

ĐỀ CƯƠNG ÔN THI TOÁN 8 CUỐI NĂM
Đại Số

Đề số 1

Giải:

Gọi số lượng dầu ban đầu trong thùng thứ hai là x ($x > 0$)

\Rightarrow lượng dầu trong thùng thứ nhất là $2x$

Khi đó số lượng dầu trong thùng thứ hai là: $x + 25$

Theo gt: $2x - 25 = x + 25$

$$\Leftrightarrow 2x - x = 25 + 25$$

$$\Leftrightarrow x = 50$$

Vậy lúc đầu lượng dầu trong thùng thứ nhất là 100 lít và thùng thứ hai là 50 lít.

Bài 8: Học sinh khối 8 nhặt được 65kg kim loại vụn. Trong đó đồng nhiều hơn nhôm 15kg, kẽm ít hơn tổng số khối lượng nhôm và đồng 1kg. Hỏi khối 8 đã nhặt được bao nhiêu kg mỗi loại

Giải:

Gọi số lượng nhôm nhặt được là x (kg) ($x > 0$)

Số lượng đồng nhặt được là $x + 15$ (kg)

Số lượng kẽm nhặt được là $x + x + 15 - 1 = 2x + 14$ (kg)

Tổng số kim loại vụn nhặt được là

$$x + x + 15 + 2x + 14 = 4x + 29$$

Theo bài ra: $4x + 29 = 65 \Leftrightarrow x = 9$

Vậy khối 8 nhặt được: 9 kg nhôm

$$9 + 15 = 24 \text{ kg đồng}$$

$$9 + 24 - 1 = 32 \text{ kg kẽm}$$

Bài 9: Một xí nghiệp dệt thảm được giao làm một số thảm xuất khẩu trong 20 ngày. Xí nghiệp đã tăng năng suất 20% nên sau 18 ngày không những đã làm xong số thảm được giao mà còn làm thêm được 24 chiếc nữa. Tính số thảm xí nghiệp đã làm được trong 18 ngày.

Giải:

Gọi số thảm xí nghiệp đã làm được trong 18 ngày là x chiếc (x nguyên dương)

Một ngày đã làm được $\frac{x}{18}$ chiếc.

Số thảm xí nghiệp được giao trong 20 ngày là: $x - 20$ chiếc.

Một ngày phải làm $\frac{x - 24}{20}$ chiếc.

Do tăng năng suất 20% nên trong một ngày số thảm xí nghiệp đã làm so với số thảm xí nghiệp phải làm bằng $100\% + 20\% = 120\% = 1,2$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x}{18} = 1,2 \cdot \frac{x - 24}{20}$$

Giải PT tìm được $x = 324$

Vậy số thảm xí nghiệp đã làm trong 18 ngày là 324 chiếc.

Bài 10: Một lớp học tham gia trồng cây ở một lâm trường trong thời gian đã định với năng suất 300 cây trong một ngày. Nhưng thực tế mỗi người đã trồng thêm được 100 cây nên đã trồng thêm được tất cả 600 cây và hoàn thành kế hoạch trước một ngày. Tính số cây dự định trồng.

Giải:

Gọi số cây dự định trồng là x cây (x nguyên dương)

Khi đó số ngày dự định để trồng cây là: $\frac{x}{300}$ ngày

Nhưng thực tế mỗi ngày đã trồng 400 cây (vì thêm 100 cây)

Nên số cây đã trồng được tất cả $x + 600$ và số ngày là: $\frac{x + 600}{400}$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x}{300} = \frac{x + 600}{400} + 1$$

Giải ra ta được: $x = 3000$ cây

Vậy số cây dự định trồng là 3000 cây.

Hình Học

Đề số 1

Bài 1: Cho hình thang ABCD, có đáy lớn là CD, đáy nhỏ là AB. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường chéo BD ở E, qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường chéo AC ở F.

a. Chứng minh tứ giác DEFC là hình thang cân.

b. Tính độ dài đoạn EF nếu biết $AB = 5\text{cm}$, $CD = 10\text{cm}$.

