

**ĐỀ THI SỐ 1**

**Câu 1:** (4,0 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a)  $3x^2 - 7x + 2;$

b)  $a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1).$

**Câu 2:** (5,0 điểm)

Cho biểu thức :

$$A = \left( \frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \left( \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \right)$$

- a) Tìm ĐKXD rồi rút gọn biểu thức A ?
- b) Tìm giá trị của x để  $A > 0$ ?
- c) Tính giá trị của A trong trường hợp :  $|x - 7| = 4.$

**Câu 3:** (5,0 điểm)

a) Tìm x,y,z thỏa mãn phương trình sau :

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0.$$

b) Cho  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  và  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ . Chứng minh rằng :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

**Câu 4:** (6,0 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD.

- a) Tứ giác BEDF là hình gì ? Hãy chứng minh điều đó ?
- b) Chứng minh rằng :  $CH.CD = CB.CK$
- c) Chứng minh rằng :  $AB.AH + AD.AK = AC^2.$

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI**

	Nội dung đáp án	Điểm
<b>Bài 1</b>		
<b>a</b>		<b>2,0</b>
	$3x^2 - 7x + 2 = 3x^2 - 6x - x + 2 =$	1,0
	$= 3x(x - 2) - (x - 2)$	0,5
	$= (x - 2)(3x - 1).$	0,5
<b>b</b>		<b>2,0</b>
	$a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1) = ax^2 + a - a^2x - x =$	1,0

	$= ax(x - a) - (x - a) =$	0,5
	$= (x - a)(ax - 1).$	0,5
<b>Bài 2:</b>		<b>5,0</b>
<b>a</b>		<b>3,0</b>
	ĐKXĐ :	
	$\begin{cases} 2-x \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \\ 2+x \neq 0 \\ x^2-3x \neq 0 \\ 2x^2-x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$	1,0
	$A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x}\right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}\right) = \frac{(2+x)^2+4x^2-(2-x)^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x^2(2-x)}{x(x-3)} =$	1,0
	$\frac{4x^2+8x}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} =$	0,5
	$= \frac{4x(x+2)x(2-x)}{(2-x)(2+x)(x-3)} = \frac{4x^2}{x-3}$	0,25
	Vậy với $x \neq 0, x \neq \pm 2, x \neq 3$ thì $A = \frac{4x^2}{x-3}$ .	0,25
<b>b</b>		<b>1,0</b>
	Với $x \neq 0, x \neq 3, x \neq \pm 2: A > 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} > 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x-3 > 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x > 3(\text{TMDKXD})$	0,25
	Vậy với $x > 3$ thì $A > 0$ .	0,25
<b>c</b>		<b>1,0</b>
	$ x-7 =4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=4 \\ x-7=-4 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=11(\text{TMDKXD}) \\ x=3(\text{KTMDKXD}) \end{cases}$	0,25
	Với $x = 11$ thì $A = \frac{121}{2}$	0,25
<b>Bài 3</b>		<b>5,0</b>
<b>a</b>		<b>2,5</b>
	$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$	
	$\Leftrightarrow (9x^2 - 18x + 9) + (y^2 - 6y + 9) + 2(z^2 + 2z + 1) = 0$	1,0
	$\Leftrightarrow 9(x-1)^2 + (y-3)^2 + 2(z+1)^2 = 0 (*)$	0,5
	Do : $(x-1)^2 \geq 0; (y-3)^2 \geq 0; (z+1)^2 \geq 0$	0,5
	Nên : $(*) \Leftrightarrow x = 1; y = 3; z = -1$	0,25
	Vậy $(x,y,z) = (1,3,-1)$ .	0,25
<b>b</b>		<b>2,5</b>

