ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP TOÁN LỚP 9 HK2
CHỦ ĐỀ : CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} ax + by = c,\ a \neq 0 & (D) \\ a'x + b'y = c',\ a' \neq 0 & (D') \end{cases}$

- (D) cắt (D') $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- (D) // (D') $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.
- (D) ≡ (D') $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm.

II. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m \\ 2x - my = 0 \end{cases}$ (1)

1. Giải hệ phương trình (1) khi m = -1 .
2. Xác định giá trị của m để:
   a) x = 1 và y = 1 là nghiệm của hệ (1).
   b) Hệ (1) vô nghiệm.
3. Tìm nghiệm của hệ phương trình (1) theo m.
4. Tìm m để hệ (1) có nghiệm (x, y) thỏa: x + y = 1.

HD: *1. Khi m = – 1, hệ (1) có nghiệm x = 1; y = 2.*

2a) Hệ (1) có nghiệm x = 1 và y = 1 khi m = 2.

2b) Hệ (1) vô nghiệm khi: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{-m} \neq \dfrac{m}{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{-m} \\ \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{m}{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = -2\text{: Hệ (1) vô nghiệm.}$$

3. Hệ (1) có nghiệm: $x = \dfrac{m^2}{m+2}$; $y = \dfrac{2m}{m+2}$.

4. Hệ (1) có nghiệm (x, y) thỏa: x + y = 1 $\Leftrightarrow \dfrac{m^2}{m+2} + \dfrac{2m}{m+2} = 1$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 (\textit{thoâa ÑK coù nghieäm}) \\ m = -2 (\textit{khoâng thoâa ÑK coù nghieäm}) \end{array}\right.$$

Vậy khi m = 1, hệ(1 có nghiệm (x,y) thỏa: x + y = 1.

Bài tập 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = k + 2 \\ 2x + 4y = 9 - k \end{cases}$ (1)

1. Giải hệ (1) khi k = 1.
2. Tìm giá trị của k để hệ (1) có nghiệm là x = – 8 và y = 7.
3. Tìm nghiệm của hệ (1) theo k.

HD: *1. Khi k = 1, hệ (1) có nghiệm x = 2; y = 1.*

2. Hệ (1) có nghiệm x = –8 và y = 7 khi k = – 3 .

3. Hệ (1) có nghiệm: $x = \dfrac{5k-1}{2}$; $y = \dfrac{5-3k}{2}$.

Bài tập 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - my = 1 \end{cases}$ (1)

1. Giải hệ phương trình (1) khi m = –7 .
2. Xác định giá trị của m để:
   a) x = – 1 và y = 4 là nghiệm của hệ (1).
   b) Hệ (1) vô nghiệm.
3. *Tìm nghiệm của hệ phương trình (1) theo m.*

HD: *1. Khi m = – 7, hệ (1) có nghiệm x = 4; y = – 1.*

2a) Hệ (1) có nghiệm x = –1 và y = 4 khi $m = -\dfrac{3}{4}$.

2b) Hệ (1) vô nghiệm khi: m = – 2.

3. Hệ (1) có nghiệm: $x = \dfrac{3m+1}{m+2}$; $y = \dfrac{5}{m+2}$.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ (1)

1. Giải hệ phương trình (1) khi m = 3 .
2. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$ và $y = \dfrac{2}{3}$.
3. *Tìm nghiệm của hệ phương trình (1) theo m.*

HD: *1. Khi m = 3, hệ (1) có nghiệm* $x = -\dfrac{1}{13}$; $y = \dfrac{5}{13}$.

2a) Hệ (1) có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$ *và* $y = \dfrac{2}{3}$ *khi* $m = -\dfrac{2}{3}$.

2b) Hệ (1) vô nghiệm khi: m = –2.

3. Hệ (1) có nghiệm: $x = \dfrac{-1}{3m+4}$; $y = \dfrac{m+2}{3m+4}$.

Bài tập 5 : Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 3y = m \end{cases}$ (1)

1. Giải hệ phương trình (1) khi m = –1.
2. Tìm m để hệ (1) có nghiệm (x; y) thỏa $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$.

HD: *1. Khi m = –1, hệ(1) có nghiệm: x = 13 và y = – 9.*

2. Tìm:

- *Nghiệm của hệ (1) theo m: x = 12 – m ; y = m – 8 .*
- *Theo đề bài:* $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 - m > 0 \\ m - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 12 \\ m < 8 \end{cases} \Leftrightarrow m < 8.$

Bài tập 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 3m+1 \\ 3x + 2y = 2m-3 \end{cases}$

1. Giải hệ phương trình khi m = – 1.
2. Với giá trị nào của m thì hệ pt có nghiệm (x; y) thỏa $\begin{cases} x < 1 \\ y < 6 \end{cases}$.

HD: *1. Khi m = – 1 , hệ pt có nghiệm: x = 1 và y = – 4.*

2. Tìm:

- *Nghiệm của hệ (1) theo m: x = 4m + 5 ; y = – 9 – 5m .*
- *Theo đề bài:* $\begin{cases} x < 1 \\ y < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -1.$

Bài tập 7: Cho hệ phương trình : $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$ (1)

1. Giải hệ (1) khi m = 1.
2. Xác định giá trị của m để hệ (1):
   a) Có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó theo m.
   b) Có nghiệm (x, y) thỏa: x – y = 2.

HD: *1. Khi m = 1, hệ (1) có nghiệm: x = – 2 ; y = 1.*

2a) Khi m ≠ 0, hệ (1) có nghiệm: $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{m} \\ y = 1 \end{cases}$.

2b) $m = -\dfrac{2}{3}$.

Bài tập 8 : Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx - 2y = m \\ -2x + y = m+1 \end{cases}$ (m là tham số) (I).

a) Khi m = – 2, giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng.

b) Tính giá trị của tham số *m* để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất và tính nghiệm duy nhất đó theo m.

HD: *a) Khi m = – 2, hệ (I) có nghiệm:* $x = \dfrac{2}{3}$; $y = \dfrac{1}{3}$.

b)

- *Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi m $\neq 4$.*
- *Khi đó hệ(I) có nghiệm duy nhất:* $x = \dfrac{3m+2}{m-4}$; $y = \dfrac{m^2+3m}{m-4}$

CHỦ ĐỀ : VẼ ĐỒ THỊ & TÌM TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM CỦA (P): $y = ax^2$ VÀ (D): y = ax + b ($a \neq 0$)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1.Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$:

- Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ có những tính chất sau:
  - Nếu a > 0 thì hàm số đồng biến khi x > 0 và nghịch biến khi x < 0.
  - Nếu a < 0 thì hàm số đồng biến khi x < 0 và nghịch biến khi x > 0.
- Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$:
  - Là một Parabol (P) với đỉnh là gốc tọa độ 0 và nhận trục Oy làm trục đối xứng.
  - Nếu a > 0 thì đồ thị nằm phía trên trục hoành. 0 là điểm thấp nhất của đồ thị.
  - Nếu a < 0 thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành. 0 là điểm cao nhất của đồ thị.
- Vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$:
  - Lập bảng các giá trị tương ứng của (P).
  - Dựa và bảng giá trị $\rightarrow$ vẽ (P).

2. Tìm giao điểm của hai đồ thị :(P): $y = ax^2 (a \neq 0)$ và (D): y = ax + b:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D): cho 2 vế phải của 2 hàm số bằng nhau $\rightarrow$ đưa về pt bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$.
- Giải pt hoành độ giao điểm:
  + Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow$ pt có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$(D) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
  + Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow$ pt có nghiệm kép $\Rightarrow$(D) và (P) tiếp xúc nhau.
  + Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow$ pt vô nghiệm $\Rightarrow$(D) và (P) không giao nhau.

3. Xác định số giao điểm của hai đồ thị :(P): $y = ax^2 (a \neq 0)$ và (D_m) theo tham số m:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D_m): cho 2 vế phải của 2 hàm số bằng nhau $\rightarrow$ đưa về pt bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$.
- Lập Δ (hoặc Δ') của pt hoành độ giao điểm.
- Biện luận:
  + (D_m) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi $\Delta > 0 \rightarrow$ giải bất pt $\rightarrow$ tìm m.
  + (D_m) tiếp xúc (P) tại 1 điểm $\Delta = 0 \rightarrow$ giải pt $\rightarrow$ tìm m.
  + (D_m) và (P) không giao nhau khi $\Delta < 0 \rightarrow$ giải bất pt $\rightarrow$ tìm m.

II. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1: Cho hai hàm số $y = \dfrac{x^2}{2}$ có đồ thị (P) và y = -x + m có đồ thị (D_m).

1. Với m = 4, vẽ (P) và (D_4) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc Oxy. Xác định tọa độ các giao điểm của chúng.
2. Xác định giá trị của m để:
   a) (D_m) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 1.
   b) (D_m) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
   c) (D_m) tiếp xúc (P). Xác định tọa độ tiếp điểm.

HD: 1. Tọa độ giao điểm: **(2 ; 2)** và **(– 4 ; 8)**.

2a). m = $\frac{3}{2}$.

2b) $\Delta' = 1 + 2m > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}$.

2c) m = $-\frac{1}{2}$ → tọa độ tiếp điểm **(-1 ; $\frac{1}{2}$).**

Bài tập 2: Cho hai hàm số y = – 2x^2 có đồ thị (P) và y = – 3x + m có đồ thị (D_m).

1. Khi m = 1, vẽ (P) và (D_1) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc Oxy. Xác định tọa độ các giao điểm của chúng.
2. Xác định giá trị của m để:
   a) (D_m) đi qua một điểm trên (P) tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{1}{2}$.
   b) (D_m) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
   c) (D_m) tiếp xúc (P). Xác định tọa độ tiếp điểm.

HD: 1. Tọa độ giao điểm: **($\frac{1}{2}$; – $\frac{1}{2}$;)** và **(1 ; – 2)**.

2a). m = – 2.

2b) m < $\frac{9}{8}$.

2c) m = $\frac{9}{8}$ → tọa độ tiếp điểm **($\frac{3}{4}$; – $\frac{9}{8}$).**

Bài tập 3: Cho hàm số y = – 2x^2 có đồ thị (P).

1. Vẽ (P) trên một hệ trục tọa độ vuông góc..
2. Gọi A($-\frac{2}{3}$;-7) và B(2; 1).
   a) Viết phương trình đường thẳng AB.
   b) Xác định tọa độ các giao điểm của đường thẳng AB và (P).
3. Tìm điểm trên (P) có tổng hoành độ và tung độ của nó bằng – 6.

HD: 2a). Đường thẳng AB có phương trình y = = 3x – 5.

2b). Tọa độ giao điểm: **(1;– 2)** và **($-\frac{5}{2}$;$-\frac{25}{2}$).**

3. Gọi M(x_M; y_M) là điểm trên (P) thỏa đề bài, ta có: $x_M + y_M = -6$.

Mặt khác: M(x_M; y_M) $\in$ (P) $\Rightarrow$ $y_M = -2x_M^2$ nên: $x_M + y_M = -6 \Leftrightarrow x_M + (-2x_M^2) = -6$

$$\Leftrightarrow -2x_M^2 + x_M + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = -8 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_2 = -\frac{9}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy có 2 điểm thỏa đề bài: M_1(2; – 8) và M_2($-\frac{3}{2}$;$-\frac{9}{2}$).

Bài tập 4: Cho hàm số y = $-\frac{3}{2}x^2$ có đồ thị (P) và y = – 2x + $\frac{1}{2}$ có đồ thị (D).

1. Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc.
2. Xác định tọa độ các giao điểm của (P) và (D).
3. Tìm tọa độ những điểm trên (P) thỏa tính chất tổng hoành độ và tung độ của điểm đó bằng – 4.

HD: 2. Tọa độ giao điểm: $\left(\frac{1}{3};\ -\frac{1}{6}\right)$ và $\left(1\ ;-\frac{3}{2}\right)$.

3. Gọi M(x_M; y_M) là điểm trên (P) thỏa đề bài, ta có: $x_M + y_M = -4$.

Mặt khác: $M(x_M; y_M) \in (P) \Rightarrow y_M = -\frac{3}{2}x_M^2$ nên: $x_M + y_M = -4 \Leftrightarrow x_M + \left(-\frac{3}{2}x_M^2\right) = -4$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x_M^2 + x_M + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{4}{3} \Rightarrow y_1 = -\frac{8}{3} \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = -6 \end{array}\right..$$

Vậy có 2 điểm thỏa đề bài: $M_1\left(-\frac{4}{3};-\frac{8}{3}\right)$ và $M_2(2; -6)$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^2$ có đồ thị (P) và $y = x + \frac{5}{3}$ có đồ thị (D).

1. Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc.
2. Xác định tọa độ các giao điểm của (P) và (D).
3. Gọi A là điểm $\in$ (P) và B là điểm $\in$ (D) sao cho $\begin{cases} x_A = x_B \\ 11y_A = 8y_B \end{cases}$. Xác định tọa độ của A và B.

