x=0 \,\&\, (2)\Rightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=\pm 1$
$y=2x \,\&\, (2)\Rightarrow 3x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Thử lại ta có $x=0, y=1$ và $x=\frac{1}{\sqrt{3}}, y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ thỏa mãn hệ pt
Vậy hệ có 2 nghiệm như trên</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>III</td><td>1</td><td>Chứng minh $\tan x+\sin x-\frac{9}{2}x\ge\frac{3}{2}(\sqrt{3}-\pi), \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.</td><td>1,00</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Xét hàm số $f(x)=\tan x+\sin x-\frac{9}{2}x$ trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\cos x-\frac{9}{2}=\frac{2\cos^3 x-9\cos^2 x+2}{2\cos^2 x}=\frac{(2\cos x-1)(\cos^2 x-4\cos x-2)}{2\cos^2 x}$
Vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow 0<\cos x<1\Rightarrow(\cos^2 x-2)-4\cos x<0\Rightarrow f'(x)$ cùng dấu với $1-2\cos x$. Bảng biến thiên của $f(x)$
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\searrow$</td><td></td><td>$\nearrow$</td></tr>
</table></td><td>0,25

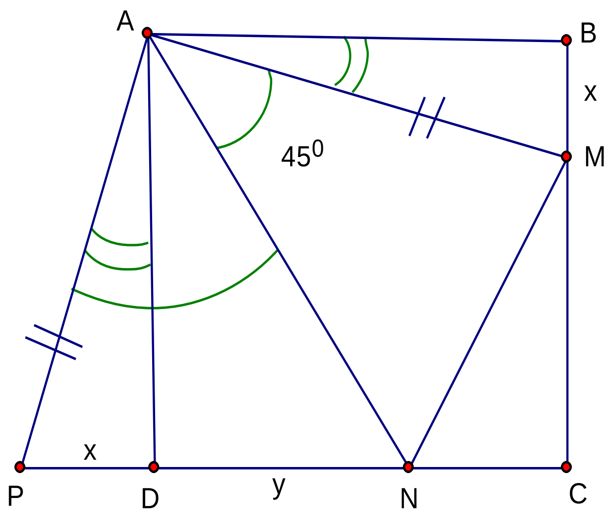
0,25</td></tr>
</table>

		$\frac{3}{2}(\sqrt{3}-\pi)$ Vậy $f(x)=\tan x+\sin x-\frac{9}{2}x\ge\frac{3}{2}(\sqrt{3}-\pi),\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{\pi}{3}$ Áp dụng: Tam giác ABC nhọn nên $A,B,C\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$ $\tan A+\sin A\ge\frac{9}{2}A+\frac{3}{2}(\sqrt{3}-\pi)$. Tương tự, cộng lại ta được $\tan A+\tan B+\tan C+\sin A+\sin B+\sin C\ge\frac{9}{2}(A+B+C)+\frac{9}{2}(\sqrt{3}-\pi)$ Kết hợp với $A+B+C=\pi$ ta có đpcm	0,25 0,25
	2	Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}-\sqrt{16-x^2}$	**1,00**
		TXĐ: $D=[-4;4]$. Đặt $t=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x},t\ge 0$. Bình phương ta được $t^2=8+2\sqrt{(x+4)(4-x)}\ge 8$. Dấu bằng có khi x=±4 Mặt khác theo BĐT Cô-si ta có $t^2=8+2\sqrt{(x+4)(4-x)}\le 8+(x+4)+(4-x)=16$.D bằng có khi x=0 Do $t\ge 0\Rightarrow 2\sqrt{2}\le t\le 4$ Khi đó $y=f(t)=t-\frac{t^2-8}{2}=-\frac{1}{2}t^2+t+4,t\in\left[2\sqrt{2};4\right]$ $f'(t)=-t+1, f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$ (loại) $f(2\sqrt{2})=2\sqrt{2}, f(4)=0$. Vậy $\min\limits_{[-4;4]}y=\min\limits_{[2\sqrt{2};4]}f(t)=0$ khi x=0, $\max\limits_{[-4;4]}y=\max\limits_{[2\sqrt{2};4]}f(t)=2\sqrt{2}$ khi x=±4	0,25 0,25 0,25 0,25
IV	**1**	Tính thể tích khối chóp S.AB’C’D’ theo *a*	**1,50**