	Từ : $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz} = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$	0,25
	Ta có : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc}\right) = 1$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{cxy+bxz+ayz}{abc} = 1$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1(dfcm)$	0,25
<b>Bài 4</b>		<b>6,0</b>
		0,25
a		<b>2,0</b>
	Ta có : $BE \perp AC$ (gt); $DF \perp AC$ (gt) $\Rightarrow BE \parallel DF$	0,5
	Chứng minh : $\triangle BEO = \triangle DFO$ (g - c - g)	0,5
	$\Rightarrow BE = DF$	0,25
	Suy ra : Tứ giác : BEDF là hình bình hành.	0,25
b		<b>2,0</b>
	Ta có: $\angle ABC = \angle ADC \Rightarrow \angle HBC = \angle KDC$	0,5
	Chứng minh : $\triangle CBH \square \triangle CDK$ (g - g)	1,0
	$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow CH \cdot CD = CK \cdot CB$	0,5
b,		<b>1,75</b>
	Chứng minh : $\triangle AFD \square \triangle AKC$ (g - g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AD \cdot AK = AF \cdot AC$	0,25
	Chứng minh : $\triangle CFD \square \triangle AHC$ (g - g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{AH}{AC}$	0,25

Mà : $CD = AB \Rightarrow \frac{CF}{AB} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AH = CF.AC$	0,5
Suy ra : $AB.AH + AB.AH = CF.AC + AF.AC = (CF + AF)AC = AC^2$ (đpcm).	0,25

**ĐỀ SỐ 2**

**Câu 1.**

a. Phân tích các đa thức sau ra thừa số:

$$x^4 + 4$$

$$(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$$

b. Giải phương trình:  $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

c. Cho  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

**Câu 2.** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left( x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tính giá trị của A, Biết  $|x| = \frac{1}{2}$ .

c. Tìm giá trị của x để  $A < 0$ .

d. Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

**Câu 3.** Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ  $ME \perp AB$ ,  $MF \perp AD$ .

a. Chứng minh:  $DE = CF$

b. Chứng minh ba đường thẳng: DE, BF, CM đồng quy.

c. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

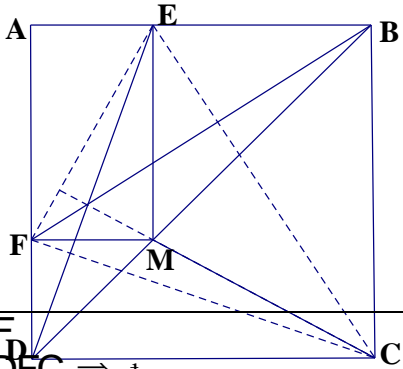
**Câu 4.**

a. Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

b. Cho a, b dương và  $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$   
 Tính:  $a^{2011} + b^{2011}$

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8**

Câu	Đáp án	Điểm
<b>Câu 1</b> (6 điểm)	a. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$ $= (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2$ $= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$  $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$ $= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24$ $= [(x^2 + 7x + 11)^2 - 1] - 24$ $= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2$ $= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16)$ $= (x + 1)(x + 6)(x^2 + 7x + 16)$	(2 điểm)
	b. $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0 \Leftrightarrow$ $(x^2 - x + 1)(x - 5)(x + 6) = 0$ (*)	(2 điểm)