Giải:

a. Do $AE \parallel BC$ (gt)

Theo định lý TalĐt ta có: $\frac{OE}{OE} = \frac{OA}{OC}$ (1)

Do $BF \parallel AD$ (gt)

Theo định lý ta lét ta có:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OF}{OA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{OE}{OB} \cdot \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OF}{OA}$ hay $\frac{OE}{OD} = \frac{OF}{OC}$

Theo định lý đảo của định lý TalĐt ta lại có: $EF \parallel DC$

\Rightarrow Tứ giác DEFC là hình thng (dấu hiệu nhận biết)

Xét tam giác ABC và tam giác BAD có: AB là cạnh chung

$BC = AD$ (gt); $AC = BD$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BAD$ (c.c.c)

\Rightarrow góc $\angle C_1 = \angle D_1$ (2 góc tương ứng)

mà góc $\angle D = \angle C$ (gt) nên $\angle C_2 = \angle D_2$

Hình thng DEFC có hai góc kề một đáy bằng nhau nên là hình thng cân.

b. Theo câu a, ta có: $EF \parallel CD$ mà $CD \parallel AB$ (gt)

$\Rightarrow EF \parallel CD \parallel AB$.

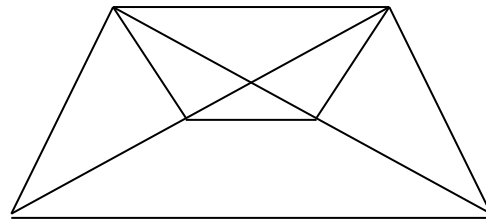
Do đó $EF \parallel AB$. Theo định lý Ta lét ta có:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{OB}{OE} \text{ mà } \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OA} \Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{OC}{OA} \quad (3)$$

Do $CD \parallel AB$, theo định lý Ta lét ta có: $\frac{DC}{AB} = \frac{OC}{OA}$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow AB^2 = EF \cdot DC$

Do đó: $EF = \frac{AB^2}{CD} = \frac{52}{10} = \frac{25}{10} = 2,5 \text{ cm}$



Tiết 30:

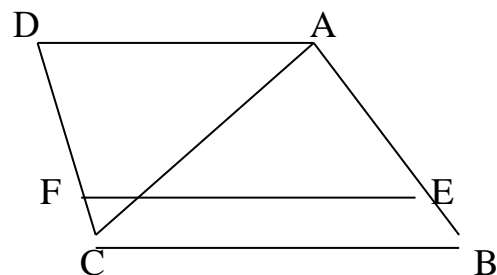
Bài 2: Cho hình thng ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 14\text{cm}$, $CD = 35\text{cm}$, $AD = 17,5\text{cm}$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $DE = 5\text{cm}$. Qua E vẽ đường thẳng song song với AB cắt BC ở F. Tính độ dài EF.

Giải:

Gọi giao điểm của AC với EF là I

Do $IE \parallel CD$

Theo định lý TalĐt ta có: $\frac{EI}{CD} = \frac{AE}{AD}$



$$\Rightarrow EI = \frac{CD \cdot AE}{AD} = \frac{35 \cdot 12,5}{17,5} = 25 \text{ cm}$$

Do $IF \parallel AB$ theo định lý Talet ta có

$$\frac{IF}{AB} = \frac{CI}{CA} \text{ mà } \frac{CI}{CA} = \frac{DE}{DA} = \frac{5}{17,5}$$

$$\text{Do đó: } \frac{IF}{AB} = \frac{5}{17,5} \Rightarrow IF = \frac{14,5}{17,5} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Vậy } EF = EI + IF = 25 + 4 = 29 \text{ cm}$$

Bài 3: Cho hình thang cân ABCD ($AD \parallel BC$). Đường cao BE cắt đường chéo AC tại F. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau ở M. Tính độ dài đoạn BM, biết $AB = 20 \text{ cm}$, và $\frac{AF}{FC} = \frac{2}{3}$.

Giải:

Vì ABCD là hình thang cân nên ta chứng minh được: $AD = BC + 2AE$

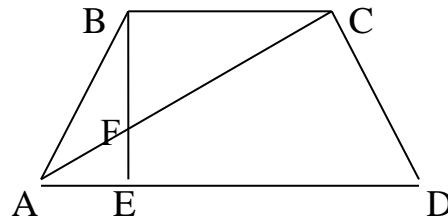
$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{2AE}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Do đó: } \frac{2AE + BC}{BC} = \frac{4 + 3}{3} \text{ hay } \frac{AD}{BC} = \frac{7}{3}$$

