ĐỀ THI HOC SINH GỎI LỚP 11
ĐỀ SỐ 1

Câu 1 (*1,5 điểm*).

Giải phương trình: $\dfrac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2 x+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 2 (*3,0 điểm*).

1. Gọi *A* là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập *A*, tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1.
2. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\left(C_{2012}^{0}\right)^2-\left(C_{2012}^{1}\right)^2+\left(C_{2012}^{2}\right)^2-\left(C_{2012}^{3}\right)^2+\ldots-\left(C_{2012}^{2011}\right)^2+\left(C_{2012}^{2012}\right)^2=C_{2012}^{1006}.$$

Câu 3 (*2,5 điểm*).

1. Chứng minh rằng phương trình $8x^3-6x-1=0$ có ba nghiệm thực phân biệt. Hãy tìm 3 nghiệm đó.
2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1=\sin 1$; $u_n=u_{n-1}+\dfrac{\sin n}{n^2}$, với mọi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định như trên là một dãy số bị chặn.

Câu 4 (*3,0 điểm*).

1. Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng $3a$ ($a>0$). Hãy xác định điểm *O* sao cho *O* cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp *S.ABCD* và tính độ dài *SO* theo a.
2. Cho hình chóp *S.ABC* có đường thẳng *SA* vuông góc với mặt phẳng (*SBC*). Gọi *H* là hình chiếu của *S* lên mặt phẳng *(ABC)*. Chứng minh rằng đường thẳng *SB* vuông góc với đường thẳng *SC*, biết rằng $\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{SB^2}+\dfrac{1}{SC^2}$.
3. Cho tứ diện *ABCD* thỏa mãn điều kiện $AB=CD,\ BC=AD,\ AC=BD$ và một điểm *X* thay đổi trong không gian. Tìm vị trí của điểm *X* sao cho tổng $XA+XB+XC+XD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

—Hết—

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………..……………..………….…….; Số báo danh……………….

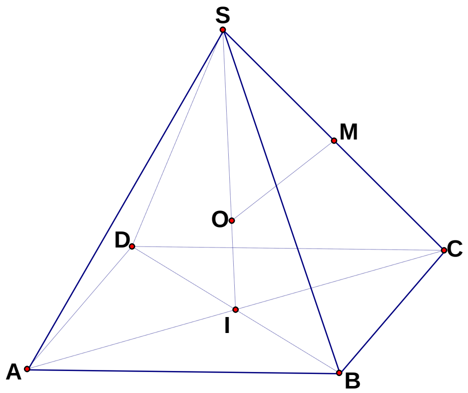
SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

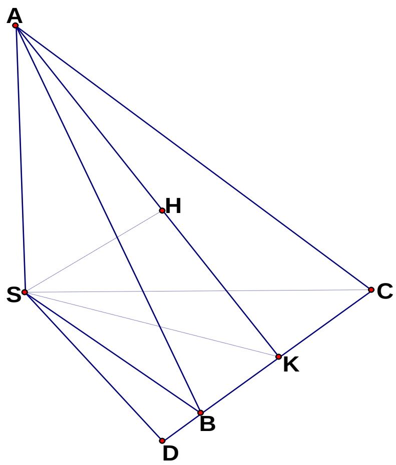
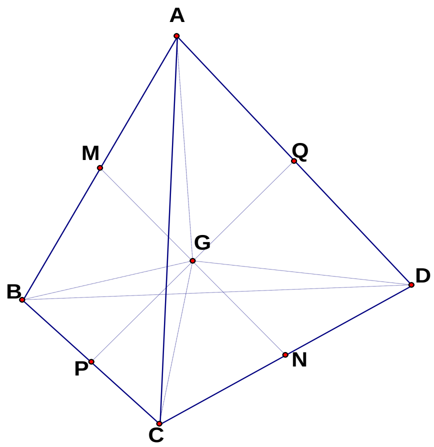
KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 THPT KHÔNG CHUYÊN
NĂM HỌC 2011-2012
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN

I. LƯU Ý CHUNG:
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Ý	Nội dung trình bày	Điểm
1		**1,5 điểm**	
		Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (*) Phương trình đã cho tương đương với: $2\cos^2 x(\tan^2 x + \tan x) = \sin x + \cos x$	0,25
		$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x.\cos x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$ $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\sin x - 1) = 0$	0,5
		+ Với $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	0,25
		+ Với $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$	0,25
		Đối chiếu điều kiện (*), suy ra nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,25
2	**1**	**1,5 điểm**	
		Số các số tự nhiên có 5 chữ số là $99999 - 10000 + 1 = 90000$ Giả sử số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là: $\overline{abcd1}$	0,5
		Ta có $\overline{abcd1} = 10.\overline{abcd} + 1 = 3.\overline{abcd} + 7.\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi $3.\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7. Đặt $3.\overline{abcd} + 1 = 7h \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2h + \frac{h-1}{3}$ là số nguyên khi và chỉ khi $h = 3t + 1$	0,5
		Khi đó ta được: $\overline{abcd} = 7t + 2 \Rightarrow 1000 \leq 7t + 2 \leq 9999$ $\Leftrightarrow \frac{998}{7} \leq t \leq \frac{9997}{7} \Leftrightarrow t \in \{143, 144, ..., 1428\}$ suy ra số cách chọn ra t sao cho số $\overline{abcd1}$ chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là 1286. Vậy xác suất cần tìm là: $\frac{1286}{90000} \approx 0,015$	0,5
	2	**1,5 điểm**	
		Xét đẳng thức $(1-x)^{2012}.(1+x)^{2012} = (1-x^2)^{2012}$	0,5
		+) Ta có $(1-x^2)^{2012} = \sum_{k=0}^{2012} C_{2012}^k (-x^2)^k$ suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2012} là C_{2012}^{1006}	0,5
		+) Ta có $(1-x)^{2012}.(1+x)^{2012} = \left(\sum_{k=0}^{2012} C_{2012}^k (-x)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{2012} C_{2012}^k x^k\right)$ suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2012} là	0,5

		$C_{2012}^{o}C_{2012}^{2012}-C_{2012}^{1}C_{2012}^{2011}+C_{2012}^{2}C_{2012}^{2010}-C_{2012}^{3}C_{2012}^{2009}+...+C_{2012}^{2012}C_{2012}^{2012}$ $=\left(C_{2012}^{0}\right)^2-\left(C_{2012}^{1}\right)^2+\left(C_{2012}^{2}\right)^2-\left(C_{2012}^{3}\right)^2+...-\left(C_{2012}^{2011}\right)^2+\left(C_{2012}^{2012}\right)^2$ Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.	
3	1	**1,5 điểm**	
		Đặt $f(x)=8x^3-6x-1$; tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có	0,25
		$f(-1)=-3,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=1,\ f(0)=-1,\ f(1)=1$ suy ra	0,5
		$f(-1)f\left(-\frac{1}{2}\right)<0,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)f(0)<0,\ f(0)f(1)<0$. Từ 3 bất đẳng thức này và tính liên tục của hàm số suy ra pt $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc $(-1;1)$.	0,25
		Đặt $x=\cos t,\ t\in[0;\pi]$ thay vào pt ta được: $2\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)=1\Leftrightarrow\cos 3t=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow t=\pm\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}$, kết hợp với $t\in[0;\pi]$ ta được $t\in\left\{\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}\right\}$. Do đó phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x=\cos\frac{\pi}{9},x=\cos\frac{5\pi}{9},x=\cos\frac{7\pi}{9}$.	0,5
	2	**1,0 điểm**	
		Nhận xét. Với mỗi số nguyên dương n ta có: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$ Thật vậy, ta có $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n-1)}=$ $=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$ suy ra nhận xét được chứng minh. Trở lại bài toán, từ công thức truy hồi ta được: $u_n=\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+...+\frac{\sin n}{n^2}$	0,5
		Ta có $u_n\le\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$ với mọi n (theo nhận xét trên) (1)	0,25
		Mặt khác $u_n\ge-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)>-2$ với mọi n (theo nhận xét trên) (2). Từ (1) và (2) suy ra dãy số đã cho bị chặn.	0,25
4	1	**1,0 điểm**	
		 Gọi $I=AC\cap BD$. Do $SA=SB=SC=SD$ nên các tam giác SAC, SBD cân tại đỉnh S	0,25