HD: 2. Tọa độ giao điểm: $\left(-1\ ;\ \frac{2}{3}\right)$ và $\left(\frac{5}{2};\ \frac{25}{6}\right)$.

3. Đặt $x_A = x_B = t$.

- $A(x_A; y_A) \in (P) \Rightarrow y_A = \frac{2}{3}x_A^2 = \frac{2}{3}t^2$.
- $B(x_B; y_B) \in (D) \Rightarrow y_B = x_B + \frac{5}{3} = t + \frac{5}{3}$
- Theo đề bài: $11y_A = 8y_B \Leftrightarrow 11.\frac{2}{3}t^2 = 8.\left(t + \frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{22}{3}t^2 - 8t - \frac{40}{3} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -\frac{10}{11} \end{array}\right..$
- Với t = 2 $\Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 \Rightarrow y_A = \frac{8}{3} \Rightarrow A\left(2;\frac{8}{3}\right) \\ x_B = 2 \Rightarrow y_B = \frac{11}{3} \Rightarrow B\left(2;\frac{11}{3}\right) \end{cases}.$
- Với t = $-\frac{10}{11} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -\frac{10}{11} \Rightarrow y_A = \frac{200}{363} \Rightarrow A\left(-\frac{10}{11};\frac{200}{363}\right) \\ x_B = -\frac{10}{11} \Rightarrow y_B = \frac{25}{33} \Rightarrow B\left(-\frac{10}{11};\frac{25}{33}\right) \end{cases}.$

Bài tập 6: Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho hai điểm A(1; –2) và B(–2; 3).

1. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A, B.
2. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = -2x^2$.

a) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ đã cho.
b) Xác định tọa độ các giao điểm của (P) và (d).

HD: 1. Phương trình đường thẳng AB: $y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$.

2. Tọa độ giao điểm: **(1; –2)** và **$(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{18})$**.

Bài tập 7: Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -2x^2$ trên mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy.

1. Gọi (D) là đường thẳng đi qua điểm A(–2; –1) và có hệ số góc k.
   a) Viết phương trình đường thẳng (D).
   b) Tìm k để (D) đi qua B nằm trên (P) biết hoành độ của B là 1.

HD: 2a).

- Phương trình đường thẳng (D) có dạng tổng quát: y = ax + b.
- (D) có hệ số góc k $\Rightarrow$(D): y = kx + b.
- (D) đi qua A(–2; –1) $\Rightarrow -1 = k.(-2) + b \Rightarrow b = 2k - 1$.
- Phương trình đường thẳng (D): y = kx + 2 k – 1.

2b)

- Điểm $B(x_B; y_B) \in (P) \Rightarrow B(1; -2)$.
- (D) đi qua B(1; –2) nên: $-2 = k.1 + 2k - 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$.

Bài tập 8: Cho hai hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và y = x + 2 có đồ thị (D).

1. Vẽ (P) và(D) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc Oxy. Xác định tọa độ các giao điểm của chúng.
2. Gọi A là điểm thuộc (D) có hoành độ bằng 5 và B là điểm thuộc (P) có hoành độ bằng – 2. Xác định tọa độ của A, B.
3. Tìm tọa độ của điểm I nằm trên trục tung sao cho: IA + IB nhỏ nhất.

HD: 1. Tọa độ giao điểm: **(2; 4)** và **(–1; 1)**.
2. Tọa độ của A**(5; 7)** và B**(– 2 ; 4)**
3.

- $I(x_I, y_I) \in Oy \Rightarrow I(0: y_I)$.
- IA + IB nhỏ nhất khi ba điểm I, A, B thẳng hàng.
- Phương trình đường thẳng AB: $y = \frac{3}{7}x + \frac{34}{7}$.
- $I(x_I, y_I) \in$ đường thẳng AB nên: $y_I = \frac{3}{7}.0 + \frac{34}{7} = \frac{34}{7} \Rightarrow I(0; \frac{34}{7})$

Bài tập 9: Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (P) và y = x – 2 có đồ thị (D).

a) Vẽ (P) và(D) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (D) bằng phương pháp đại số.
b) Gọi A là một điểm thuộc (D) có tung độ bằng 1 và B là một điểm thuộc (P) có hoành độ bằng – 1. Xác định tọa độ của A và B.
c) Tìm tọa độ của điểm M thuộc trục hoành sao cho MA + MB nhỏ nhất.

HD: a) Tọa độ giao điểm: **(2; – 4)** và **(–1; 1)**.
b) Tọa độ của A**(3; 1)** và B**(– 1 ; – 1)**.

c)

- $y_A = 1 > 0$, $y_B = -1 < 0 \Rightarrow$ A, B nằm khác phía đối với trục Ox do đó MA + MB nhỏ nhất khi M, A, B thẳng hàng $\Rightarrow$ M là giao điểm của AB với truc Ox.
- Đường thẳng AB có dạng: y = ax + b. Đường thẳng AB đi qua hai điểm A, B

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 3a + b \\ -1 = -a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$ $\rightarrow$ Đường thẳng AB: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

- Tọa độ M là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.
- Vậy: M(1; 0).

Bài tập 10: Cho (P): $y = x^2$ và (D): $y = -x + 2$.

1. Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ vuông góc Oxy. Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (D), xác định tọa độ của A, B.
2. Tính diện tích tam giác AOB (đơn vị đo trên trục số là cm).
3. CMR: Tam giác AOB là tam giác vuông.

HD: 1. Tọa độ giao điểm: **(1; 1)**và **(– 2; 4)**.

2. Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên trục Ox, ta có:

- ΔOHA vuông tại H $\Rightarrow S_{OHA} = \frac{1}{2}$ OH.OA = $\frac{1}{2}.1.\ 1 = \frac{1}{2}$ (cm^2).
- ΔOKB vuông tại K $\Rightarrow S_{OKB} = \frac{1}{2}$ OK.KB = $\frac{1}{2}.2.\ 4 = 4$ (cm^2).
- Gọi I là giao điểm của (D) với trục Ox $\Rightarrow y_I = 0 \Rightarrow x_I = 2 \Rightarrow$ I(2; 0).
- ΔIKB vuông tại K $\Rightarrow S_{IKB} = \frac{1}{2}$ BK.KI = $\frac{1}{2}.4.\ 4 = 8$ (cm^2).
- $S_{OAB} = S_{IKB} - (S_{OHA} + S_{OKB}) = 8 - (\frac{1}{2} + 4) = 3,5$ (cm^2).

3.

- Phương trình đường thẳng OA: y = a’x (D’).
- (D’) đi qua A(1; 1) $\Rightarrow$ a = 1 $\Rightarrow$ (D’): y = x.
- (D) có a = – 1 và (D’) có a’ = 1 $\rightarrow$ a. a’ = – 1 $\Rightarrow$ (D) $\perp$ (D’)

$\Rightarrow$ OA $\perp$ AB $\Rightarrow$ ΔOAB vuông tại A.

CHỦ ĐỀ : CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giải phương trình bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1)

a) *Nhẩm nghiệm:*

- a + b +c = 0 $\Rightarrow$pt (1) có 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{array}\right.$.
- a – b +c = 0 $\Rightarrow$pt (1) có 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{array}\right.$.

b) *Giải với* Δ':

Nếu b = 2b’ $\Rightarrow$b’ = $\frac{b}{2}$ $\Rightarrow$ Δ' = (b’)^2 – ac.

- Nếu $\Delta' > 0$ $\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$
- Nếu $\Delta' = 0$ $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$ $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

c) *Giải với* Δ:

Tính Δ: Δ = b^2 – 4ac.

- Nếu $\Delta > 0$ $\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Nếu $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

2. Hệ thức Vi ét và ứng dụng:

a) Định lý: Nếu x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình ax^2 + bx + c = 0 (a$\neq$0) thì ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

b) Định lý đảo: Nếu $\begin{cases} u + v = S \\ u.v = P \end{cases}$

$\Rightarrow$ u, v là 2 nghiệm của phương trình x^2 – Sx + P = 0 (ĐK: S^2 – 4P $\geq$ 0).

**** Một số hệ thức khi áp dụng hệ thức Vi-ét:***

- Tổng bình phương các nghiệm: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ = S^2 – 2P.
- Tổng nghịch đảo các nghiệm: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$.
- Tổng nghịch đảo bình phương các nghiệm: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1x_2)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$.
- Bình phương của hiệu các nghiệm: $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$ = S^2 – 4P.
- Tổng lập phương các nghiệm: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$ = S^3 – 3PS

Ví dụ: Cho phương trình x^2 – 12x + 35 = 0. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $x_1^2+x_2^2$. b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$. c) $(x_1-x_2)^2$ d) $x_1^3+x_2^3$

Giải:

Phương trình có $\Delta' = 1 > 0$ $\Rightarrow$ pt có 2 nghiệm, áp dụng hệ thức Vi-ét cho pt (1): $\begin{cases} S = x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = 12 \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = 35 \end{cases}$.

a) $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$ = $S^2 - 2P = 12^2 - 2.35 = 74$.

b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P} = \frac{12}{35}$.

c) $(x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P = 12^2 - 4.35 = 4$.

d) $x_1^3+x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)$ = $S^3 - 3PS = 12^3 - 3.35.12 = 468$.

3.Tìm hệ thức giữa hai nghiệm độc lập đối với tham số:*(Tìm hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số).*

** Phương pháp giải:*

- Tìm điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm ($\Delta' \geq 0; \Delta \geq 0$ hoặc a.c < 0).
- Lập hệ thức Vi-ét cho phương trình $\begin{cases} S = x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.
- Khử tham số (bằng phương pháp cộng đại số) tìm hệ thức liên hệ giữa S và P $\rightarrow$ Đó là hệ thức độc lập với tham số.

Ví dụ: Cho phương trình $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$ (1) (m là tham số).

1. CMR: Phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.
2. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của pt (1). Tìm hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm không phụ thuộc vào m.

Giải:

1. Phương trình (1) có $\Delta = b^2 - 4ac = + (2m - 1)^2 - 4.2.(m - 1) = 4m^2 - 12m + 9 = (2m - 3)^2 \geq 0, \forall m$.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

2.

- Áp dụng hệ thức Vi-ét cho phương trình (1): $\begin{cases} S = x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-2m+1}{2} \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S = -2m+1 \\ 2P = m-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2S = -2m+1 \\ 4P = 2m-2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 2S + 4P = -1. Hay: $2(x_1 + x_2) + 4x_1x_2 = -1$: Đây là hệ thức cần tìm.

4. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng – Lập phương trình bâc hai khi biết hai nghiệm của nó:

** Phương pháp giải:*

- Nếu 2 số u và v c ó: $\begin{cases} u+v=S \\ u.v=P \end{cases}$ $\Rightarrow$ u, v là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$ (*).
- Giải pt (*):

  + Nếu $\Delta' > 0$ (hoặc $\Delta > 0$) $\Rightarrow$ pt (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Vậy $\begin{cases} u=x_1 \\ v=x_2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=x_2 \\ v=x_1 \end{cases}$.

  + Nếu $\Delta' = 0$ (hoặc $\Delta = 0$) $\Rightarrow$ pt (*) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$. Vậy $u = v = -\frac{b'}{a}$.

  + Nếu $\Delta' < 0$ (hoặc $\Delta < 0$) $\Rightarrow$ pt (*) vô nghiệm. Vậy không có 2 số u, v thỏa đề bài.

Ví dụ 1: Tìm 2 số u,v biết u + v = 11 và u.v = 28

Giải:

Theo đề bài $\Rightarrow$ u, v là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0$(*)

Phương trình (*) có $\Delta = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 7 \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$.

Vậy: $\begin{cases} u = 7 \\ v = 4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u = 4 \\ v = 7 \end{cases}$

Ví dụ 2: Cho hai số a = $\sqrt{3}$ +1 và b = 3 – $\sqrt{3}$. Viết phương trình bậc hai có hai nghiệm là a và b.

Giải:

- a + b = ($\sqrt{3}$+1) + (3 – $\sqrt{3}$) = 4.
- a.b = ($\sqrt{3}$+1). (3 – $\sqrt{3}$) = 2$\sqrt{3}$.

Suy ra: a, b là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$: Đây là pt cần tìm.

5. Chứng minh phương trình bậc hai <u>luôn có hai nghiệm phân biệt</u> với mọi giá trị của tham số m:

** Phương pháp giải:*

- Lập biệt thức Δ' (hoặc Δ).
- Biến đổi Δ' đưa về dạng : $\Delta' = (A \pm B)^2 + c > 0$, $\forall$ m (với c là một số dương)
- Kết luận: Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi tham số m.