Mặt khác trong tam giác MAD, do $BC \parallel AD$ nên ta có:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AD}{BC} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{MB + MA}{MB} = \frac{7}{3}$$

$$\text{Mà } AB = 20 \Rightarrow MB = 15 \text{ cm}$$



Tiết 31:

Bài 4: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), M là trung điểm cạnh CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

a. Chứng minh: $IK \parallel AB$

b. Đường thẳng IK cắt AD và BC theo thứ tự ở E và F

Chứng minh: $EI = IK = KF$

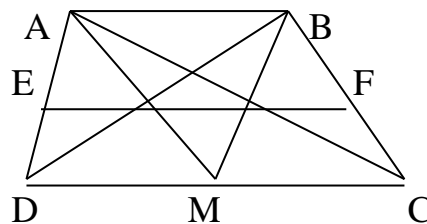
Giải:

$$\text{§} \text{Et} AB = m, MC = MD = n$$

a. Do $AB \parallel CD$ ta có:

$$\frac{MI}{IA} = \frac{MD}{AB} = \frac{n}{m} \quad (1)$$

$$\frac{MK}{KB} = \frac{MC}{AB} = \frac{n}{m} \quad (2)$$



$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{MI}{AI} = \frac{MK}{KB}$$

Theo định lý đảo của định lý talĐt đối với tam giác MAB ta có: $IK \parallel AB$

b. Do $EF \parallel CD$ ta có:

$$\frac{IE}{DM} = \frac{AI}{AM} \text{ hay } \frac{EI}{n} = \frac{AI}{AM} \quad (3)$$

$$\frac{IK}{MC} = \frac{IM}{AM} \text{ hay } \frac{IK}{n} = \frac{AI}{AM} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4)} \Rightarrow EI = IK$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \frac{KF}{MC} = \frac{AI}{AM}$$

$$\text{Từ đó ta có: } EI = IK = KF \text{ (@pcm)}$$

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD. Gọi G là một điểm trên cạnh CD, K là một điểm trên cạnh CB sao cho $\frac{DG}{GC} = \frac{1}{2}$ và $\frac{BK}{KC} = \frac{3}{2}$.

Gọi giao điểm của DB với AG và AK lần lượt là E và F. Tính độ dài các đoạn thẳng DE, EF, FB nếu biết $BD = 24\text{cm}$

Giải:

$$\text{Do } DG \parallel AB \text{ nên } \frac{DE}{EB} = \frac{DG}{AB}$$

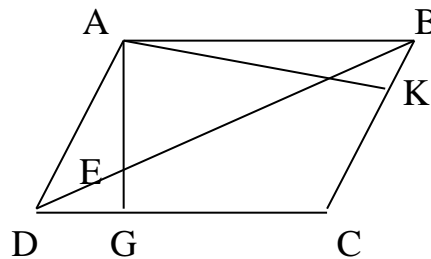
mà $AB = CD$ do đó

$$\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } DE = \frac{1}{4} DB = 6\text{cm}$$

$$\text{Tương tự: } BF = \frac{3}{8} BD = 9\text{cm}$$

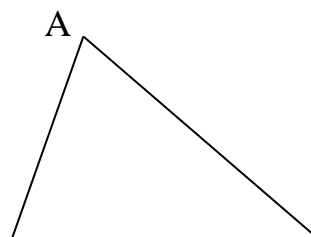
$$\text{Từ đó ta có: } EF = 9\text{cm}$$



Tiết 32:

Bài 6: Qua trọng tâm G của tam giác ABC, kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB và BC lần lượt tại D và E. Tính độ dài đoạn DE, biết $AD + EC = 16\text{cm}$, chu vi của tam giác ABC bằng 75cm .

Giải:



Ta có: $\frac{KG}{BK} = \frac{1}{3}, \frac{BG}{BK} = \frac{2}{3}$

Do đó: $DE \parallel AC$ nên $\frac{AD}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{GK}{BG} = \frac{1}{3}$

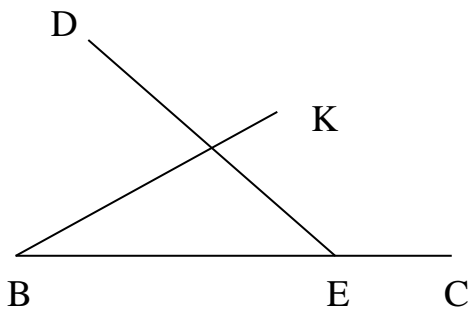
$\Rightarrow \frac{AD+EC}{AB+BC} = \frac{1}{3}$