	$\text{Vì } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x$ $\Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x - 5)(x + 6) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -6 \end{cases}$	
	<p>c. Nhân cả 2 vế của: <math>\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1</math></p> <p>với <math>a + b + c</math>; rút gọn <math>\Rightarrow</math> đpcm</p>	(2 điểm)
<p><b>Câu 2</b> (6 điểm)</p>	<p>Biểu thức: <math>A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2}\right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2}\right)</math></p>	
	<p>a. Rút gọn được kq: <math>A = \frac{-1}{x - 2}</math></p>	(1.5 điểm)
	<p>b. <math> x  = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}</math> hoặc <math>x = -\frac{1}{2}</math></p> <p><math>\Rightarrow A = \frac{4}{3}</math> hoặc <math>A = \frac{4}{5}</math></p>	(1.5 điểm)
	<p>c. <math>A &lt; 0 \Leftrightarrow x &gt; 2</math></p>	(1.5 điểm)
	<p>d. <math>A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x - 2} \in \mathbb{Z} \dots \Rightarrow x \in \{1; 3\}</math></p>	(1.5 điểm)
<p><b>Câu 3</b> (6 điểm)</p>	<p>HV + GT + KL</p> 	(1 điểm)
	<p>a. Chứng minh: <math>AE = FM = DF</math> <math>\Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \Rightarrow</math> đpcm</p>	(2 điểm)
	<p>b. DE, BF, CM là ba đường cao của <math>\triangle EFC \Rightarrow</math> đpcm</p>	(2 điểm)
	<p>c. Có Chu vi hình chữ nhật <math>AEMF = 2a</math> không đổi <math>\Rightarrow ME + MF = a</math> không đổi <math>\Rightarrow S_{AEMF} = ME \cdot MF</math> lớn nhất <math>\Leftrightarrow ME = MF</math> (AEMF là hình vuông) <math>\Rightarrow M</math> là trung điểm của BD.</p>	(1 điểm)

<p><b>Câu 4:</b> (2 điểm)</p>	<p>a. Từ: <math>a + b + c = 1 \Rightarrow</math></p> $\begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$ $\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$ <p>Dấu bằng xảy ra <math>\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}</math></p>	<p>(1 điểm)</p>
	<p>b. <math>(a^{2001} + b^{2001}).(a + b) - (a^{2000} + b^{2000}).ab = a^{2002} + b^{2002}</math></p> $\Rightarrow (a + b) - ab = 1$ $\Rightarrow (a - 1).(b - 1) = 0$ $\Rightarrow a = 1 \text{ hoặc } b = 1$ <p>Ví <math>a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow b = 1 \text{ hoặc } b = 0</math> (loại)</p> <p>Ví <math>b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow a = 1 \text{ hoặc } a = 0</math> (loại)</p> <p>Vậy <math>a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2</math></p>	<p>(1 điểm)</p>

### ĐỀ THI SỐ 3

#### Bài 1: (4 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a)  $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ .  
 b)  $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$ .

#### Bài 2: (2 điểm)

Giải phương trình:

$$\frac{x - 241}{17} + \frac{x - 220}{19} + \frac{x - 195}{21} + \frac{x - 166}{23} = 10.$$

#### Bài 3: (3 điểm)

Tìm x biết:

$$\frac{(2009 - x)^2 + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}.$$

#### Bài 4: (3 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$ .

**Bài 5:** (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC.

- Xác định vị trí của điểm D để tứ giác AEDF là hình vuông.
- Xác định vị trí của điểm D sao cho  $3AD + 4EF$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 6:** (4 điểm)

Trong tam giác ABC, các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho:  $\angle AFE = \angle BFD$ ,  $\angle BDF = \angle CDE$ ,  $\angle CED = \angle AEF$ .

- Chứng minh rằng:  $\angle BDF = \angle BAC$ .
- Cho  $AB = 5$ ,  $BC = 8$ ,  $CA = 7$ . Tính độ dài đoạn BD.

Một lời giải:

**Bài 1:**

- $$\begin{aligned} (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= [(x + y + z)^3 - x^3] - [y^3 + z^3] \\ &= (y + z)[(x + y + z)^2 + (x + y + z)x + x^2] - (y + z)(y^2 - yz + z^2) \\ &= (y + z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = 3(y + z)[x(x + y) + z(x + y)] \\ &= 3(x + y)(y + z)(z + x). \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 &= (x^4 - x) + (2010x^2 + 2010x + 2010) \\ &= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010). \end{aligned}$$

**Bài 2:**

$$\begin{aligned} \frac{x - 241}{17} + \frac{x - 220}{19} + \frac{x - 195}{21} + \frac{x - 166}{23} &= 10 \\ \Leftrightarrow \frac{x - 241}{17} - 1 + \frac{x - 220}{19} - 2 + \frac{x - 195}{21} - 3 + \frac{x - 166}{23} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x - 258}{17} + \frac{x - 258}{19} + \frac{x - 258}{21} + \frac{x - 258}{23} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 258) \left( \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 258 \end{aligned}$$

**Bài 3:**

$$\frac{(2009 - x)^2 + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}$$

ĐKXD:  $x \neq 2009$ ;  $x \neq 2010$ .