6. Chứng minh phương trình bậc hai <u>luôn có nghiệm</u> với mọi giá trị của tham số m:

** Phương pháp giải:*

- Lập biệt thức Δ' (hoặc Δ).
- Biến đổi Δ' đưa về dạng : $\Delta' = (A \pm B)^2 \geq 0$, $\forall$ m.
- Kết luận: Vậy phương trình đã cho luôn nghiệm với mọi tham số m.

7. Biện luận phương trình bậc hai theo tham số m:

** Phương pháp giải:*

- Lập biệt thức Δ' (hoặc Δ).
- Biện luận:

  + Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi: $\Delta' > 0 \rightarrow$ giải bất pt $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.

  + Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta' = 0 \rightarrow$ giải pt $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.

  + Phương trình vô nghiệm khi $\Delta' < 0 \rightarrow$ giải bất pt $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.

+ Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \rightarrow$ giải bất pt $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.

** Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi: a.c < 0* $\rightarrow$ giải bất pt $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.

8. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

** Phương pháp giải:*

- *Đưa biểu thức P cần tìm về dạng:* $P = (A \pm B)^2 + c \Rightarrow P = (A \pm B)^2 + c \geq \mathbf{c}$.
- *Giá trị nhỏ nhất của P:* $P_{min} = \mathbf{c}$ *khi* $A \pm B = 0 \rightarrow$ giải pt $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.

9. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức:

** Phương pháp giải:*

- *Đưa biểu thức Q cần tìm về dạng:* $Q = c - (A \pm B)^2 \Rightarrow Q = c - (A \pm B)^2 \leq \mathbf{c}$

Giá trị nhỏ nhất của Q: $Q_{max} = \mathbf{c}$ *khi* $A \pm B = 0 \rightarrow$ giải pt $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.

II. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1: Cho phương trình bậc hai $x^2 - (m - 3)x - 2m = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi m = – 2.
2. CMR: Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.
3. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

HD: *1. Khi m = –2, ta có phương trình:* $x^2 + 5x + 4 = 0$*, pt có* $a - b + c = 1 - 5 + 4 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{4}{1} = -4 \end{array}\right.$$

Vậy khi m = – 2, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = -1, x_2 = -4$.

2. $\Delta = m^2 + 2m + 9 = (m + 1)^2 + 8 > 0, \forall m$.

3. Hệ thức: $2S + P = -6 \Rightarrow 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -6$.

Bài tập 2: Cho phương trình bậc hai $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi m = 3.
2. CMR: Phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.
3. Trong trường hợp (1) có hai nghiệm phân biệt.Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

HD: *1. Khi m = 3, ta có phương trình:* $x^2 - 4x + 3 = 0$*, pt có* $a + b + c = 1 + (-4) + 3 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3 \end{array}\right. .$$

Vậy khi m = 3, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = 1, x_2 = 3$.

2. $\Delta = (m - 1)^2 \geq 0, \forall m$.

3.

- *ĐK để pt (1) có 2 nghiệm phân biệt:* $(m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow |m - 1| > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 1 \end{array}\right.$.
- *Hệ thức:* $S - P = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$.

Bài tập 3 : Cho phương trình $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$ (m là tham số) (1)

1. Giải phương trình (1) khi m = 2.
2. CMR: Phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

3. Trong trường hợp (1) có hai nghiệm phân biệt.Thiết lập hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

HD: *1. Khi m = 2, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:* $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

2. $\Delta = (2m-3)^2 \geq 0, \forall m$.

3.

- *ĐK để pt (1) có 2 nghiệm phân biệt:* $(2m-3)^2 > 0 \Leftrightarrow |2m-3| > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{3}{2} \\ m < \frac{3}{2} \end{array}\right.$.
- *Hệ thức:* $2S + 4P = 1 \Rightarrow 2(x_1 + x_2) + 4x_1x_2 = 1$.

Bài tập 4 : Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 3 = 0$ (m là tham số) (1)

1. Giải phương trình (1) khi m = 5.
2. CMR: Phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.
3. Trong trường hợp (1) có hai nghiệm phân biệt.Thiết lập hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.
4. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.

HD: *1. Khi m = 5, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:* $x_1 = 1$, $x_2 = 7$.

2. $\Delta = (m-2)^2 \geq 0, \forall m$.

3.

- *ĐK để pt (1) có 2 nghiệm phân biệt:* $(m-2)^2 > 0 \Leftrightarrow |m-2| > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 2 \end{array}\right.$.
- *Hệ thức:* $S - P = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$.

4. Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi $a.c < 0 \Leftrightarrow 1.(2m-3) < 0 \Rightarrow m < \frac{3}{2}$

Bài tập 5 : Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$ (1).

1. Tìm m để:
   a) Pt (1) có 2 nghiệm phân biệt.
   b) Pt (1) có một nghiệm là – 2.
2. Giả sử x_1, x_2 là 2 nghiệm của pt (1). CMR: $(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) + 4 = 0$.

HD: *1a.*

- *Phương trình (1) có* $\Delta' = 1 - 2m$.
- *Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi* $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

1b. Pt (1) có một nghiệm là – 2 khi: $(-2)^2 - 2(m-1)(-2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 = -4 \end{array}\right.$.

Vậy khi m = 0 hoặc m = – 4 thì pt (1) có một nghiệm là – 2.

2. *Áp dụng hệ thức Vi-ét cho pt (1):* $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ P = x_1x_2 = m^2 \end{cases}$

Ta có: $(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) + 4 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 4$

$= (2m-2)^2 - 4m^2 + 4(2m-2) + 4$

$= 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 8m - 8 + 4 = 0$ (đpcm).

Bài tập 6 :

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = -2$.
2. CMR: $\forall m$, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt
3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của pt (1). Chứng minh biểu thức:
   $A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc vào m.

HD: *1. Khi $m = -2 \Rightarrow x_1 = -1+\sqrt{7}$; $x_2 = -1-\sqrt{7}$.*

2. $\Delta' = m^2 + m + 5 = \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0,\ \forall m$.

3. Áp dụng hệ thức Vi-ét cho pt (1): $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2m+2 \\ P = x_1x_2 = m-4 \end{cases}$

Theo đề bài: $A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) = x_1 - x_1x_2 + x_2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2) - 2x_1x_2$
$= (2m + 2) - 2(m - 4) = 10$.

Vậy A = 10 không phụ thuộc vào m.

Bài tập 7: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m + 1)x + (2m - 4) = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = -2$.
2. CMR: Với mọi m, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1). Tính $A = x_1^2 + x_2^2$ theo m.
4. Tìm giá trị của m để A đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 8: Cho phương trình bậc hai $x^2 - (m - 1)x + 2m - 7 = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = -1$.
2. CMR: Với mọi m, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
3. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.
4. Thiết lập mối quan hệ giữa 2 nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc và m.
5. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

HD: *1. Khi $m = -1 \Rightarrow x_1 = -1+\sqrt{10}$; $x_2 = -1-\sqrt{10}$.*

2. $\Delta = m^2 - 10m + 29 = (m - 5)^2 + 4 > 0,\ \forall m$.

3. Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi a.c < 0 $\Leftrightarrow 1.(2m - 7) < 0 \Rightarrow m < \frac{7}{2}$.

4. Hệ thức cần tìm: $2S - P = 5 \Rightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 5$.

5. $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Rightarrow m = 1$ hoặc $m = 5$.

Bài tập 9: Cho phương trình bậc hai $x^2 + 2x + 4m + 1 = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = -1$.
2. Tìm m để:
   a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
   b) Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.
   c) Tổng bình phương các nghiệm của pt (1) bằng 11.

HD: *1. Khi $m = -1 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = -3$.*

2a. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta = -4m > 0 \Rightarrow m < 0$.

2b. Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi a.c < 0 $\Leftrightarrow 1.(4m + 1) < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{4}$.

2c. Tổng các bình phương hai nghiệm của pt (1) bằng 11 $\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 11 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 11$

$\Leftrightarrow 2 - 8m = 11 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{8}$.

Bài tập 10: Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 10 = 0$ (m là tham số) (1).

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép và tính nghiệm kép đó.

b) Trong trường hợp phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 hãy tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1, x_2 mà không phụ thuộc m.

HD: *a)*

a. *Phương trình (1) có nghiệm kép* $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -3 \end{array}\right.$.

b. *Khi* $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -3 \end{array}\right.$ *pt (1) có nghiệm kép* $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = m + 1$.

c. *Khi* $m = 3 \Rightarrow x_1 = x_2 = 4$.

d. *Khi* $m = -3 \Rightarrow x_1 = x_2 = -2$.

b)

- *Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *khi* $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$.
- *Hệ thức:* $S - P = -8 \Rightarrow x_1 + x_2 - x_1x_1 = -8$ *hay:* $x_1x_1 - (x_1 + x_2) = 8$.

CHỦ ĐỀ: GIẢI BÀI TOÁN
BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH – LẬP PHƯƠNG TRÌNH

I. KIEÁN THÖÙC CAÀN NHÔÙ

Các bước giải:

1. Lập phương trình (hoặc hệ phương trình):
   - Chọn ẩn số và xác định điều kiện thích hợp cho ẩn;
   - Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và qua các đại lượng đã biết ;
   - Lập phương trình (hoặc hệ phương trình) biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng
2. Giải phương trình (hoặc hệ phương trình) vừa lập được.
3. Trả lời: Chỉ nhận nghiệm thỏa ĐK và trả lời yêu cầu của bài.

II. BAØI TAÄP VAÄN DUÏNG

Bài tập1: Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng chục lớn hớn chữ số hàng đơn vị là 2 và nếu viết thêm chữ số bằng chữ số hàng chục vào bên phải thì được một số lớn hơn số ban đầu là 682.

HD:

- *Gọi x là chữ số hàng chục* ($x \in N$, $0 < x \le 9$).
- *Gọi y là chữ số hàng đơn vị* ($y \in N$, $x \le 9$)
- *Số cần tìm có dạng* $\overline{xy} = 10x + y$

- *Vì chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 nên ta có pt:* $x - y = 2$ *(1)*
- *Khi thêm chữ số bằng chữ số hàng chục vào bên phải thì được số mới:* $\overline{xyx} = 100x + 10y + x = 101x + 10y$
- *Vì số mới lớn hơn số ban đầu là 682 nên ta có phương trình:*
$$(101x + 10y) - (10x + y) = 682 \Leftrightarrow 91x + 9y = 682 \quad (2).$$
- *Từ (1) và (2) ta có hệ pt:* $\begin{cases} x - y = 2 \\ 91x + 9y = 682 \end{cases}$
- *Giải hệ pt ta được* $\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$ *(thỏa ĐK)* $\Rightarrow$ *số cần tìm là 75.*

Bài tập 2: Có hai số tự nhiên, biết rằng: tổng của hai số bằng 59; hai lần số này bé hơn ba lần số kia là 7. Tìm hai số đó.

HD:

- *Gọi x, y là hai số cần tìm* $(x, y \in N)$
- *Theo đề bài ta có hệ pt:* $\begin{cases} x + y = 59 \\ 2x + 7 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 59 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$
- *Giải hệ ta được:* $\begin{cases} x = 34 \\ y = 25 \end{cases}$ *(thỏa ĐK)* $\Rightarrow$ *hai số cần tìm là 34 và 25.*

Bài tập 3: Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình: Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Tổng của hai chữ số của nó bằng 10; tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

HD:

- *Gọi x là chữ số hàng chục của số đã cho* $(x \in N, 0 < x \le 9)$
- *Chữ số hàng đơn vị:* $10 - x$
- *Số đã cho có dạng:* $10.x + (10 - x) = 9x + 10$
- *Tích của hai chữ số ấy:* $x(10 - x)$
- *Theo đề bài ta có phương trình:* $(9x + 10) - x(10 - x) = 12 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$
- *Giải pt trên ta được:* $x_1 = -1$ *(loại);* $x_2 = 2$ *(nhận)*
- *Vậy số cần tìm là 28.*

Bài tập 4: Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình: Một hình chữ nhật có chu vi là 280m. Nếu giảm chiều dài của hình chữ nhật 2m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích của nó tăng thêm $144m^2$. Tính các kích thước của hình chữ nhật.

HD:

- *Nửa chu vi hình chữ nhật:* $\frac{280}{2} = 140$ *(m).*
- *Gọi x (m) là chiều dài của hình chữ nhật* $(0 < x < 140)$.
- *Chiều rộng của hình chữ nhật là* $140 - x$ *(m).*
- *Diện tích ban đầu của hình chữ nhật là* $x(140 - x)$ (m^2).
- *Khi giảm chiều dài của hình chữ nhật 2m và tăng chiều rộng thêm 3m thì hình chữ nhật mới có diện tích:* $(x - 2)[(140 - x) + 3] = (x - 2)(143 - x)$ (m^2)
- *Vì diện tích hình chữ nhật tăng thêm* $144m^2$ *nên ta có phương trình:*
$$(x - 2)(143 - x) - x(140 - x) = 144 \Leftrightarrow 5x = 430 \Leftrightarrow x = 86 \text{ (thỏa ĐK)}$$

- *Vậy hình chữ nhật có chiều dài 86m và chiều rộng là: 140 – x = 140 – 86 = 54 (m).*

Bài tập 5: Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 320m. Nếu chiều dài của khu vườn tăng 10m và chiều rộng giảm 5m thì diện tích của nó tăng thêm 50m^2. Tính diện tích của khu vườn ban đầu.