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

$BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$
$SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp AB' \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$
Tương tự $AD' \perp SD$</td><td>0,25
0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'}$
$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{SB'.SB}{SB^2}.\frac{SC'.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2}.\frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{4}.\frac{3}{5} = \frac{9}{20}$ (1)
$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC} = \frac{SD'.SD}{SD^2}.\frac{SC'.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SD^2}.\frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{4}.\frac{3}{5} = \frac{9}{20}$ (2)</td><td>0,25
0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Do $V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Cộng (1) và (2) theo vế ta được
$\frac{V_{S.AB'C'}}{\frac{a^3\sqrt{3}}{6}} + \frac{V_{S.AD'C'}}{\frac{a^3\sqrt{3}}{6}} = \frac{9}{20} + \frac{9}{20} \Leftrightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{9}{10}.\frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{20}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>Tìm max và min của thể tích khối chóp S.AMN</td><td>1,50</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>(Hình vẽ trang cuối)
$V_{S.AMN} = \frac{1}{3}.S_{AMN}.a\sqrt{3}$. Đặt $BM = x, DN = y$; $x, y \in [0; a]$
Trên tia đối của tia DC lấy điểm P sao cho $DP = BM = x$
$\Delta ABM = \Delta ADP \Rightarrow AM = AP, BAM = DAP$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$MAN = 45^0 \Rightarrow BAM + DAN = 45^0 \Rightarrow NAP = DAP + DAN = 45^0$
$\Rightarrow \Delta MAN = \Delta PAN \Rightarrow S_{MAN} = S_{PAN} = \frac{1}{2}AD.PN = \frac{1}{2}a(x+y)$ (*)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông CMN ta được
$MN^2 = MC^2 + CN^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2$</td><td>0,25</td></tr>
</table>

		$x^2+y^2+2xy=a^2+x^2-2ax+a^2+y^2-2ay \Leftrightarrow xy+a(x+y)=a^2$ $\Leftrightarrow y=\dfrac{a^2-ax}{x+a}$	0,25
		Thế vào (*) ta được $S_{MAN}=\dfrac{1}{2}a(x+\dfrac{a^2-ax}{x+a})$ Đặt $f(x)=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x^2+a^2}{x+a}\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{a}{2}.\dfrac{x^2+2ax-a^2}{(x+a)^2}$ $f'(x)=0\Leftrightarrow x=(\sqrt{2}-1)a$.	0,25
		$f(0)=f(a)=\dfrac{a^2}{2},\ f((\sqrt{2}-1)a)=a^2(\sqrt{2}-1)$ $\Rightarrow \max\limits_{[0;a]} f(x)=\dfrac{a^2}{2},\ \min\limits_{[0;a]} f(x)=a^2(\sqrt{2}-1)$ Vậy $\max V_{S.AMN}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ khi $\left[\begin{array}{l} M\equiv B, N\equiv C \\ M\equiv C, N\equiv D\end{array}\right.$ $\min V_{S.AMN}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)a^3}{3}$ khi $MB=ND=a(\sqrt{2}-1)$	0,25
V		$\dfrac{a^2+ab+1}{\sqrt{a^2+3ab+c^2}}+\dfrac{b^2+bc+1}{\sqrt{b^2+3bc+a^2}}+\dfrac{c^2+ca+1}{\sqrt{c^2+3ca+b^2}}\ge\sqrt{5}(a+b+c)$	**1,00**
		$\forall x,y>0$ ta có $x^2+y^2\ge 2xy\Leftrightarrow x^2\ge 2xy-y^2\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y}\ge 2x-y$	0,25
		$\Rightarrow \dfrac{a^2+ab+1}{\sqrt{a^2+3ab+c^2}}=\sqrt{\dfrac{(a^2+ab+1)^2}{a^2+3ab+c^2}}\ge\sqrt{2(a^2+ab+1)-(a^2+3ab+c^2)}$ $=\sqrt{2+a^2-c^2-ab}\ge\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)+a^2-c^2-\dfrac{a^2+b^2}{2}}$	0,25
		$=\sqrt{\dfrac{5a^2+3b^2+2c^2}{2}}=\sqrt{\dfrac{(10)(a^2+a^2+a^2+a^2+a^2+b^2+b^2+b^2+c^2+c^2)}{20}}$ $\ge\dfrac{\sqrt{(a+a+a+a+a+b+b+b+c+c)^2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{5a+3b+2c}{2\sqrt{5}}$	0,25
		Tương tự, cộng lại ta được $\dfrac{a^2+ab+1}{\sqrt{a^2+3ab+c^2}}+\dfrac{b^2+bc+1}{\sqrt{b^2+3bc+a^2}}+\dfrac{c^2+ca+1}{\sqrt{c^2+3ca+b^2}}\ge\sqrt{5}(a+b+c)$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0,25