\Rightarrow Vì $AD + EC = 16\text{cm}$ và $AB + BC = 75 - AC$

\Rightarrow Từ đó ta có: $\frac{16}{75-AC} = \frac{1}{3}$

Do đó $AC = 27\text{cm}$

Ta lại có: $\frac{DE}{AC} = \frac{2}{3}$ hay $\frac{DE}{27} = \frac{2}{3} \Rightarrow DE = 18\text{cm}$



Bài 7: Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 2,5\text{cm}$, $AD = 3,5\text{cm}$, $BD = 5\text{cm}$ và góc $\angle DAB = \angle DBC$

a. Chứng minh: tam giác ADB đồng dạng với tam giác BCD

b. Tính độ dài các cạnh BC, CD.

c. Sau khi tính hãy vẽ lại hình chính xác bằng thước và compa

Giải:

a. Ta có: góc $\angle ABD = \angle BDC$ (2 góc so le trong)

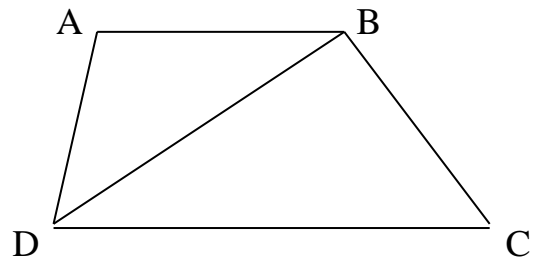
Góc $\angle DAB = \angle DBC$ (gt)

Vậy $\triangle ABD$ đồng dạng với $\triangle BDC$ (c.c.c)

b. Ta có: $\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BD}{DC}$

hay $\frac{2,5}{5} = \frac{3,5}{BC} = \frac{5}{DC} \Rightarrow DC = \frac{5 \cdot 5}{2,5} = 10\text{cm}$

$BC = \frac{5 \cdot 3,5}{2,5} = 7\text{cm}$



c. Vẽ hình thang ABCD

- B₁: Vẽ tam giác ABD theo độ dài cho trước của mỗi cạnh.

- B₂: Lấy B làm tâm quay cung tròn có bán kính 7cm, lấy D làm tâm quay cùng tròn có bán kính 10cm, hai cung tròn này cắt nhau tại điểm C (khác phía với A so với BD)

Tiết 33:

Bài 8: Cho tam giác vuông ABC (góc A = 90°). Dựng AD vuông góc với BC (D thuộc BC). đường phân giác BE cắt AD tại F. Chứng minh: $\frac{FD}{FA} = \frac{EA}{EC}$.

Giải: Do BE là đường phân giác của tam giác ABD (tại đỉnh B) nên ta có:

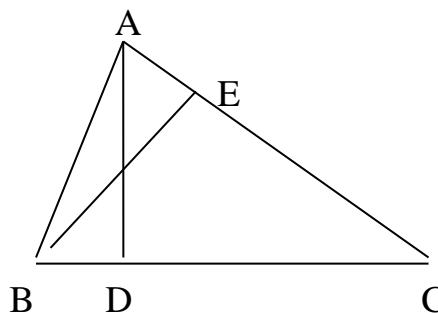
$$\frac{FD}{FA} = \frac{BD}{BA} \quad (1)$$

BE là đường phân giác của tam giác ABC tại đỉnh B đã đó ta có:

$$\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC} \quad (2)$$

Tam giác DBA đồng dạng với tam giác ABC (g.g)

Ta lại có: $\frac{BD}{AB} = \frac{BA}{BC} \quad (3)$. Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{FD}{FA} = \frac{EA}{EC}$



Bài 9: Đường cao của một tam giác vuông xuất phát từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 9cm và 16cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác vuông đó.