HD:

- *Chiều dài là 100m và chiều rộng là 60m.*
- *Diện tích khu vườn: 6 000 m^2.*

Bài tập 6: Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình: Một hình chữ nhật có chu vi 160cm và có diện tích 1500m^2. Tính các kich thước của nó.

HD:

- *Nửa chu vi hình chữ nhật:* $\frac{160}{2}$ *= 80 (m).*
- *Gọi x (m) là một kích thước của hình chữ nhật (0 < x < 80).*
- *Kích thước còn lại của hình chữ nhật là 80 – x (m).*
- *Diện tích của hình chữ nhật là x(80 – x) (m^2).*
- *Vì diện tích hình chữ nhật là 1500m^2 nên ta có phương trình:*

$x(80 - x) = 1500 \Leftrightarrow x^2 - 80x + 1500 = 0$

- *Giải pt trên ta được: $x_1 = 30$ (nhận); $x_2 = 50$ (nhận).*
- *Vậy hình chữ nhật có các kích thước là 30m và 50m.*

Bài tập 7: Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình: Một sân trường hình chữ nhật có chu vi là 340m. Ba lần chiều dài hơn 4 lần chiều rộng là 20m. Tính diện tích của sân trường.

HD:

- *Gọi x, y (m) lần lượt là chiều dài và chiều rộng sân trường (0 < x, y < 170)*
- *Vì sân trường có chu vi 340m nên ta có phương trình: 2(x + y) = 340 ⇔ x + y = 170 (1).*
- *Vì ba lần chiều dài hơn 4 lần chiều rộng là 20m nên ta có pt: 3x – 4y = 20 (2).*
- *Từ (1) và (2) ta có hệ pt:* $\begin{cases} x + y = 170 \\ 3x - 4y = 20 \end{cases}$
- *Giải hệ pt ta được* $\begin{cases} x = 100 \\ y = 70 \end{cases}$ *(thỏa ĐK).*

Bài tập 8: Cho một tam giác vuông. Nếu tăng các cạnh góc vuông lên 4cm và 5cm thì diện tích tam giác sẽ tăng thêm 110cm^2. Nếu giảm cả hai cạnh này đi 5cm thì diện tích sẽ giảm đi 100cm^2. Tình hai cạnh góc vuông của tam giác.

HD:

- *Gọi x (cm), y (cm) là độ dài hai cạnh góc vuông (x > 5, y > 5).*
- *Theo đề bài ta có hệ pt:* $\begin{cases} 5x + 4y = 200 \\ x + y = 45 \end{cases}$
- *Giải hệ pt ta được* $\begin{cases} x = 20 \\ y = 25 \end{cases}$ *(thỏa ĐK).*
- *Vậy độ dài hai cạnh góc vuông là 20cm và 25cm.*

Bài tập 9: Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5cm, diện tích bằng 6cm^2. Tìm độ dài các cạnh góc vuông.

HD:

- *Gọi x (cm), y (cm) là độ dài hai cạnh góc vuông (0 < x, y < 5).*
- *Vì tam giác có cạnh huyền 5cm nên ta có pt:* $x^2 + y^2 = 25$ *(1).*
- *Vì tam giác có diện tích 6cm^2 nên ta có pt:* $\frac{1}{2}xy = 6 \Leftrightarrow xy = 12$ *(2).*
- *Từ (1) và (2) ta có hệ pt:* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x.y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 25 \\ x.y = 12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 49 \\ x.y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 7 \\ x.y = 12 \end{cases} \text{(vì } x, y > 0)$$

- *Giải hệ pt ta được* $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ *(thỏa ĐK).*
- *Vậy độ dài hai cạnh góc vuông là 3cm và 4cm.*

Bài tập 10: Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình: Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 4 giờ 48 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì mới đầy bể?

HD:

- *Gọi x (h), y (h) lần lượt là thời gian vòi 1, vòi 2 chảy riêng đầy bể (x > 3, y > 4).*
- *Trong 1h, vòi 1 chảy được:* $\frac{1}{x}$ *(bể).*
- *Trong 1h, vòi 2 chảy được:* $\frac{1}{y}$ *(bể).*
- *Vì hai vòi nước cùng chảy trong 4 giờ 48 phút =* $\frac{24}{5}h$ *sẽ đầy bể nên trong 1h hai vòi cùng chảy được*

$\frac{5}{24}$ *bể, do đó ta có pt:* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$ *(1).*

- *Vì vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được* $\frac{3}{4}$ *bể nước nên ta có pt:* $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4}$ *(2).*
- *Từ (1) và (2) ta có hệ pt:* $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$ *(I)*

- *Đặt* $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$*, hệ (I) trở thành:* $\begin{cases} u + v = \frac{5}{24} \\ 3u + 4v = \frac{3}{4} \end{cases}$ *(II).*
- *Giải hệ (II), ta được:* $\begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \end{cases}$ *(thỏa ĐK).*
- *Vậy: Vòi 1 chảy riêng đầy bể trong 12h, vòi 2 chảy riêng đầy bể trong 8h.*

Bài tập11: Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình: Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 1 giờ 20 phút thì đầy bể. Nếu để vòi thứ nhất chảy một mình trong 10 phút và vòi thứ hai chảy một mình trong 12 phút thì chỉ được $\frac{2}{15}$ thể tích của bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu sẽ đầy bể?

HD: *Vòi 1 chảy riêng đầy bể trong 120 phút = 2h, vòi 2 chảy riêng đầy bể trong 240 phút = 4h.*

Bài tập 12: Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình: Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể cạn (không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới bể nước. Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu mới đầy bể?

HD:

- *Gọi x (h), y (h) lần lượt là thời gian vòi 1, vòi 2 chảy riêng đầy bể (* $x > 9, y > \frac{6}{5}$*).*
- *Trong 1h, vòi 1 chảy được:* $\frac{1}{x}$ *(bể).*
- *Trong 1h, vòi 2 chảy được:* $\frac{1}{y}$ *(bể).*
- *Vì hai vòi nước cùng chảy trong* $4\frac{4}{5}$ *giờ* $= \frac{24}{5}h$ *sẽ đầy bể nên trong 1h hai vòi cùng chảy được* $\frac{5}{24}$ *bể,*

do đó ta có pt: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$ *(1).*

- *Vì lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau* $\frac{6}{5}$ *giờ nữa mới bể nước nên ta có pt:* $\frac{9}{x} + \frac{6}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$ *(2).*

- *Từ (1) và (2) ta có hệ pt:* $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{24} \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 1 \end{cases}$ *(I)*
- *Đặt* $u = \dfrac{1}{x}, v = \dfrac{1}{y}$, *hệ (I) trở thành:* $\begin{cases} u + v = \dfrac{5}{24} \\ 9u + \dfrac{6}{5}(u+v) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \dfrac{5}{24} \\ \dfrac{51}{5}u + \dfrac{6}{5}v = 1 \end{cases}$ *(II).*
- *Giải hệ (II), ta được:* $\begin{cases} u = \dfrac{1}{12} \\ v = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \end{cases}$ *(thỏa ĐK).*
- *Vậy: Vòi 2 chảy riêng đầy bể trong 8h.*

Bài tập13: Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn chưa có nước thì sau 18 giờ đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất sẽ chảy đầy bể chậm hơn vòi thứ hai 27 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi mất bao lâu mới chảy đầy bể?

HD:

- *Gọi x (h) là thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể (x > 27).*
- *Thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể: x – 27 (h).*
- *Mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được* $\dfrac{1}{x}$ *(bể).*
- *Mỗi giờ vòi thứ hai chảy được* $\dfrac{1}{x-27}$ *(bể).*
- *Vì hai vòi cùng chảy thì sau 18 h bể đầy, nên trong 1h hai vòi cùng chảy được* $\dfrac{1}{18}$ *bể, do đó nên ta có pt:*

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-27} = \dfrac{1}{18} \Leftrightarrow x^2 - 63x + 486 = 0.$

- *Giải pt trên ta được:* $x_1 = 54$ *(nhận);* $x_2 = 9$ *(loại).*
- *Vậy: Vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong 542h, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong 27h.*

Bài tập 14: (HK II: 2008 – 2009 _ Sở GD&ĐT Bến Tre):

Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình: Hai tỉnh A và B cách nhau 90 km. Hai mô tô khởi hành đồng thời, xe thứ nhất từ A và xe thứ hai từ B đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ chúng gặp nhau. Tiếp tục đi, xe thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

HD:

- *Gọi x, y là vận tốc của xe I và xe II (x, y > 0).*
- *Sau một giờ hai xe gặp nhau nên tổng quãng đường hai xe đi được bằng đoạn đường AB, do đó ta có pt: x + y = 90 (1).*
- *Thời gian xe I đi hết đoạn đướng AB:* $\dfrac{90}{x}$ *(h).*

- *Thời gian xe II đi hết đoạn đướng AB:* $\frac{90}{y}$ *(h).*
- *Vì xe II tới A trước xe I tới B là 27 phút =* $\frac{9}{20}$ *h nên ta có pt:* $\frac{90}{x} - \frac{90}{y} = \frac{9}{20}$ *(2)*
- *Từ (1) và (2) ta có hệ pt:* $\begin{cases} x + y = 90 \\ \frac{90}{x} - \frac{90}{y} = \frac{9}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 90 - x & (a) \\ \frac{10}{x} - \frac{10}{90 - x} = \frac{1}{20} & (b) \end{cases}$.
- *Giải pt (b)ta được:* $x_1 = 40$*(nhận) ;* $x_2 = 450$ *(loại).*
- *Thế* $x = 40$ *vào (a)* $\Rightarrow y = 50$ *(nhận).*

Vậy:

- *Xe I có vận tốc: 40 km/h.*
- *Xe II có vận tốc: 50 km/h.*

Bài tập 15: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình: Hai tỉnh A và B cách nhau 110 km. Hai mô tô khởi hành đồng thời, xe thứ nhất từ A và xe thứ hai từ B đi ngược chiều nhau. Sau 2 giờ chúng gặp nhau. Tiếp tục đi, xe thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 44 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

HD:

- *Gọi x, y là vận tốc của xe I và xe II (x, y > 0).*
- *Sau 2 giờ hai xe gặp nhau nên tổng quãng đường hai xe đi được bằng đoạn đường AB, do đó ta có pt:* $2x + 2y = 110$ *(1).*
- *Thời gian xe I đi hết đoạn đướng AB:* $\frac{110}{x}$ *(h).*
- *Thời gian xe II đi hết đoạn đướng AB:* $\frac{110}{y}$ *(h).*
- *Vì xe II tới A trước xe I tới B là 44 phút =* $\frac{11}{15}$ *h nên ta có pt:* $\frac{110}{x} - \frac{110}{y} = \frac{11}{15}$ *(2)*
- *Từ (1) và (2) ta có hệ pt:* $\begin{cases} 2x + 2y = 110 \\ \frac{110}{x} - \frac{110}{y} = \frac{11}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 55 - x & (a) \\ \frac{110}{x} - \frac{110}{55 - x} = \frac{11}{15} & (b) \end{cases}$.
- *Giải pt (b)ta được:* $x_1 = 25$*(nhận) ;* $x_2 =$ *(loại).*
- *Thế* $x = 25$ *vào (a)* $\Rightarrow y =$ *(nhận).*

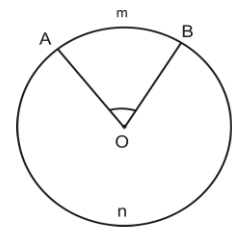
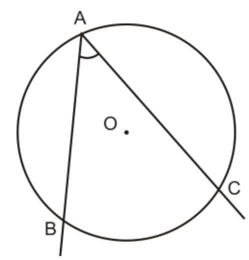
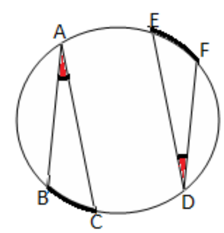
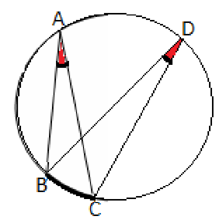
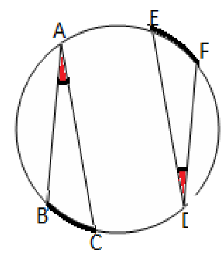
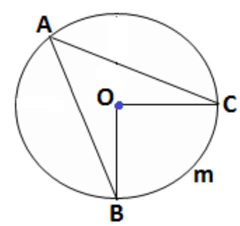
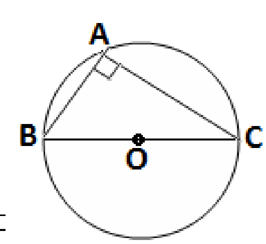
Vậy:

