ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 11

ĐỀ SỐ 1

Bài 1: a) Cho $\tan\frac{b}{2}=4\tan\frac{a}{2}$. Chứng minh: $\tan\frac{b-a}{2}=\frac{3\sin a}{5-3\cos a}$.

b) Chứng minh : $\frac{1}{\cos 290^0}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^0}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

c) $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{1}{64}\cos 8x+\frac{7}{16}\cos 4x+\frac{35}{64}$.

Bài 2: a) Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$2m\sin x+\cos x=m+1$. (m là tham số)

b)Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sqrt{5-2\cos^2 x.\sin^2 x}$

Bài 3 Giải các phương trình sau:

a) $\sin^6 x+3\sin^2 x\cos x+\cos^6 x=1$

b) $12\cos x+5\sin x+\frac{5}{12\cos x+5\sin x+14}+8=0$.

c) $\frac{1+cot2x.\tan x}{\cos^2 x}+1=6(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)$;

Bài 4: Tìm các giá trị α để phương trình:

$(\cos\alpha+3\sin\alpha-\sqrt{3})x^2+(\sqrt{3}\cos\alpha-3\sin\alpha-2)x+\sin\alpha-\cos\alpha+\sqrt{3}=0$ có nghiệm x =1.

Bài 5: a).Trong mặt phẳng 0xy ,cho vectơ $\vec{v}$=(-2;1), đường thẳng d có phương trình 2x –3y +3 =0 . Hãy xác định phương trình của d’ là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

b) Trong mặt phẳng 0xy , cho đường tròn (C) co phương trình : $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$=(-2;5).

HƯỚNG DẪN ĐÁP ÁN

Bài 1: a) Đặt $\tan\frac{a}{2}=t$ thì $\tan\frac{b}{2}=4t$,do đó : $\tan\frac{b-a}{2}=\frac{\tan\frac{b}{2}-\tan\frac{a}{2}}{1+\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}}=\frac{3t}{1+4t^2}$

Mặt khác : $\tan\frac{b-a}{2}=\frac{3\sin a}{5-3\cos a}=\frac{3\frac{2t}{1+t^2}}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{3t}{1+4t^2}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b)VT = $\frac{1}{\cos 70^0}-\frac{1}{\sqrt{3}\sin 70^0}=\frac{1}{\sin 20^0}-\frac{1}{\sqrt{3}\cos 20^0}$

$=\frac{\sqrt{3}\cos 20^0-\sin 20^0}{\sqrt{3}\sin 20^0\cos 20^0}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^0-\frac{1}{2}\sin 20^0\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^0}=\frac{4\sin 40^0}{\sqrt{3}\sin 40^0}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ (đpcm).

c) VT = $(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x=1-\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2=\ldots$

$=\frac{1}{64}\cos 8x+\frac{7}{16}\cos 4x+\frac{35}{64}$

Bài 2: a) Pt có nghiệm $\Leftrightarrow 4m^2+1\ge(m+1)^2\Leftrightarrow 3m^2-2m\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\le 0\\ m\ge\frac{2}{3}\end{array}\right.$

b) $5-2\cos^2 x\sin^2 x=5-\frac{1}{2}\sin^2 2x\quad\Rightarrow\quad\frac{9}{2}\le 5-\frac{1}{2}\sin^2 2x\le 5\quad\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{2}\le y\le\sqrt{5}$.

$\Rightarrow y_{\max}=\sqrt{5}\ khi\ x=k\frac{\pi}{2}\quad ;\ y_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ khi\ x=k\frac{\pi}{4}$

Bài 3: a) $\sin^6 x+3\sin^2 x\cos x+\cos^6 x=1$

$\Leftrightarrow(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)+3\sin^2 x\cos x=1$

$\Leftrightarrow -3\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos x=0$ giải phương trình này ta được nghiệm $x=\frac{k\pi}{2}$.

b)Đặt y = 12cosx +5 sinx + 14 ,ta có phương trình $y+\frac{5}{y}-6=0$ giải phương trình này ta được y =1vày =5. Do đó : $12\cos x+5\sin x+\frac{5}{12\cos x+5\sin x+14}+8=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}12\cos x+5\sin x+14=1\\ 12\cos x+5\sin x+14=5\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}12\cos x+5\sin x=-13 & (1)\\ 12\cos x+5\sin x=-9 & (2)\end{array}\right.$

Giải (1) và (2) ta được : $x=\alpha+\pi+k2\pi$; $x=\alpha\pm\arccos\left(-\frac{9}{13}\right)+k2\pi$ với $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ và $\sin\alpha=\frac{5}{13}$.