Giải:

Giả sử tam giác ABC vuông ở A, có đường cao AH

Và BH = 9cm, CH = 16cm

Xét tam giác vuông $\triangle HBA$ và $\triangle HAC$ có:

Góc $\angle BAH + \angle HAC = 1v \quad (1)$

Góc $\angle HCA + \angle HAC = 1v \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle BHA = \angle HCA$

$\Rightarrow \triangle HBA$ đồng dạng với $\triangle HAC$ (g.g)

\Rightarrow nên $\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} \Rightarrow HA^2 = HB \cdot HC = 9 \cdot 16 = 144$

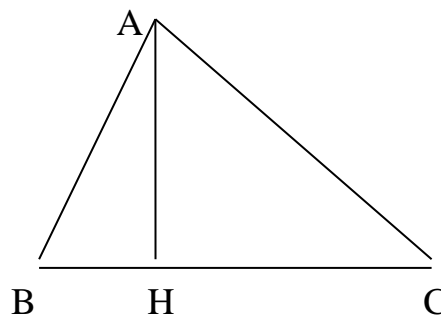
$\Rightarrow HA = 12\text{cm}$

áp dụng định lý Pitago ta vào các tam giác vuông HBA, HAC ta có:

$AB^2 = HB^2 + HA^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow AB = \sqrt{225} = 15\text{cm}$

$AC^2 = HC^2 + HA^2 = 16^2 + 12^2 = 400 \Rightarrow AC = \sqrt{400} = 20\text{cm}$

$BC = BH + CH = 9 + 16 = 25\text{cm}$



Tiết 34:

Bài 10: Cho hình thang vuông ABCD ($\angle A = \angle D = 90^\circ$), AB = 6cm, CD = 12cm, AD = 17cm. Trên cạnh AD đặt đoạn thẳng AE = 8cm. Chứng minh góc

$$\angle BEC = 90^0.$$

Giải:

Ta có: $DE = AD - AE = 17 - 8 = 9\text{cm}$

Từ đó ta có: $\frac{AB}{DE} = \frac{AE}{DC}$ (vì $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$)

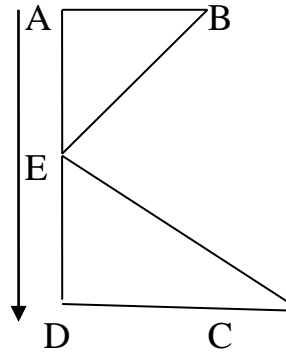
Vậy $\triangle ABE$ đồng dạng với $\triangle DEC$

Do đó: góc $\angle AEB = \angle DEC$ (1)

Góc $\angle ABE = \angle DEC$ (2)

Từ (1), (2) \Rightarrow góc $\angle AEB + \angle DEC = 90^0$

nên $\angle BEC = 90^0$



Bài 11: Cho hình bình hành ABCD. Qua A kẻ một đường thẳng tùy ý cắt BD, BC, CD lần lượt ở E, K, G. Chứng minh:

a. $AE^2 = EK \cdot EG$

b. $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$

c. Khi đường thẳng đi qua A thay đổi thì tích BK . DG có giá trị không đổi.

Giải:

a. Do $BK \parallel AD$ nên $\frac{EK}{AE} = \frac{BE}{ED}$ (1)

Do $AB \parallel DG$ nên $\frac{AE}{EG} = \frac{BE}{ED}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{EK}{AE} = \frac{AE}{EG}$

Do đó : $AE^2 = EK \cdot EG$

b. Ta có: $\frac{AE}{EK} = \frac{DE}{EB} \Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{DE}{DB}$ (3)

Tương tự: $\frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$ (4)

Cộng vế với vế của (3) và (4) ta có:

$$\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = \frac{DE}{DB} + \frac{BE}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1$$

c. Đặt $AB = a, AD = b$

Như vậy: $\frac{BK}{KC} = \frac{a}{CG}$ (*); và $\frac{KC}{b} = \frac{CG}{DG}$ (**)

Nhân vế với vế của (*) và (**) ta có:

$$\frac{BK}{b} = \frac{a}{DG} \Rightarrow BK \cdot DG = ab \text{ không đổi.}$$

Đề Số 2

A. Mục tiêu

- Học sinh nắm được liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, giữa thứ tự và phép nhân.
- Biết cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn và phương trình chứa giá trị tuyệt đối.
- Rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải bài tập.

B. Thời lượng: 6 tiết (tiết 35, 36, 37, 38, 39, 40)

C. Thực hiện:

Tiết 35:

Câu hỏi:

1. Nhắc lại sự liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, sự liên hệ giữa thứ tự và phép nhân.
2. Thế nào là bất phương trình bậc nhất một ẩn? Hai bất phương trình như thế nào gọi là tương đương?
3. Nêu quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân của bất phương trình.
4. Nêu cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn.
5. Nêu định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số.