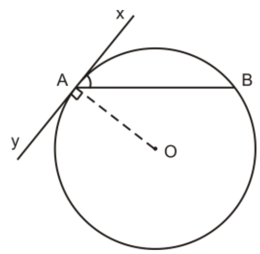
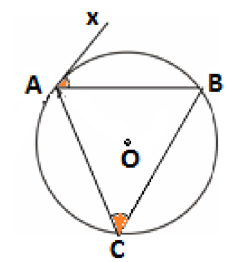
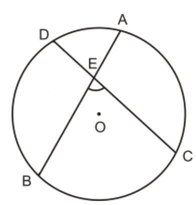
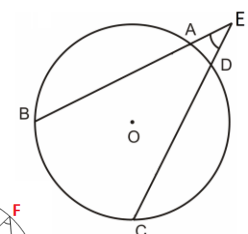
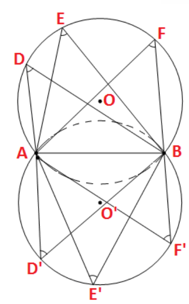
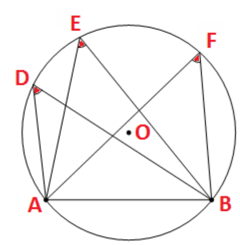
- *Xe I có vận tốc: 40 km/h.*
- *Xe II có vận tốc: 50 km/h.*

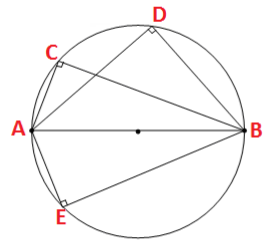
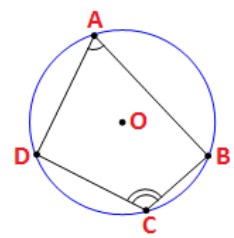
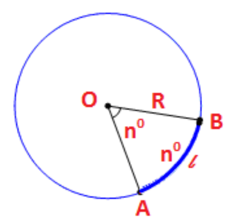
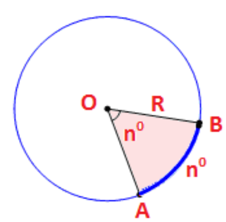
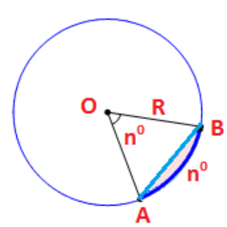
CHỦ ĐỀ : HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

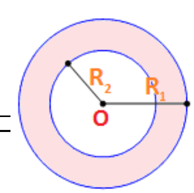
Định nghĩa – Định lý	*Ký hiệu toán học*	*Hình vẽ*

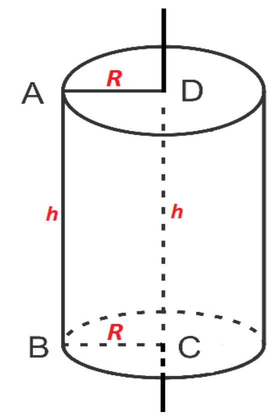
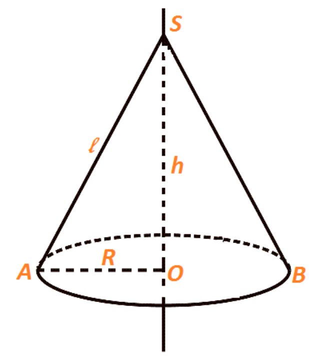
Hệ quả		
1. Góc ở tâm: *Trong một đường tròn, số đo của góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn.*	*(O,R) có:* $\widehat{AOB}$ *ở tâm chắn* $\overset{\frown}{AmB}$ $\Rightarrow \widehat{AOB} =$ *sđ* $\overset{\frown}{AmB}$	
2. Góc nội tiếp: * *<u>Định lý</u>: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.*	*(O,R) có:* $\widehat{BAC}$ *nội tiếp chắn* $\overset{\frown}{BC}$ $\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ *sđ* $\overset{\frown}{BC}$.	
* *<u>Hệ quả</u>: Trong một đường tròn:* *a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.*	*a) (O,R) có:* $\left.\begin{matrix}\widehat{BAC} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{BC}\\ \widehat{EDF} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{EF}\\ \widehat{BAC} = \widehat{EDF}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{EF}$	 
b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.	*b) (O,R) có:* $\left.\begin{matrix}\widehat{BAC} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{BC}\\ \widehat{BDC} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{BC}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ *(O,R) có:* $\left.\begin{matrix}\widehat{BAC} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{BC}\\ \widehat{EDF} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{EF}\\ \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{EF}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EDF}$	 
c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0*) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.*	*c) (O,R) có:* $\left.\begin{matrix}\widehat{BAC} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{BC}\\ \widehat{BOC} \text{ ở tâm chắn } \overset{\frown}{BC}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$	
d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.	*d) (O,R) có:* $\widehat{BAC}$ *nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BC* $\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$.	

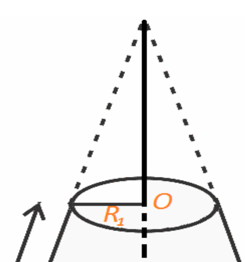
3. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung: * *Định lý*: Trong một đường tròn, số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.	*(O,R) có:* $\widehat{BAx}$ *tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn* $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ *sđ* $\overset{\frown}{AB}$.	
	(O,R) có: $\left.\begin{array}{l}\widehat{BAx}\text{ tạo bởi tt \& dc chắn }\overset{\frown}{AB}\\ \widehat{ACB}\text{ nội tiếp chắn }\overset{\frown}{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{ACB}$	
* *Hệ quả*: Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau. **4. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn:** * *Định lý*: Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.	*(O,R) có:* $\widehat{BEC}$ *có đỉnh bên trong đường tròn* $\Rightarrow \widehat{BEC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{AD})$	
5. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn: * *Định lý*: Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.	*(O,R) có:* $\widehat{BEC}$ *có đỉnh bên ngoài đường tròn* $\Rightarrow \widehat{BEC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\overset{\frown}{AD})$	 
6. Cung chứa góc: * *Tập hợp các điểm cùng nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc* α *không đổi là hai cung tròn chứa góc* α.	*a)* $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = \widehat{AFB} = \alpha$ *cùng nhìn đoạn AB* $\Rightarrow$ *A, B, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.*	

* _Đặc biệt_: *a) Các điểm D, E, F cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB, cùng nhìn đoạn AB dưới một góc không đổi $\Rightarrow$ Các điểm A, B, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.*	*b)* $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}=\widehat{AEB}=\widehat{AFB}=90^0$ *cùng nhìn đoạn AB $\Rightarrow$ A, B, C, D, E, F thuộc một đường tròn đường kính AB.*	
b) Các điểm C, D, E, F cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông $\Rightarrow$ Các điểm A, B, C, D, E, F thuộc đường tròn đường kính AB. **_7. Tứ giác nội tiếp:_** * _Định nghĩa_: *Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn.* * _Định lý_: *Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0.* * _Định lý đảo_: *Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.*	* *Tứ giác ABCD có A, B, C, D $\in$ (O) $\Leftrightarrow$ ABCD là tứ giác nội tiếp (O).* * *Tứ giác ABCD nội tiếp (O)* $\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}+\hat{C}=180^0 \\ \hat{B}+\hat{D}=180^0 \end{cases}$ * *Tứ giác ABCD có:* $\hat{A}+\hat{C}=180^0 \Leftrightarrow$ *ABCD là tứ giác n.tiếp* *Hoặc:* $\hat{B}+\hat{D}=180^0 \Leftrightarrow$ *ABCD là tứ giác n.tiếp*	
8. Độ dài đường tròn, cung tròn: * _Chu vi đường tròn_: * _Độ dài cung tròn_: **_9. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn:_** * _Diện tích hình tròn_:	$\boxed{C = 2\pi R = \pi d}$ $\boxed{l = \dfrac{\pi R n}{180^0}}$ $\boxed{S = \pi R^2 = \pi \dfrac{d^2}{4}}$ $\boxed{S = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{l.R}{2}}$	

$\boxed{S_{\text{viên phân}} = S_{\text{quạt}} - S_{ABC}}$



* _Diện tích hình quạt tròn_:		
	$\boxed{S = \pi(R_1^2 - R_2^2)}$	
* _Diện tích hình viên phân_:		
	$\boxed{S_{xq} = 2\pi Rh}$	
	$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{đáy}$	
* _Diện tích hình vành khăn_:		
	$\boxed{S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2}$	
HÌNH KHÔNG GIAN		
1.Hình trụ:		
* _Diện tích xung quanh_:	$\boxed{V = S.h = \pi R^2 h}$	
* _Diện tích toàn phần_:	_S: diện tích đáy; h: chiều cao_	
	$\boxed{S_{xq} = \pi R.l}$	
* _Thể tích_:		
	$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$	
2.Hình nón:		
* _Diện tích xung quanh_:	$\boxed{S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2}$	
* _Diện tích toàn phần_:	$V_{nón} = \frac{1}{3} V_{trụ}$	
	$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$	
* _Thể tích_:		
	S: diện tích đáy; h: chiều cao,	
	l: đường sinh $\boxed{l = \sqrt{h^2 + R^2}}$	



2. Hình nón cụt: * *Diện tích xung quanh*: * *Diện tích toàn phần*: * *Thể tích*: **3. Hình cầu:** * *Diện tích mặt cầu*: * *Thể tích*:	S_{tp} = $S_{đáy\ lớn}$ $\boxed{S_{xq}=\pi(R_1+R_2)l}$ S_{xq} + + $S_{đáy\ nhỏ}$ $\boxed{S_{tp}=\pi(R_1+R_2)l+\pi(R_1^2+R_2^2)}$ $\boxed{V=\frac{1}{3}\pi h(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)}$ $\boxed{S=4\pi R^2=\pi d^2}$ $\boxed{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$	

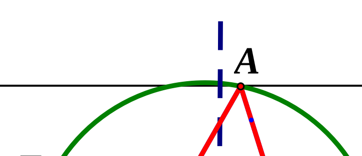
BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R.. Các phân giác của các góc $\hat{ABC}$, $\hat{ACB}$ lần lượt cắt đường tròn tại E, F.

1. CMR: OF $\perp$ AB và OE $\perp$ AC.
2. Gọi M là giao điểm của của OF và AB; N là giao điểm của OE và AC. CMR: Tứ giác AMON nội tiếp và tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác này.
3. Gọi I là giao điểm của BE và CF; D là điểm đối xứng của I qua BC. CMR: ID $\perp$ MN.
4. CMR: Nếu D nằm trên (O) thì $\hat{BAC}$ = 60^0.

HD:

1. CMR: OF $\perp$ AB và OE $\perp$ AC:



+ (O,R) có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACF}\text{ n.tiếp chắn }\overset{\frown}{AF}\\ \widehat{BCF}\text{ n.tiếp chắn }\overset{\frown}{BF}\\ \widehat{ACF}=\widehat{BCF}\ (CF\text{ là phân giác})\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BF}\Rightarrow OF\perp AB$$

+ (O,R) có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ABE}\text{ n.tiếp chắn }\overset{\frown}{AE}\\ \widehat{CAE}\text{ n.tiếp chắn }\overset{\frown}{CE}\\ \widehat{ABE}=\widehat{CAE}\ (BE\text{ là phân giác})\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CE}\Rightarrow OE\perp AC$$

2. <u>CMR: Tứ giác AMON nội tiếp</u>:

$$\left.\begin{array}{l}OF\perp AB\text{ tại }M\Rightarrow \widehat{OMA}=90^0\\ OE\perp AC\text{ tại }N\Rightarrow \widehat{ONA}=90^0\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{OMA}+\widehat{ONA}=180^0\ \Rightarrow \text{Tứ AMON nội tiếp.}$$

*** <u>Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác AMON</u>:**

Tứ giác AMON nội tiếp đường tròn đường kính OA $\Rightarrow\ S=\pi.\left(\dfrac{OA}{2}\right)^2=\pi.\dfrac{OA^2}{4}=\dfrac{\pi R^2}{4}$.

3. <u>CMR: ID $\perp$ MN</u>:

+ *I và D đối xứng nhau qua BC* $\Rightarrow ID\perp BC$ (1)

+ (O,R) có:

$$\left.\begin{array}{l}OF\perp AB\text{ tại }M\Rightarrow MA=MB=\dfrac{1}{2}AB\\ OE\perp AC\text{ tại }N\Rightarrow NA=NC=\dfrac{1}{2}AC\end{array}\right\}\Rightarrow MN\text{ là đường trung bình của }\Delta ABC\Rightarrow MN\,//\,BC\ \ (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\Rightarrow ID\perp MN$.