c)ĐK: $x\ne k\frac{\pi}{2}$; $\frac{1+\cot 2x.\tan x}{\cos^2 x}+1=6(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)\ \Leftrightarrow\frac{\cos x}{\sin 2x.\sin x.\cos^2 x}+1=6-3\sin^2 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 2x} = 5 - 3\sin^2 2x \Leftrightarrow 3t^2 - 5t + 2 = 0\ (t = \sin^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 2x = 1 \\ \sin^2 2x = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 2x = 0 \\ \cos 4x = -\frac{1}{3} = \cos\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\alpha}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\alpha}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Bài 4: x= 1 là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi ta có đẳng thức $\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha = 2$ hay $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Bài 5: a) Lấy M(0;1) thuộc d .Khi đó $M' = T_{\vec{v}}(M) = (-2;2) \in d'$. Vì d' song song với d nên d' có phương trình dạng : 2x-3y + C = 0 .Thay toạ độ M'vào pt d' ta được C =10 . Vậy phương trình d' : 2x –3y +10 =0.

b) Đường tròn (C) có tâm I (1;-2) ,R= 3.Gọi $I' = T_{\vec{v}}(I) = (-1;3)$ và (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thì (C') có tâm I' bán kính R'= 3 có pt : $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$

Đề số 2

Câu 1:***(3.0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\sin 3x + \cos 3x - 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{16}{3} \\ 2(x^2+y^2) + \dfrac{1}{(x+y)^2} + \dfrac{1}{(x-y)^2} = \dfrac{100}{9} \end{cases}$

Câu 2:***(2.0 điểm)* Cho dãy số (x_n) xác định như sau:**

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{30} \\ x_{n+1} = \sqrt{30x_n^2 + 3x_n + 2011}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Câu 3:***(3.0 điểm)***

Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (α) qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB lần lượt tại các điểm M, N, P, Q với $AM = x$, $AN = y$ $(0 < x, y < a)$.

a) Chứng minh MN, PQ, BC đồng qui hoặc song song và MNPQ là hình thang cân.

b) Chứng minh rằng: $a(x+y) = 3xy$. Suy ra: $\frac{4a}{3} \le x + y < \frac{3a}{2}$.

c) Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và $s = x + y$.

Câu 4:***(1.0 điểm)*** **Cho phương trình:** $ax^2 + (2b + c)x + (2d + e) = 0$ **có một nghiệm không nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng phương trình** $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ **có nghiệm.**

Câu 5:***(1.0 điểm)*** **Cho** $x, y, z > 0$ **. Chứng minh rằng:**

$$P = \frac{2xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{2yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{3zx}{(y+z)(y+x)} \geq \frac{5}{3}$$

--------------------HẾT----------------------

ĐỀ SỐ 3

Câu I (***2,0 điểm***)

1) Giải phương trình lượng giác $\sin^2 3x \cos 2x + \sin^2 x = 0.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2-x)(2+y) = 8 \\ x\sqrt{4-y^2} + y\sqrt{4-x^2} = 4. \end{cases}$

Câu II (***2,0 điểm***)

1) Cho *a, b, c* là ba hằng số và (u_n) **là dãy số được xác định bởi công thức:**

$$u_n = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ **khi và chỉ khi** $a + b + c = 0.$

2) Các số *a, b, c* (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số nhân có tổng bằng 26. Tìm các số đó, biết rằng: nếu một cấp số cộng có *a* là số hạng thứ nhất, *b* là số hạng thứ ba thì *c* là số hạng thứ chín.

Câu III (***2,0 điểm***)

1) Chứng minh rằng: với mọi số tự nhiên *n*, số $2^{3^n} + 1$ **chia hết cho** 3^{n+1} **nhưng không chia hết cho** 3^{n+2}.

2) Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra chỉ có mặt ba chữ số khác nhau.

Câu IV (***3,0 điểm***)

1) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. **Trên cạnh *AB* lấy điểm *M* khác *A* và *B*. Gọi (*P*) là mặt phẳng đi qua *M* và song song với mặt phẳng** (ACD').

a) Trình bày cách dựng thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (*P*).

b) Xác định vị trí của *M* để thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất.

2) Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành và *M* là trung điểm của *SC*. Một mặt phẳng (*P*) chứa *AM* và lần lượt cắt các cạnh *SB, SD* tại các điểm *B', D'* khác *S*. Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} \le \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \le \frac{3}{2}$**.**

Câu V (***1,0 điểm***)

Khảo sát tính chẵn - lẻ, tính tuần hoàn và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin\left(\pi\left|\sin x\right|\right)$.

--- HẾT ---

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Chữ ký của giám thị 1: .... Chữ ký của giám thị 2:.....................................