		nên *SI* vuông góc với *AC*, *BD* suy ra *SI* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Dễ thấy mọi điểm nằm trên đường thẳng *SI* cách đều các đỉnh *A*, *B*, *C*, *D*.	
		Trong tam giác *SIC*, dựng trung trực của cạnh *SC* cắt đường thẳng *SI* tại *O* suy ra $OS = OA = OB = OC = OD$.	0,25
		Ta có $SM.SC = SO.SI \Rightarrow SO = \frac{SM.SC}{SI} = \frac{3a.3a}{2\sqrt{SA^2 - IA^2}} = \frac{9a^2}{2\sqrt{9a^2 - a^2}} = \frac{9\sqrt{2}a}{8}$. Vậy $SO = \frac{9\sqrt{2}a}{8}$.	0,5
	2	**1,0 điểm**	
		 Gọi *K* là giao điểm của đường thẳng *AH* và *BC*; trong mặt phẳng (*SBC*) gọi *D* là giao điểm của đường thẳng qua *S*, vuông góc với *SC*. Ta có *BC* vuông góc với *SH* và *SA* nên *BC* vuông góc với mặt phẳng (*SAH*) suy ra *BC* vuông góc với *SK*.	0,25
		Trong tam giác vuông *SAK* ta có $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SK^2}$, kết hợp với giả thiết ta được $\frac{1}{SK^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$ (1)	0,5
		Trong tam giác vuông *SDC* ta có $\frac{1}{SK^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{SC^2}$ (2) Từ (1) và (2) ta được $SB = SD$, từ đó suy ra $B \equiv D$ hay suy ra *SB* vuông góc với *SC*.	0,25
	3	**1,0 điểm**	
		 Gọi *G* là trọng tâm của tứ diện; *M*, *N*, *P*, *Q* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *CD*, *BC*, *AD*. Ta có tam giác *ACD* bằng tam giác *BCD* nên $AN = BN$ suy ra $MN \perp AB$, tương tự ta chứng minh được $MN \perp CD$ và đường thẳng *PQ* vuông góc với cả hai	0,25

		đường thẳng *BC, AD*. Từ đó suy $GA = GB = GC = GD$.	
		Ta có $XA + XB + XC + XD = \dfrac{XA.GA + XB.GB + XC.GC + XD.GD}{GA}$ $\geq \dfrac{\overrightarrow{XA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{XB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{XC}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{XD}.\overrightarrow{GD}}{GA}$	0,5
		$= \dfrac{\overrightarrow{XG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) + 4.GA^2}{GA} = 4GA$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *X* trùng với điểm *G*. Vậy $XA + XB + XC + XD$ nhỏ nhất khi và chỉ khi *X* là trọng tâm của tứ diện *ABCD*.	0,25

ĐỀ SỐ 2

Bài 1: **a) Cho** $\tan\dfrac{b}{2} = 4\tan\dfrac{a}{2}$**. Chứng minh:** $\tan\dfrac{b-a}{2} = \dfrac{3\sin a}{5 - 3\cos a}$ **.**

b) Chứng minh : $\dfrac{1}{\cos 290^0} + \dfrac{1}{\sqrt{3}\sin 250^0} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$**.**

c) $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{1}{64}\cos 8x + \dfrac{7}{16}\cos 4x + \dfrac{35}{64}$ **.**

Bài 2: **a) Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:**

$2m\sin x + \cos x = m + 1$**. (m là tham số)**

b)Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{5 - 2\cos^2 x.\sin^2 x}$

Bài 3 **Giải các phương trình sau:**

a) $\sin^6 x + 3\sin^2 x\cos x + \cos^6 x = 1$

b) $12\cos x + 5\sin x + \dfrac{5}{12\cos x + 5\sin x + 14} + 8 = 0$**.**

c) $\dfrac{1 + cot2x.\tan x}{\cos^2 x} + 1 = 6(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x)$;

Bài 4: **Tìm các giá trị** α **để phương trình:**

$(\cos\alpha + 3\sin\alpha - \sqrt{3})x^2 + (\sqrt{3}\cos\alpha - 3\sin\alpha - 2)x + \sin\alpha - \cos\alpha + \sqrt{3} = 0$ **có nghiệm x =1.**

Bài 5: **a).Trong mặt phẳng 0xy ,cho vectơ** $\vec{v}$ **=(-2;1), đường thẳng d có phương trình 2x –3y +3 =0 . Hãy xác định phương trình của d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ** $\vec{v}$**.**

b) Trong mặt phẳng 0xy , cho đường tròn (C) co phương trình : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$**.Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vec tơ** $\vec{v}$ **=(-2;5).**