Đề số 3

Bài 1. ***(4,0 điểm).***

Cho hàm số $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là (C).

Tìm tất cả những điểm trên đồ thị (C) sao cho hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại những điểm đó là giá trị lớn nhất của hàm số: $g(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^4 + 1}$.

Bài 2. ***(5,0 điểm).***

Giải các phương trình sau trên tập số thực R:

1/ $\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4\cos 2x.\cos x - 2\cos^2 x + 2 = 0$.

2/ $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$.

Bài 3. ***(5,0 điểm).***

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác cân có AB = AC = a (a là một số thực dương) và mặt bên ACC'A' là hình chữ nhật có AA'=2a. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh B lên mặt phẳng (ACC') nằm trên đoạn thẳng A'C.

1/ Chứng minh thể tích của khối chóp A'.BCC'B' bằng 2 lần thể tích của khối chóp B.ACA'.

2/ Khi B thay đổi, xác định vị trí của H trên A'C sao cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích lớn nhất.

3/ Trong trường hợp thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' là lớn nhất, tìm khoảng cách giữa AB và A'C.

Bài 4. ***(3,0 điểm).***

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có A(1;1); B(–2;–4); C(5;–1) và đường thẳng $\Delta: 2x - 3y + 12 = 0$. Tìm điểm $M \in \Delta$ sao cho: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 5***(3 điểm).***

Cho m là số nguyên thỏa mãn: 0 < m < 2011. Chứng minh rằng $\frac{(m+2010)!}{m!2011!}$ là một số nguyên.

---------------------- HẾT ----------------------

3. Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
4. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh…………………….........………………… Số báo danh………....

ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

(gồm 4 trang)

A. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

<table>
<tr><th>Bài(ý)</th><th>Nội dung đáp án</th><th>Biểu điểm</th></tr>
<tr><td>Bài 1
(4 đ)</td><td>
* Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $g(x)=\dfrac{4x^2+3}{x^4+1}$
- Đặt $t = x^2$, với $t\ge 0$ ta có hàm số $g(t)=\dfrac{4t+3}{t^2+1}$;
- $g'(t)=\dfrac{-4t^2-6t+4}{(t^2+1)^2}$; g’(t) = 0 $\Leftrightarrow t=-2; t=\dfrac{1}{2}$;
- Ta lại có: $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t)=0$; $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$, bảng biến thiên của hàm số:
<table>
<tr><td>t</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>g’(t)</td><td>–</td><td>0 +</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr>
<tr><td>g(t)</td><td>0 ↘</td><td>–1 ↗</td><td>3 ↗</td><td>4</td><td>↘ 0</td></tr>
</table>
- Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $g(x)=4$, đạt được khi $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
* Tìm các điểm thuộc đồ thị (C)
- Ta có: y’ = $3x^2 - x$, giả sử điểm $M_0(x_0, f(x_0))\in(C)$, thì hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M_0 là $f'(x_0)=3x_0^2-x_0$
- Vậy: $3x_0^2-x_0=4$ suy ra $x_0 = -1$; $x_0 = \dfrac{4}{3}$, tung độ tương ứng $f(-1) = -\dfrac{3}{2}$; $f(\dfrac{4}{3}) = \dfrac{40}{27}$
+ Có hai điểm thỏa mãn giải thiết $(-1;-\dfrac{3}{2})$; $(\dfrac{4}{3};\dfrac{40}{27})$
</td><td>*0,75*