Đặt  $a = x - 2010$  ( $a \neq 0$ ), ta có hệ thức:

$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a^2 + 3a + 1} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19 \Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ (thoả ĐK)}$$

Suy ra  $x = \frac{4023}{2}$  hoặc  $x = \frac{4015}{2}$  (thoả ĐK)

Vậy  $x = \frac{4023}{2}$  và  $x = \frac{4015}{2}$  là giá trị cần tìm.

**Bài 4:**

$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} = \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là  $-335$  khi  $x = -3$ .

**Bài 5:**

a) Tứ giác AEDF là hình chữ nhật (vì  $E = A = F = 90^\circ$ )

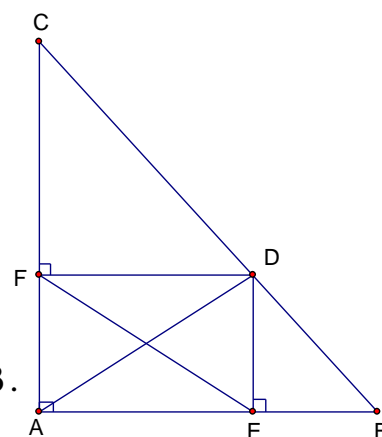
Để tứ giác AEDF là hình vuông thì AD là tia phân giác của BAC.

b) Do tứ giác AEDF là hình chữ nhật nên  $AD = EF$

$$\text{Suy ra } 3AD + 4EF = 7AD$$

$$3AD + 4EF \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AD \text{ nhỏ nhất}$$

$\Leftrightarrow D$  là hình chiếu vuông góc của A lên BC.



**Bài 6:**

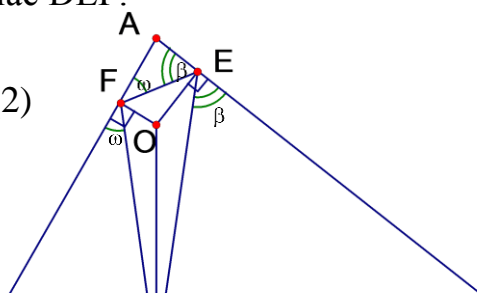
a) Đặt  $\angle AFE = \angle BFD = \omega$ ,  $\angle BDF = \angle CDE = \alpha$ ,  $\angle CED = \angle AEF = \beta$ .

$$\text{Ta có } \angle BAC + \beta + \omega = 180^\circ (*)$$

Qua D, E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, AC, AB cắt nhau tại O. Suy ra O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF.

$$\Rightarrow \angle OFD + \angle OED + \angle ODF = 90^\circ (1)$$

$$\text{Ta có } \angle OFD + \omega + \angle OED + \beta + \angle ODF + \alpha = 270^\circ (2)$$





(1) & (2)  $\Rightarrow \alpha + \beta + \omega = 180^\circ$  (\*\*)

(\*) & (\*\*)  $\Rightarrow \text{BAC} = \alpha = \text{BDF}$ .

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có:

$B = \beta, C = \omega$

$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle DBF \sim \triangle DEC \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{8} \\ \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} = \frac{7}{8} \\ \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7AE = 5AF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7(7 - CE) = 5(5 - BF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7CE - 5BF = 24 \end{cases}$$

$\Rightarrow CD - BD = 3$  (3)

Ta lại có  $CD + BD = 8$  (4)

(3) & (4)  $\Rightarrow BD = 2,5$