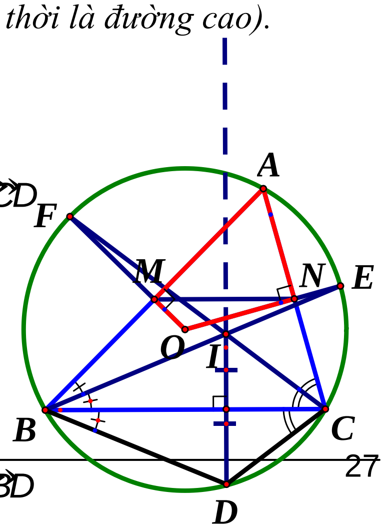
4. <u>CMR: Nếu D nằm trên (O) thì $\widehat{BAC}=60^0$</u>:

+ *I và D đối xứng qua BC* $\Leftrightarrow$ *BC là đường trung trực của ID, suy ra:*

- ΔIBD *cân tại B* $\Rightarrow \widehat{CBD}=\widehat{CBE}$ *(BC là đường trung trực đồng thời là đường cao).*
- ΔICD *cân tại C* $\Rightarrow \widehat{BCD}=\widehat{BCF}$ *(BC là đường trung trực đồng thời là đường cao).*

+ *Khi D nằm trên (O,R) thì:*

- $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\widehat{CBD}\text{ n.tiếp chắn }\overset{\frown}{CD}\\ \widehat{CBE}\text{ n.tiếp chắn }\overset{\frown}{CE}\\ \widehat{CBD}=\widehat{CBE}\ (cmt)\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{CE}\\ \qquad\text{Mà: }\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{AE}\ (cmt)\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{CD}$$
- *Mặc khác:* $\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{EC}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{ACD}\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\dfrac{1}{3}\overset{\frown}{ACD}$ (1).
- $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\widehat{BCD}\text{ n.tiếp chắn }\overset{\frown}{BD}\\ \widehat{BCF}\text{ n.tiếp chắn }\overset{\frown}{BF}\\ \widehat{BCD}=\widehat{BCF}\ (cmt)\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BF}\\ \qquad \overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{AF}\ (cmt)\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{FB}=\overset{\frown}{BD}$$



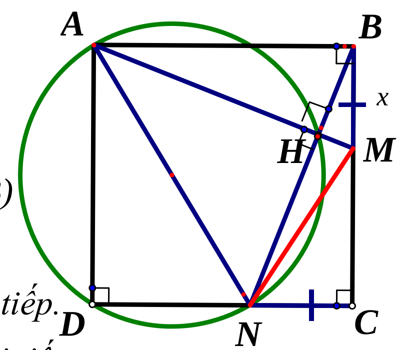
Mà:

- *Mặc khác:* $\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{FB}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{ABD}\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\frac{1}{3}\overset{\frown}{ABD}$ *(2).*
- $\widehat{BAC}$ *n.tiếp chắn* $\overset{\frown}{BC}\Rightarrow \widehat{BAC}=\frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}(sđ\,\overset{\frown}{BD}+sđ\,\overset{\frown}{CD})$ *(3).*

+ Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{BAC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}sđ\,\overset{\frown}{ABD}+\frac{1}{3}sđ\,\overset{\frown}{ABD}\right)=\frac{1}{6}\left(sđ\,\overset{\frown}{ABD}+sđ\,\overset{\frown}{ABD}\right)=\frac{1}{6}.360^0=60^0$.

Bài 2: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh BC và N là điểm trên cạnh CD sao cho BM = CN. Các đoạn thẳng AM và BN cắt nhau tại H.

1. CMR: Các tứ giác AHND và MHNC là những tứ giác nội tiếp.
2. Khi BM = $\frac{a}{4}$. Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác AHND theo a.
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN theo a.



HD: **1. *CMR: Tứ giác AHND và MHNC nội tiếp:***

+ $\Delta ABM = \Delta BCN$ *(c.g.c)* $\Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{CBN}$

+ $\widehat{CBN}+\widehat{ABH}=\widehat{ABC}=90^0\Rightarrow \widehat{AHB}=90^0$ *(ĐL tổng 3 góc của* ΔAHB*)*

$\Rightarrow AM\perp BN$ *tại H* $\Rightarrow \widehat{AHN}=\widehat{MHN}=90^0$.

+ *Tứ giác AHND có:* $\Rightarrow \widehat{AHN}+\widehat{ADN}=180^0\Rightarrow$ *AHND là tứ giác nội tiếp.*

+ *Tứ giác MHNC có:* $\Rightarrow \widehat{MHN}+\widehat{MCN}=180^0\Rightarrow$ *MHNC là tứ giác nội tiếp.*

2. Khi BM = $\frac{a}{4}$. Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác AHND theo a:

+ Khi BM = $\frac{a}{4}\Rightarrow CN=\frac{a}{4}\Rightarrow DN=\frac{3a}{4}$.

+ ΔAND *vuông tại D* $\Rightarrow AN=\sqrt{AD^2+DN^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2}=\frac{5a}{4}$.

+ Diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác AHND: $S=\pi\frac{AN^2}{4}=\pi\left(\frac{5a}{4}\right)^2:4=\frac{25\pi a^2}{64}$.

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN theo a:

+ Đặt $x = BM = CN\Rightarrow CM = a-x$.

+ ΔMCN *vuông tại C* $\Rightarrow MN^2=CM^2+CN^2=(a-x)^2+x^2=2x^2-2ax+a^2=\left(x\sqrt{2}-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow MN^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất là* $\frac{a^2}{2}$ *khi* $x\sqrt{2}-\frac{a}{\sqrt{2}}=0$

$\Rightarrow MN$ *đạt giá trị nhỏ nhất là* $\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ *khi* $x=\frac{a}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ *khi BM =* $\frac{a}{2}$.

Bài 3: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Đường cao BH và CK lần lượt cắt (O) tại E và F.

a) CMR: Tứ giác BKHC nội tiếp.

b) CMR: OA $\perp$ EF và EF // HK.

c) Khi ΔABC là tam giác đều có cạnh bằng a. Tính diện tích hình viên phân chắn cung nhỏ BC của (O).

HD:

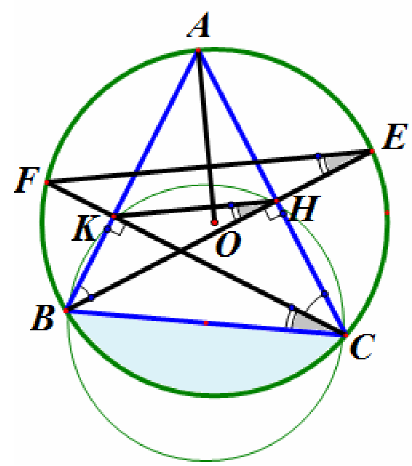
a) <u>CMR: Tứ giác BKHC nội tiếp</u>:

+ BH $\perp$ AC $\Rightarrow \widehat{BHC} = 90^0$ nhìn đoạn BC $\Rightarrow H \in$ đường tròn đường kính BC (1).

+ CK $\perp$ AB $\Rightarrow \widehat{BKC} = 90^0$ nhìn đoạn BC $\Rightarrow K \in$ đường tròn đường kính BC (2).

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ B, H, C, K $\in$ đường tròn đường kính BC $\Rightarrow$ Tứ giác BKHC nội tiếp đường tròn đường kính BC.

b) <u>CMR: OA $\perp$ EF và EF // HK</u>:



+ Đường tròn đường kính BC có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{KBH} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{HK}\\ \widehat{KCH} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{HK}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{KBH} = \widehat{KCH} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACF}$$

+ Đường tròn (O) có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ABE} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{AE}\\ \widehat{CAE} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{AF}\\ \widehat{ABE} = \widehat{CAF} \text{ (cmt)}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CF} \Rightarrow AE = AF \;(1)$$

+ Mặc khác: OE = OF = R (2)

Từ (1) và (2)$\Rightarrow$ OA là đường trung trực của EF $\Rightarrow OA \perp EF$.

+ Đường tròn đường kính BC có:

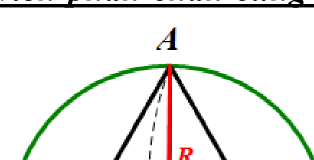
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BCK} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{BK}\\ \widehat{BHK} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{BK}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{BHK} \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{BHK} \;\; (3)$$

+ Đường tròn (O) có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BCF} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{BF}\\ \widehat{BEF} \text{ n.tiếp chắn } \overset{\frown}{BF}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{BEF} \;\; (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\widehat{BHK} = \widehat{BEF}\\ \widehat{BHK} \text{ và } \widehat{BEF} \text{ đồng vị}\end{array}\right\} \Rightarrow EF \,//\, HK$.

c) <u>Khi ΔABC là tam giác đều có cạnh bằng a. Tính diện tích hình viên phân chắn cung nhỏ BC của (O</u>:



+ *Gọi R là bán kính của (O) và h là chiều cao của ΔABC đều, ta có:*

- $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
- *O là trọng tâm của* $\Delta ABC \Rightarrow R = OA = \dfrac{2}{3}h = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
- $S_{(O)} = \pi R^2 = \pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{3}$ *(đvdt)*
- $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.h = \dfrac{1}{2}a\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ *(đvdt)*
- $S_{vp} = \dfrac{1}{3}(S_{(O)} - S_{ABC}) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi a^2}{3} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{a^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{36}$ *(đvdt).*

Bài 4: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi E là một điểm bất kỳ trên cạnh BC. Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với tia DE tại H, đường thẳng này cắt tia DC tại F.

a) CMR: Năm điểm A, B, H, C, D cùng nằm trên một đường tròn.
b) CMR: DE.HE = BE.CE.
c) Tính độ dài đoạn thẳng DH theo a khi E là trung điểm của BC.
d) CMR: HC là tia phân giác của $\widehat{DHF}$.

HD:

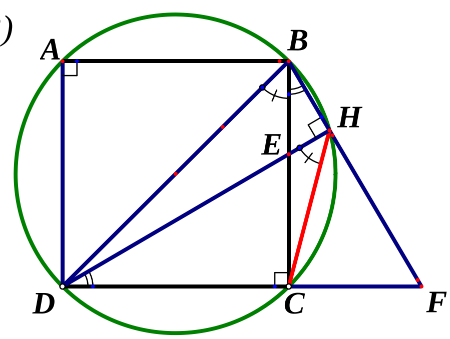
a) CMR: Năm điểm A, B, H, C, D cùng thuộc một đường tròn:

+ $\widehat{BAD} = 90^0$ *nhìn đoạn BD* $\Rightarrow A \in$ *đường tròn đường kính BD (1)*

+ $\widehat{BHD} = 90^0$ *nhìn đoạn BD* $\Rightarrow H \in$ *đường tròn đường kính BD (2)*

+ $\widehat{BCD} = 90^0$ *nhìn đoạn BD* $\Rightarrow C \in$ *đường tròn đường kính BD (3)*

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ *A, B, H, C, D* $\in$ *đường tròn đường kính BD.*



b) CMR: DE.HE = BE.CE:

+ ΔDEC *và* ΔBEH *có:*

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{DEC} = \widehat{BEH}\ (ñoái\ ñænh)\\ \widehat{DCE} = \widehat{BHE} = 90^0\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DEC \backsim \Delta BEH\ (g.g)$$

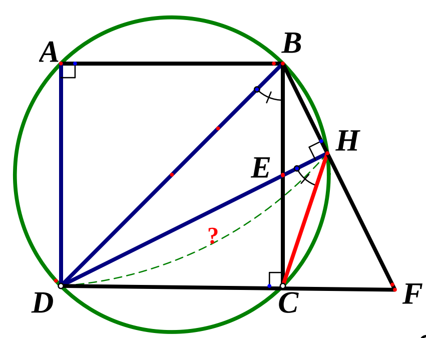
$$\Rightarrow \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{EC}{EH} \Leftrightarrow DE.HE = BE.CE.$$

c) Tính độ dài đoạn thẳng DH theo a khi E là trung điểm của BC:

- *Khi E là trung điểm của BC* $\Rightarrow EB = EC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}.$
- ΔDEC *vuông tại C* $\Rightarrow DE = \sqrt{EC^2 + CD^2}$

$$\Rightarrow DE = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$$

- *Từ: DE.HE = BE.CE (cmt)* $\Rightarrow EH = \dfrac{BE.CE}{DE}$



$$\Rightarrow EH = \left(\frac{a}{2}.\frac{a}{2}\right):\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{10}.$$

- $DH = DE + EH = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{10} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$

d) *CMR: HC là tia phân giác của $\widehat{DEF}$:*

+ Đường tròn đường kính BD có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{CHD}\ n.tiếp\ chắn\ \overset{\frown}{CD}\\ \widehat{CBD}\ n.tiếp\ chắn\ \overset{\frown}{CD}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\widehat{CHD}=\widehat{CBD}\\ \text{Mà: } \widehat{CBD}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}=45^0\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{CHD}=45^0\ (1)$$

+ Mặc khác: $\widehat{CHD}+\widehat{CHF}=\widehat{DHF}=90^0$ (2)

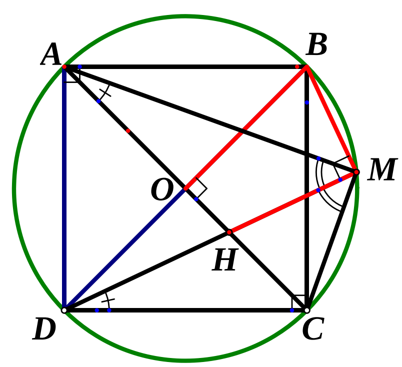
+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CHD}=\widehat{CHF}=\frac{1}{2}\widehat{DHF} \Rightarrow$ *HC là tia phân giác của* $\widehat{DHF}$.