0,5

0,75

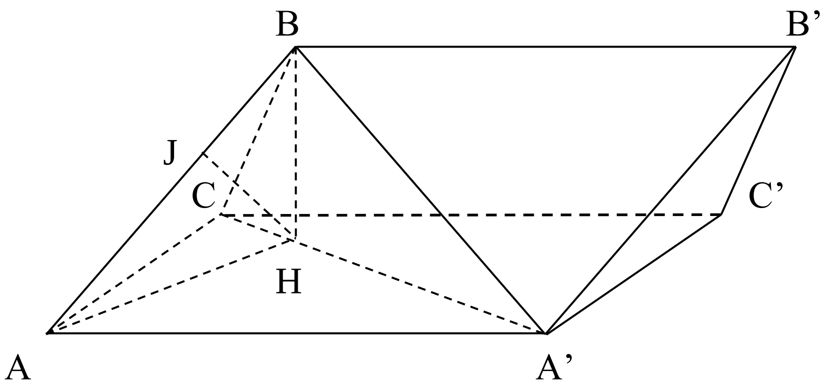
0,5

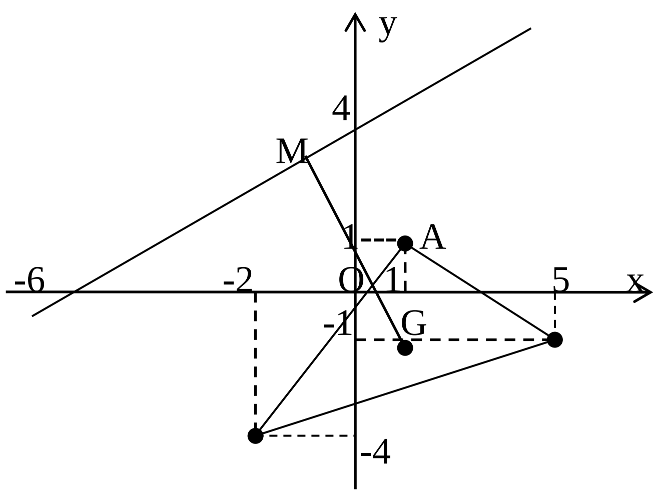
1,0

0,5</td></tr>
<tr><td>Bài 2
(5 đ)

1/
(2,5 đ)</td><td>
Phương trình $\Leftrightarrow$
$\cos x + 2\cos^2 x + \sqrt{3}.\sin x(2\cos x + 1) - 4\cos 2x.\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) = 0$.
$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x + 1)+\sqrt{3}.\sin x(2\cos x + 1)-2.\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow(2\cos x + 1)(\cos x + \sqrt{3}.\sin x - 2.\cos 2x) = 0$
Nếu: 1/ $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in Z$
2/ $\cos x + \sqrt{3}.\sin x - 2.\cos 2x = 0 \Leftrightarrow$
$\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos 2x \Leftrightarrow \cos(x-\dfrac{\pi}{3})=\cos 2x \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi; x=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}; k\in Z$
</td><td>*1,0*