Bài 1: Cho a, b là hai số bất kỳ, chứng tỏ rằng

$$\frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab$$

Giải: Ta có: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + 4ab + b^2 \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot 4ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab$$

Dấu “=” xảy ra khi $a - b = 0$ hay $a = b$.

Bài 2: Chứng minh bất đẳng thức.

a. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

b. $a^2 + b^2 + c^2 \geq a(b + c)$

Giải:

a. Ta có: $(a + b)^2 \geq 0$ và $(a - 1)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ (1); } \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \text{ (2)}$$

Lại có: $(b - 1)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow b^2 + 1 \geq 2b \text{ (3)}$$

\Leftrightarrow Cộng vế với vế của (2) và (3) ta có:

$$2(a^2 + b^2 + 1) \geq 2(ab + a + b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2(a^2 + b^2 + 1) \geq \frac{1}{2} \cdot 2(ab + a + b)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a - 1 = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$

b. Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq a(b + c)$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac \geq 2ab + 2ac - 2ab - 2ac$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - c)^2 + b^2 + c^2 \geq 0 \text{ (1)}$$

BĐT (1) luôn đúng nên ta có đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 0$

Tiết 36:

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

a. $3x - 5 > 2(x - 1) + x$

b. $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 > 8x - 2$

c. $3(4x + 1) - 2(5x + 2) > 8x - 2$

d. $1 + x - \frac{x-3}{4} + \frac{x+3}{3}$

e. $5 + \frac{x+4}{5} < x - \frac{x-2}{2} + \frac{x+3}{3}$

f. $2x^2 + 2x + 1 - \frac{15(x-1)}{2} \geq 2x(x+1)$

Giải:

a. $3x - 5 > 2(x - 1) + x$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 > 2x - 2 + x$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3x > -2 + 5$$

$$\Leftrightarrow 0x > 3$$

Vậy bất PT vô nghiệm.

$$\begin{aligned} \text{b. } (x+2)^2 - (x-2)^2 &> 8x - 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 &> 8x - 2 \\ \Leftrightarrow 8x - 8x &> -2 \\ \Leftrightarrow 0x &> -2 \end{aligned}$$

Vậy bất PT vô số nghiệm.

$$\begin{aligned} \text{d. } 1 + x - \frac{x-3}{4} + \frac{x+3}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{12(1+x) - 3(x-3) + 4(x+3)}{12} &> \frac{3(x+1) - 4(x-2)}{12} \\ \Leftrightarrow 12(1+x) - 3(x-3) &> 3(x+1) - 4(x-2) \\ \Leftrightarrow 12 + 12x - 3x + 9 &> 3x + 3 - 4x + 8 \\ \Leftrightarrow 9x + 21 &> -x + 11 \\ \Leftrightarrow 10x &> -10 \\ \Leftrightarrow x &> -1 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất PT là $x > -1$

$$\begin{aligned} \text{e. } 5 + \frac{x+4}{5} < x - \frac{x-2}{2} + \frac{x+3}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{30 \cdot 5 + 6(x+4)}{30} < \frac{30x - 15(x-2) + 10(x+3)}{30} \\ \Leftrightarrow 150 + 6x + 24 < 30x - 15x + 30 + 10x + 30 \\ \Leftrightarrow 6x + 15x - 30x - 10x < 30 + 30 - 150 - 24 \\ \Leftrightarrow -19x < -114 \\ \Leftrightarrow x > 6 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất PT là $x > 6$

$$\begin{aligned} \text{f. } 2x^2 + 2x + 1 - \frac{15(x-1)}{2} \geq 2x(x+1) \\ \Leftrightarrow \frac{2(2x^2 + 2x + 1) - 15(x-1)}{2} \geq \frac{4x(x+1)}{2} \\ \Leftrightarrow 2(2x^2 + 2x + 1) - 15(x-1) \geq 4x(x+1) \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 2 - 15x + 15 \geq 4x^2 + 4x \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 11x - 4x^2 - 4x \geq -17 \\ \Leftrightarrow -15x \geq -17 \\ \Leftrightarrow x \leq \frac{17}{15} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất PT là $x \leq \frac{17}{15}$

Bài 4: Cho các biểu thức sau:

$$A = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 5} \text{ và } B = \frac{2x^2 - 8x + 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$$

- Tìm điều kiện có nghĩa của B
- Tìm giá trị bé nhất của A và giá trị tương ứng của x.
- Tìm giá trị của x để $A \cdot B < 0$