Bài 5: Một hình vuông ABCD nội tiếp trong đường tròn Tâm O bán kính R . Một điểm M di động trên cung ABC , M không trùng với A,B và C, MD cắt AC tại H.

1) CMR:Tứ giác MBOH nội tiếp được trong đường tròn và DH.DM = $2R^2$.
2) CMR: MD.MH = MA.MC.
3) ΔMDC và Δ MAH bằng nhau khi M ở một vị trí đặc biệt M'. Xác định điểm M'. Khi đó M'D cắt AC tại H'. Đường thẳng qua M' và vuông góc với AC cắt AC tại I. Chứng minh rằng I là trung điểm của H'C .

HD:

1. *CMR: Tứ giác MBOH nội tiếp dược đường tròn:*



+ ABCD là hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC \Rightarrow \widehat{BOH}=90^0$ *(1)*

+ (O) có: $\widehat{BMD}$ *nội tiếp chắn đường tròn* $\Rightarrow \widehat{BMD}=90^0$ *(2)*

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BOH}+\widehat{BMD}=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ MBOH là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BH.

*** CMR: DH.DM = $2R^2$:***

ΔDOH và ΔDMB có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{DOH}=\widehat{DMB}=90^0\\ \widehat{BDM}:chung\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta DOH \backsim \Delta DMB\ (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{DO}{DM}=\frac{DH}{DB}\Rightarrow DO.DB=DH.DM\Rightarrow R.2R=DH.DM\Rightarrow DH.DM=2R^2\ (đpcm).$$

2. *CMR: MD.MH = MA.MC:*

+ (O,R) có:

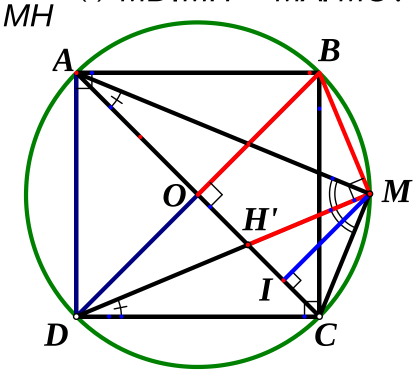
- $$\left.\begin{array}{l}\widehat{MDC}\ n.tiếp\ chắn\ \overset{\frown}{MC}\\ \widehat{MAC}\ n.tiếp\ chắn\ \overset{\frown}{MC}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{MDC}=\widehat{MAC}\Rightarrow \widehat{MDC}=\widehat{MAH}$$
- *CD = AD (ABCD là hình vuông)* $\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AD}$.

- $\left.\begin{array}{l}\widehat{CMD}\ n.tiếp\ chắn\ \overset{\frown}{CD}\\ \widehat{AMD}\ n.tiếp\ chắn\ \overset{\frown}{AD}\\ \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AD}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{CMD}=\widehat{AMD}\Rightarrow \widehat{CMD}=\widehat{AMH}$

+ ΔMDC và ΔMAH có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{MDC}=\widehat{MAH}\ (cmt)\\ \widehat{CMD}=\widehat{AMH}\ (cmt)\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta MDC \backsim \Delta MAH\ (g.g)\Rightarrow \frac{MD}{MA}=\frac{MC}{MH}\Leftrightarrow MD.MH=MA.MC.$$

3. <u>Chứng minh rằng I là trung điểm của H'C</u>:



+ Khi $\Delta MDC = \Delta MAH \Rightarrow MD = MA$

+ (O,R) có:

- $MD = MA \Rightarrow \overset{\frown}{MCD}=\overset{\frown}{MBA}\Rightarrow \overset{\frown}{MC}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{MB}+\overset{\frown}{BA}$ (1)
- $Do: CD = BA \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BA}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overset{\frown}{MC}=\overset{\frown}{MB}\Rightarrow$ M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

Hay M' là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$.

+ Do $\Delta MDC = \Delta MAH \Rightarrow \Delta M'DC = \Delta M'AH' \Rightarrow M'C = M'H'$

$\Rightarrow \Delta M'H'C$ cân tại M (3)

+ Do $M'I \perp AC \Rightarrow M'I \perp H'C$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ M'I là đường là đường trung tuyến của $\Delta M'H'C \Rightarrow IH' = IC$

Hay I là trung điểm của H'C (đpcm).

Bài 6: Cho hai đường tròn (O; 20cm) và (O'; 15cm) cắt nhau tại A và B. Biết AB = 24cm và O và O' nằm về hai phía so với dây chung AB. Vẽ đường kính AC của đường tròn (O) và đường kính AD của đường tròn (O').

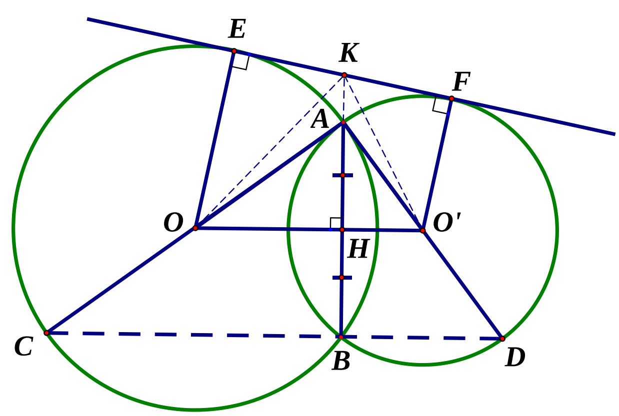
a) CMR: Ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Tính độ dài đoạn OO'.

c) Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') (E, F là các tiếp điểm). CMR: Đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

HD:

a) <u>CMR: Ba điểm C, B, D thẳng hàng</u>:



+ (O) có $\widehat{ABC}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AC $\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0$ (1)

+ (O') có $\widehat{ABD}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD $\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0$ (2)

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^0$

$\Rightarrow$ Ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) <u>Tính độ dài đoạn OO'</u>:

+ (O) và (O') cắt nhau tại A và B $\Rightarrow$ OO' là đường trung trực của AB.

+ Gọi H là giao điểm của OO' và AB $\Rightarrow$ OO' $\perp$ AB tại H; HA = HB = $\frac{1}{2}$AB = 12 (cm).

+ Δ AHO vuông tại H $\Rightarrow OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (cm).

+ Δ AHO' vuông tại H $\Rightarrow O'H = \sqrt{O'A^2 - HA^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ (cm).

Suy ra: OO' = OH + O'H = 16 + 9 = 25 (cm).

c) <u>CMR: Đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF</u>:

+ Gọi K là giao điểm của AB và EF.

+ ΔOEK vuông tại E $\Rightarrow KE^2 = OK^2 - OE^2$ (1)

+ ΔOHK vuông tại H $\Rightarrow OK^2 = OH^2 + HK^2$ (2)

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $KE^2 = (OH^2 + HK^2) - OE^2 = 16^2 + HK^2 - 20^2 = HK^2 - 144$ (*).

+ $\Delta O'FK$ vuông tại F $\Rightarrow KF^2 = O'K^2 - O'F^2$ (3)

+ $\Delta O'HK$ vuông tại H $\Rightarrow O'K^2 = O'H^2 + HK^2$ (2)

+ Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ $KF^2 = (O'H^2 + HK^2) - O'F^2 = 9^2 + HK^2 - 15^2 = HK^2 - 144$ (**).

$$\left.\begin{array}{r} +\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \Rightarrow KE^2 = KF^2 \Rightarrow KE = KF \\ \text{Mà: } KE + KF = EF \end{array}\right\} \Rightarrow K \text{ laø trung ñieåm cuûa } EF$$

$\Rightarrow$ AB đi qua trung điểm của EF (đpcm).

Bài 7: Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính AB = 2R. Từ A và B lần lượt kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại C và D.

1. CMR:

a) Tứ giác AOMC nội tiếp.

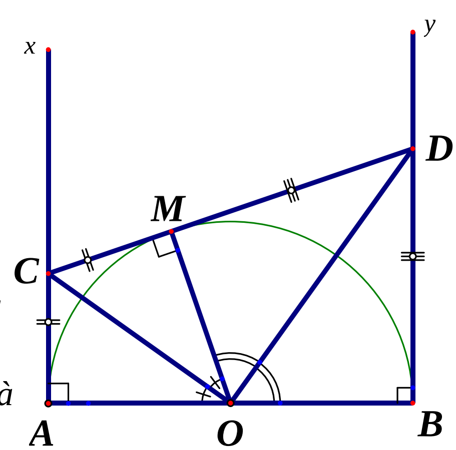
b) CD = CA + DB và $\widehat{COD} = 90^0$.

c) AC. BD = R^2.

2. Khi $\widehat{BAM} = 60^0$. Chứng tỏ ΔBDM là tam giác đều và tính diện tích của hình quạt tròn chắn cung MB của nửa đường tròn đã cho theo R.

HD:

1a) <u>CMR: Tứ giác AOMC nội tiếp</u>:



+ Ax là tiếp tuyến tại A $\Rightarrow \widehat{OAC} = 90^0$ (1)

+ CD là tiếp tuyến tại M $\Rightarrow \widehat{OMC} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{OAC} + \widehat{OMC} = 180^0 \Rightarrow$ AOMC là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OC.

1b) <u>CMR: CD = CA + DB và $\widehat{COD} = 90^0$</u>:

+ Hai tiếp tuyến CA và CM cắt nhau tại C $\Rightarrow$ CA = CM và OC là tia phân giác của $\widehat{AOM}$ (1)

+ Hai tiếp tuyến DB và DM cắt nhau tại D $\Rightarrow$ DB = DM và OD là tia phân giác của $\widehat{MOB}$ (2)

Suy ra: CD = CM + MD = CA + DB

+ (O,R)có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 180^0 \text{ (keà buø)} \\ OC \text{ laø phaân giaùc cuûa } \widehat{AOM} \\ OD \text{ laø phaân giaùc cuûa } \widehat{MOB} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\widehat{COD} = 90^0.$$

1c) <u>CMR: AC. BD = R^2</u>:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Delta COD \text{ vuông tại } O\\ OM \perp CD\end{array}\right\} \Rightarrow OM^2 = MC.MD\\ \text{với } OM = R, MC = AC, MD = BD\end{array}\right\} \Rightarrow AC.BD = R^2$$

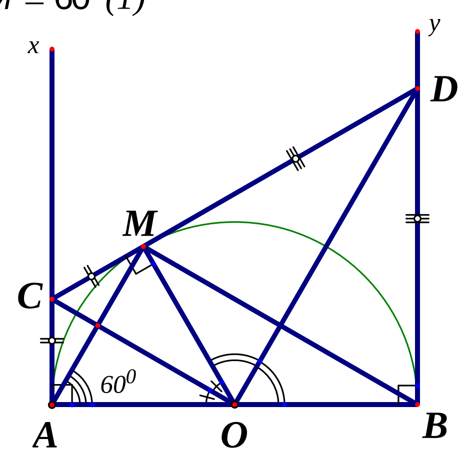
2. <u>Khi $\widehat{BAM} = 60^0$. Chứng tỏ ΔBDM là tam giác đều và tính diện tích của hình quạt tròn chắn cung MB của nửa đường tròn đã cho theo R</u>:

+ Nửa (O, R) có:

- $\left.\begin{array}{l}\widehat{BAM} \text{ nội tiếp chắn } \overset{\frown}{BM}\\ \widehat{DBM} \text{ tạo bởi t.tuyến và dây cung chắn } \overset{\frown}{BM}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DBM} = \widehat{BAM} = 60^0\ (1)$
- ΔBDM *có* $DB = DM \Rightarrow \Delta BDM$ *cân tại D (2)*

  Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta BDM$ *đều.*

  + Nửa (O, R) có:
- $\left.\begin{array}{l}\widehat{BAM} \text{ nội tiếp chắn } \overset{\frown}{BM}\\ \widehat{BOM} \text{ ở tâm chắn } \overset{\frown}{BM}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BOM} = 2.\widehat{BAM} = 2.60^0 = 120^0$
- $S_{quạt} = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi R^2 60}{360} = \dfrac{\pi R^2}{3}$ *(đvdt).*



Bài 8: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O và hai tiếp tuyến MA và MB đến đường tròn (O), ở đây A, B là các tiếp điểm và C nằm giữa M, D.

a) CMR: MA^2 = MC. MD.

b) Gọi I là trung điểm của CD. CMR: 5 điểm M, A, O, I, B cùng nằm trên một đường tròn.

c) Gọi H là giao điểm của AB và MO. CMR: Tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là phân giác của $\widehat{CHD}$.

d) Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O). CMR: 3 điểm A, B, K thẳng hàng.