0,5</td></tr>
</table>

	, - Nghiệm của pt là: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in Z$; $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi; x=\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}; k\in Z$	**0,5** **0,5**
2/ (2,5 đ)	- Phương trình $\Leftrightarrow x^4-2x^3+x^2-(x^2-x)-\sqrt{2(x^2-x)}=0$ $\Leftrightarrow (x^2-x)^2-(x^2-x)-\sqrt{2(x^2-x)}=0$ - Đặt $t=\sqrt{x^2-x}$, với $t\geq 0$ ta có phương trình: $t^4-t^2-\sqrt{2}t=0$; suy ra $t=0$; $t=\sqrt{2}$ - Với t = 0 thì x = 0; x = 1 - Với t = $\sqrt{2}$ thì x = –1; x = 2 Tóm lại phương trình có 4 nghiệm phân biệt: $\{-1;0;1;2\}$	***1,0*** ***0,75*** ***0,75***
Bài 3 (5 đ) **1/** **(1, 0 đ)**	 Gọi V là thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C', $V_{B.ACA'}$ là thể tích khối chóp B.ACA', - Ta có V = h.S_{ABC} (h là chiều cao của khối lăng trụ ABC.A'B'C'). - Ta có $V_{B.ACA'}=\frac{1}{3}h.S_{ABC}$. - Vậy V= 3.$V_{B.ACA'}$ hay $V_{A'.BCC'B'}=2.V_{B.ACA'}$	***1,0***
2/ (2 đ)	- Ta có V= 3.$V_{B.ACA'}$ Vậy V lớn nhất khi $V_{B.ACA'}$ lớn nhất, - Ta có: $V_{B.ACA'}=\frac{1}{3}S_{ACA'}.BH$ hay $V_{B.ACA'}=\frac{a^2}{3}BH$, mà $BH^2=AB^2-AH^2=a^2-AH^2$ – vậy BH lớn nhất khi AH nhỏ nhất tức là AH $\perp$ A'C $\Leftrightarrow CH=\frac{a}{\sqrt{5}}$	**0,5**

		1,5
3/ (2 đ)	- Trong mp(AHB) kẻ HJ $\perp$ AB, suy ra HJ là đường vuông góc chung của AB và A'C. - Trong ta giác vuông AHB ta H ta có: $\frac{1}{HJ^2}=\frac{1}{HA^2}+\frac{1}{HB^2}$, ta có: $HA^2=\frac{4a^2}{5}$; $HB^2=\frac{a^2}{5}$; suy ra: $HJ=\frac{2a}{5}$	***0,5*** ***1,5***
Bài 4 (3 đ)	- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có tọa độ của G là G($\frac{4}{3};-\frac{4}{3}$) - Khi đó: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|$, G và Δ cố định (G không nằm trên Δ), - Vậy $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ nhỏ nhất khi $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|$ nhỏ nhất, tức MG nhỏ nhất hay MG vuông góc với Δ. Do đó M là giao điểm của Δ và đường thẳng d qua G và vuông góc với Δ. - Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(3;2)$ đó cũng là 1 vec tơ pháp tuyến của d, vậy phương trình của d là: 3x + 2y – $\frac{4}{3}$ = 0, Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}2x-3y+12=0\\ 3x+2y-\frac{4}{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{20}{13}\\ y=\frac{116}{39}\end{cases}\quad\Rightarrow M(-\frac{20}{13};\frac{116}{39})$  	***0,5*** ***0,5*** ***0,5*** ***0,5*** ***1,0***
Bài 5 (3 đ)	Ta có: $C_{m+2010}^{2010}=\frac{(m+2010)!}{m!2010!}=\frac{2011}{m+2011}.\frac{(m+2011)!}{m!2011!}=\frac{2011}{m+2011}.C_{m+2011}^{2011}$	***1,0***

	Suy ra: $(m+2011)C_{m+2010}^{2010}$ = $2011.C_{m+2011}^{2011}$, tức là: $(m+2011)C_{m+2010}^{2010}$ chia hết cho 2011 (do C_{m+2010}^{2010} ; C_{m+2011}^{2011} là các số tự nhiên) Vì: 2011 là số nguyên tố và 0 < m < 2011 nên ƯCLN(m, 2011) = 1, từ đó: ƯCLN(m + 2011, 2011)= 1 Vậy $C_{m+2010}^{2010} \vdots 2011$ hay $\frac{(m+2010)!}{m!2011!}$ là số nguyên.	***1,0*** ***1,0***