Giải:

a. Biểu thức B có nghĩa khi mẫu thức

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 5x - 3 &\neq 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x - 3) + 2x(x - 3) + (x - 3) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 2x + 1) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1)^2 &\neq 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với $x \neq 3; x \neq -1$ thì B có nghĩa.

b. Ta có: $A = \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2 + 1}$

Ta có: $(x+1)^2 \geq 0 \forall x$ và $(x-2)^2 + 1 > 0 \forall x$

Do đó: $\frac{(x+1)^2}{(x-2)^2 + 1} \geq 0 \forall x$ hay $A \geq 0$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

c. Ta có: $A \cdot B = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 5} \cdot \frac{2x^2 - 8x + 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$
$$= \frac{(x+1)^2}{x^2 - 4x + 5} \cdot \frac{2(x^2 - 4x + 5)}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{2}{x-3}$$

Do đó $A \cdot B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-3} < 0 \\ x \neq 3; x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Vậy với $x < 3$ và $x \neq -1$ thì $A \cdot B < 0$

Bài 5:

a. Chứng tỏ bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x.

$$\frac{-4}{x^2 - 2x + 2} - 5 < 0$$

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức. $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$

Giải:

a. $\frac{-4}{x^2 - 2x + 2} - 5 = \frac{-4}{(x-1)^2 + 1} - 5 < 0 \forall x$

Vậy bất PT nghiệm đúng với mọi x.

b. $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2} = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = -3 + 4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$
 $= -3 + \left(2 - \frac{1}{x}\right)^2 \geq -3$

Dấu “=” xảy ra khi $2 - \frac{1}{x} = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$

Vậy biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -3 khi $x = \frac{1}{2}$

Bài 6:

a. Chứng tỏ: $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 10 \geq 1$

b. Tìm x để A có giá trị nhỏ nhất $A = \frac{x^2 - 2x + 1995}{x^2}$ với $x > 0$

Giải: a. $VT = (x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 10$
 $= (x - 1)(x - 6)(x - 3)(x - 4) + 10$
 $= (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10$
 $= (x^2 - 7x + 9 - 3)(x^2 - 7x - 9 + 3) + 10$
 $= (x^2 - 7x + 9)^2 - 9 + 10$
 $= (x^2 - 7x + 9)^2 + 1 \geq 1 \forall x$

Do đó $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 10 \geq 1 \forall x$

b. $A = \frac{1995(x^2 - 2x + 1995)}{1995x^2} = \frac{1995x^2 - 2x \cdot 1995 + 1995^2}{1995x^2}$
 $= \frac{1994x^2 + x^2 - 2x \cdot 1995 + 1995^2}{1995x^2} = \frac{1994}{1995} + \frac{(x - 1995)^2}{1995x^2}$

Ta thấy $\frac{1994}{1995} + \frac{(x - 1995)^2}{1995x^2} \geq \frac{1994}{1995} \forall x$

Dấu “=” xảy ra khi $x - 1995 = 0$ hay $x = 1995$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{1994}{1995}$ khi $x = 1995$

Bài 7: Giải các phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối sau.

a. $|x - 1| = 2$

b. $5|x| - 2 = x$

c. $|x - 3| - 5x = 7$

d. $|x + 3| = |5 - x|$

e. $|3x - 14| - |x + 2| = 5$

Giải:

a. $|x-1|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$

b. Xét 2 trường hợp

TH₁: Nếu $x \geq 0$ thì PT $5|x|-2=x$ trở thành

$$5x - 2 = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn đk } x > 0)$$

TH₂: Nếu $x < 0$ thì PT $5|x|-2=x$ trở thành

$$-5x - 2 = x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn đk } x < 0)$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{1}{3}$

c. $|x-3|-5x=7$

- Nếu $x - 3 \geq 0$ hay $x \geq 3$ ta có PT

$$x - 3 - 5x = 7 \Leftrightarrow x = -2,5 \text{ (không thỏa mãn đk } x \geq 3)$$

- Nếu $x - 3 < 0$ hay $x < 3$ ta có PT

$$-x + 3 - 5x = 7 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ (thỏa mãn đk } x < 3)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{2}{3}$

d. $|x+3|=|5-x|$ Hai vế không âm bình phương hai vế ta có.