HƯỚNG DẪN ĐÁP ÁN

Bài 1: **a) Đặt** $\tan\frac{a}{2}$ **= t thì** $\tan\frac{b}{2}$ **= 4t ,do đó :** $\tan\frac{b-a}{2}=\frac{\tan\frac{b}{2}-\tan\frac{a}{2}}{1+\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}}=\frac{3t}{1+4t^2}$

Mặt khác : $\tan\frac{b-a}{2}=\frac{3\sin a}{5-3\cos a}=\frac{3\frac{2t}{1+t^2}}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{3t}{1+4t^2}$ **. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.**

b)VT = $\frac{1}{\cos 70^0}-\frac{1}{\sqrt{3}\sin 70^0}=\frac{1}{\sin 20^0}-\frac{1}{\sqrt{3}\cos 20^0}$

$=\frac{\sqrt{3}\cos 20^0-\sin 20^0}{\sqrt{3}\sin 20^0\cos 20^0}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^0-\frac{1}{2}\sin 20^0\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^0}=\frac{4\sin 40^0}{\sqrt{3}\sin 40^0}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ **(đpcm).**

c) VT = $(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x=1-\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2=\ldots$

$=\frac{1}{64}\cos 8x+\frac{7}{16}\cos 4x+\frac{35}{64}$

Bài 2: **a) Pt có nghiệm** $\Leftrightarrow 4m^2+1\ge(m+1)^2\Leftrightarrow 3m^2-2m\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge\frac{2}{3}\end{array}\right.$

b) $5-2\cos^2 x\sin^2 x=5-\frac{1}{2}\sin^2 2x\quad\Rightarrow\frac{9}{2}\le 5-\frac{1}{2}\sin^2 2x\le 5\quad\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{2}\le y\le\sqrt{5}$.

$\Rightarrow y_{\max}=\sqrt{5}\ khi\ x=k\frac{\pi}{2}\quad ;\ y_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ khi\ x=k\frac{\pi}{4}$

Bài 3: **a)** $\sin^6 x+3\sin^2 x\cos x+\cos^6 x=1$

$\Leftrightarrow(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)+3\sin^2 x\cos x=1$

$\Leftrightarrow -3\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos x=0$ **giải phương trình này ta được nghiệm** $x=\frac{k\pi}{2}$.

b)Đặt y = 12cosx +5 sinx + 14 ,ta có phương trình $y+\frac{5}{y}-6=0$ **giải phương trình này ta được y =1vày =5. Do đó :** $12\cos x+5\sin x+\frac{5}{12\cos x+5\sin x+14}+8=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}12\cos x+5\sin x+14=1\\12\cos x+5\sin x+14=5\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}12\cos x+5\sin x=-13 \quad (1)\\12\cos x+5\sin x=-9 \quad (2)\end{array}\right.$$

Giải (1) và (2) ta được : $x=\alpha+\pi+k2\pi$ **;** $x=\alpha\pm\arccos\left(-\frac{9}{13}\right)+k2\pi$ **với** $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ **và** $\sin\alpha=\frac{5}{13}$.

c)ĐK: $x\neq k\frac{\pi}{2}$ **;** $\frac{1+cot2x.\tan x}{\cos^2 x}+1=6(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x) \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin 2x.\sin x.\cos^2 x}+1=6-3\sin^2 2x$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 2x}=5-3\sin^2 2x \Leftrightarrow 3t^2-5t+2=0 \ (t=\sin^2 2x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 2x=1\\ \sin^2 2x=\frac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 2x=0\\ \cos 4x=-\frac{1}{3}=\cos\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\alpha}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=-\frac{\alpha}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

Bài 4: **x= 1 là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi ta có đẳng thức** $\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha=2$

hay $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=1$. **Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi** $\alpha=\frac{\pi}{6}+k2\pi$.

Bài 5: **a) Lấy M(0;1) thuộc d .Khi đó** $M'=T_{\vec{v}}(M)=(-2;2)\in d'$. **Vì d' song song với d nên d' có phương trình dạng : 2x-3y + C = 0 .Thay toạ độ M'vào pt d' ta được C =10 . Vậy phương trình d' : 2x –3y +10 =0.**

b) Đường tròn (C) có tâm I (1;-2) ,R= 3.Gọi $I'=T_{\vec{v}}(I)=(-1;3)$ **và (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ** $\vec{v}$ **thì (C') có tâm I' bán kính R'= 3 có pt :** $(x+1)^2+(y-3)^2=9$