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= (5-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 25 - 10x + x^2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của PT là: $x = 1$

e. $|3x-14|-|x+2|=5$

- Xét $x \leq -2$ ta có Pt: $(14 - 3x) - (-x - 2) = 5$

$$\Leftrightarrow 14 - 3x + x + 2 = 5$$

$$\Leftrightarrow -2x = -11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{2} \text{ (không thỏa mãn } \mathbb{R}^k)$$

- Xét $-2 < x \leq \frac{14}{3}$ ta có PT

$$(14 - 3x) - (x + 2) = 5$$

$$\Leftrightarrow 14 - 3x - x - 2 = 5$$

$$\Leftrightarrow -4x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \text{ (thỏa mãn } \mathbb{R}^k)$$

- Xét $x > \frac{14}{3}$ ta có PT

$$(3x - 14) - (x + 2) = 5$$

$$\Leftrightarrow 3x - 14 - x - 2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{21}{2} \text{ (thỏa mãn } \textcircled{k})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{7}{4}$ và $x = \frac{21}{2}$

Bài 8: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2-x}{x+3} - \frac{3-x}{2+2} + \frac{2-x}{x^2+5x+6} \right) : \left(1 - \frac{x}{x-1} \right)$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm giá trị của x để $A > 1$.

Giải:

$$a. \quad A = \left(\frac{2-x}{x+3} - \frac{3-x}{2+2} + \frac{2-x}{x^2+5x+6} \right) : \left(1 - \frac{x}{x-1} \right) \textcircled{kx} \textcircled{:} x \neq -2, x \neq -3; x \neq 1$$

$$A = \left(\frac{2-x}{x+3} - \frac{3-x}{x+2} + \frac{2-x}{(x+3)(x+2)} \right) : \frac{x-1-x}{x-1}$$

$$A = \frac{(2-x)(x+2) - (3-x)(x+3) + 2-x}{(x+3)(x+2)} \cdot \frac{x-1}{-1}$$

$$A = \frac{4-x^2-9+x^2+2-x}{(x+3)(x+2)} \cdot \frac{x-1}{-1}$$

$$A = \frac{-(x+3)}{(x+3)(x+2)} \cdot \frac{x-1}{-1}$$

$$A = \frac{x-1}{x+2}$$

$$b. \quad \text{Để } a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -3 \\ \frac{x-1}{x+2} > 1(1) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1)} \quad \frac{x-1}{x+2} > 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-x-2}{x+2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$$

$$\text{Vậy với } \begin{cases} x < -2 \\ x \neq -3 \end{cases} \text{ thì } A > 1$$

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$$

Và cả giá trị tương ứng của x và y

Giải:

$$\begin{aligned} A &= -x^2 - y^2 + xy + x + y \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) - \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{2}(y^2 - 2y + 1) + 1 \\ &= 1 - \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2] \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} x-y=0 \\ x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-1=0 \\ x=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất là: } A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Bài 10: Giải bất phương trình

a. $3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 > 0$

b. $\frac{x-3}{x+2} > 2$

Giải:

a. $3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 > 0$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + 6x^2 - 4x + 9x - 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(3x - 2) + 2x(3x - 2) + 3(3x - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 2)(x^2 + 2x + 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Ta thấy } x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ nên } 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$$

b. $\frac{x-3}{x+2} > 2$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-3-2x-4}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x-7}{x+2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+7}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 < 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -7 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < x < -2$$

Vậy bất phương trình đã cho có các nghiệm là $-7 < x < -2$

Bài 11: Tìm giá trị của x để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất.

$$A(x) = \frac{x}{(x+1999)^2} \text{ với } x > 0$$

Tìm giá trị lớn nhất đó.

Giải:

Đặt $a = 1999$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } A(x) &= \frac{x}{(x+a)^2} = \frac{(x+x)^2 - (x+a)^2 - 4}{4a(x+a)^2} \\ &= \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{4a(x+a)^2} = \frac{1}{4a} - \frac{(x-a)^2}{4a(x+a)^2} \leq \frac{1}{4a} \quad (\text{với } a > 0, x > 0) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } a > 0 \text{ nên } 4a(x+a)^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{(x-a)^2}{4a(x+a)^2} \leq 0 \forall x$$

$$A(x) = \frac{1}{4a} \Leftrightarrow x = a$$

$$\text{Thay } x = 1999 \text{ ta có giá trị lớn nhất của } A(x) = \frac{1}{4 \cdot 1999} \Leftrightarrow x = 1999$$