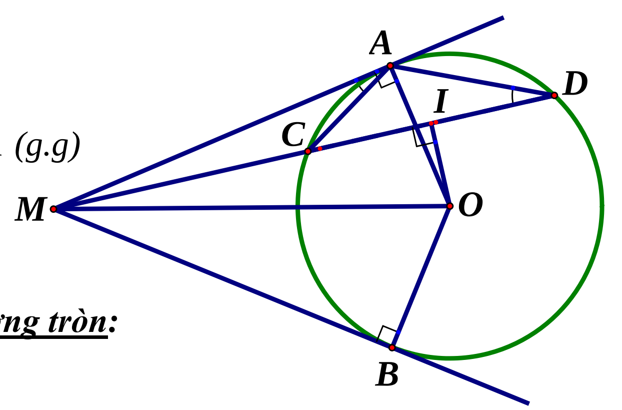
HD:

a) <u>CMR:MA^2 = MC. MD</u>:

+ ΔMAC và ΔMDA có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{MDA}: \text{chung}\\ \widehat{MAC} = \widehat{MDA} \text{ (cùng chắn } \overset{\frown}{AC})\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD \text{ (đpcm)).}$$



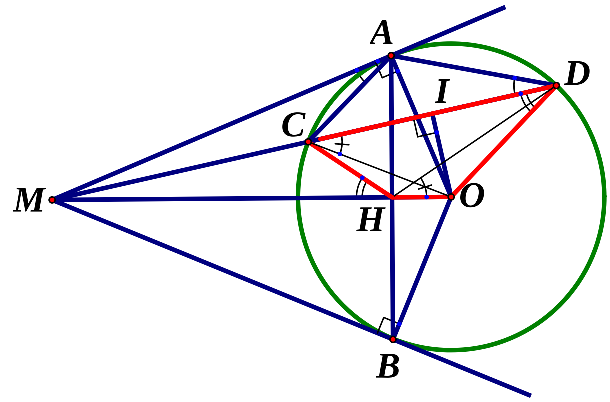
b) <u>CMR:5 điểm M, A, O, I, B cùng nằm trên một đường tròn</u>:

+ (O) có:

- *I là trung điểm của dây CD* $\Rightarrow OI \perp CD \Rightarrow \widehat{OIM} = 90^0$ *nhìn đoạn OM* (1)
- $MA \perp OA$ *(T/c tiếp tuyến)* $\Rightarrow \widehat{OAM} = 90^0$ *nhìn đoạn OM* (2)
- $MB \perp OB$ *(T/c tiếp tuyến)* $\Rightarrow \widehat{OBM} = 90^0$ *nhìn đoạn OM* (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ *5 điểm M, A, I, O, B* $\in$ *đường tròn đường kính OM.*

c) <u>CMR: Tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là phân giác của $\widehat{CHD}$</u>:



+ ΔOAM *vuông tại A* $\Rightarrow MA^2 = MO.\,MH$

Mà: $MA^2 = MC.MD$ (cmt)

$\Rightarrow MO.\,MH = MC.\,MD \Rightarrow \dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MC}{MO}$

+ và ΔMDO *có:*

$\left.\begin{array}{l} \widehat{DOM}: chung \\ \dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MC}{MO} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MHC \backsim \Delta MDO\ (c.g.c)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO} \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{CDO} \\ \text{Maø}\ \widehat{MHC} = \widehat{CHO} = 180^0\ (\text{keà buø}) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CDO} + \widehat{CHO} = 180^0$

Suy ra: Tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn (đpcm)

*** <u>CMR: AB là phân giác của $\widehat{CHD}$</u>:**

+ ΔCOD *có* $OC = OD = R \Rightarrow \Delta COD$ *cân tại O*

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{CDO} = \widehat{DCO} \Rightarrow \widehat{MDO} = \widehat{DCO} \\ \text{Maø}\ \widehat{OHD} = \widehat{DCO}\ (\text{cuøng chaén}\ \overset{\frown}{OD}\ \text{cuûa ñöôøng troøn noäi tieáp töù giaùc CHOD}) \end{array}\right\}$

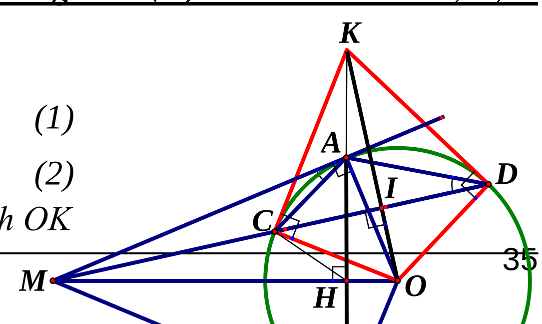
$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{MDO} = \widehat{OHD} \\ \text{Maø}\ \widehat{MDO} = \widehat{MHC}\ (\text{cmt}) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{OHD} = \widehat{MHC}$ (1)

+ *Mặc khác:* $\left.\begin{array}{l} \widehat{AHC} = 90^0 - \widehat{MHC} \\ \widehat{AHD} = 90^0 - \widehat{OHD} \end{array}\right\}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \widehat{AHC} = \widehat{AHD} \\ \text{Maø}\ \widehat{AHC} + \widehat{AHD} = \widehat{CHD} \end{array}\right\}$

Suy ra: HA là tia phân giác của $\widehat{CHD} \Rightarrow$ *AB là tia phân giác của* $\widehat{CHD}$ *(đpcm).*

d) <u>Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O). CMR: 3 điểm A, B, K thẳng hàng</u>:



+ *Gọi K là giao điểm của 2 tiếp tuyến tại C và D của (O)*

+ $CK \perp OC$ *(T/c tiếp tuyến)* $\Rightarrow \widehat{OCK} = 90^0$ *nhìn đoạn OK* (1)

+ $DK \perp OD$ *(T/c tiếp tuyến)* $\Rightarrow \widehat{ODK} = 90^0$ *nhìn đoạn OK* (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ *Tứ giác OCK nội tiếp đường tròn đường kính OK*

$\Rightarrow \widehat{OKC} = \widehat{ODC}$ (cuøng chaén $\overset\frown{OC}$)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{OKC} = \widehat{MDO} \\ \text{Maø } \widehat{MHC} = \widehat{MDO}\ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{OKC} = \widehat{MHC} \\ \text{Maø } \widehat{MHC} + \widehat{OHC} = 180^0 \text{ (keà buø)} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \widehat{OKC} + \widehat{OHC} = 180^0 \Rightarrow$ *Tứ giác OKCH nội tiếp đường tròn đường kính OK*

$\Rightarrow \widehat{OHK} = \widehat{OCK} = 90^0$ *(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)*

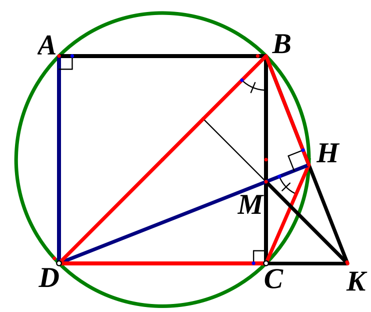
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow HK \perp MO \\ \text{Maø } AB \perp MO\ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow HK \equiv AB \Rightarrow \text{3 điểm A, B, K thẳng hàng (đpcm).}$$

Bài 9:

Cho hình vuông cạnh a , lấy điểm M bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B,C). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng DM tại H, kéo dài BH cắt đường thẳng DC tại K.

1. Chứng minh: BHCD là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh: KM ⊥ DB.
3. Chứng minh: KC . KD = KH . KB.
4. Kí hiệu S_{ABM} , S_{DCM} là diện tích của tam giác ABM, tam giác DCM. CMR: (S_{ABM} + S_{DCM}) không đổi. Xác định vị trí của M trên BC để S^2_{ABM} + S^2_{DCM} đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a.

HD:



1. <u>CMR: BHCD là tứ giác nội tiếp</u>:

+ $\widehat{BHD} = 90^0$ *nhìn đoạn BD ⇒H∈ đường tròn đường kính BD (1)*

+ $\widehat{BCD} = 90^0$ *nhìn đoạn BD ⇒C∈ đường tròn đường kính BD (2)*

Từ (1) và (2) ⇒B, H, C, D ∈ đường tròn đường kính BD.

2. <u>Chứng minh: KM ⊥ DB</u>:

+ ΔBDK *có :*

$$\left.\begin{array}{l} DH \perp BK \\ BC \perp DK \\ DH \text{ caét } DK \text{ taïi } M \end{array}\right\} \Rightarrow M \text{ là trực tâm của } \Delta BDK \Rightarrow KM \text{ là đường cao thứ ba} \Rightarrow KM \perp DB$$

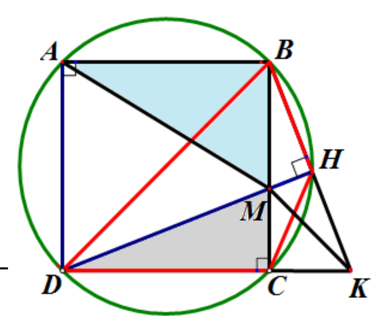
3. <u>Chứng minh: KC . KD = KH . KB</u>:

$$+\ \Delta KCB \text{ và } \Delta KHD \text{ có: } \left.\begin{array}{l} \widehat{KCB} = \widehat{KHD} = 90^0 \\ \widehat{BKD}: chung \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KCB \backsim \Delta KHD\ (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{KH}{KD} \Rightarrow KC\,.\,KD = KH\,.\,KB \text{ (đpcm).}$$

4. <u>CMR: (S_{ABM} + S_{DCM}) không đổi</u>:

$$+\ \Delta ABM \text{ vuông tại B} \Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.BM = \frac{1}{2}a.BM \qquad (1)$$



+ ΔDCM *vuông tại C* $\Rightarrow S_{DCM} = \frac{1}{2}CD.CM = \frac{1}{2}a.CM$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S_{ABM} + S_{DCM} = \frac{1}{2}a.BM + \frac{1}{2}a.CM$

$$= \frac{1}{2}a.(BM + CM) = \frac{1}{2}a.BC = \frac{1}{2}a.a = \frac{1}{2}a^2$$

+ *Vì a là không đổi* $\Rightarrow \frac{1}{2}a^2$ *không đổi* $\Rightarrow (S_{ABM} + S_{DCM})$ *không đổi.*

**** <u>Xác định vị trí của M trên BC để $S^2_{ABM} + S^2_{DCM}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a</u>:***

+ *Đặt* $x = BM \Rightarrow CM = a - x$

+ *Ta có:* $S^2_{ABM} + S^2_{DCM} = \left(\frac{1}{2}a.BM\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a.CM\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a.x\right)^2 + \left[\frac{1}{2}a.(a-x)\right]^2$

$$= \frac{1}{4}a^2\left[x^2 + (a-x)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}a^2\left[2x^2 - 2ax + a^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}a^2\left[2(x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left[(x - \frac{1}{2}a)^2 + \frac{1}{4}a^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}a^2.(x - \frac{1}{2}a)^2 + \frac{1}{8}a^4 \geq \frac{a^4}{8}$$

+ *Giá trị nhỏ nhất của* $S^2_{ABM} + S^2_{DCM}$ *là* $\frac{a^4}{8}$ *khi :* $x - \frac{1}{2}a = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}a$

Vậy khi M là trung điểm của BC thì $S^2_{ABM} + S^2_{DCM}$ *đạt giá trị nhỏ nhất là* $\frac{a^4}{8}$.

Bài 10: Cho điểm A ở ngoài đường tròn (O, R). Gọi AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (B và C là hai tiếp điểm). Từ A vẽ một tia cắt đường tròn tại E và F (E nằm giữa A và F).

a) CMR: ΔAEC và ΔACF đồng dạng. Suy ra AC^2 = AE. AF.

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh 5 điểm A, B, O, I, C cùng nằm trên một đường tròn.

c) Từ E vẽ đường thẳng vuông góc với OB cắt BC tại M. Chứng minh tứ giác EMIC nội tiếp được trong đường tròn. Suy ra tứ giác MIFB là hình thang.

d) Giả sử cho OA = $R\sqrt{2}$. Tính theo R phần diện tích tứ giác ABOC nằm ở ngoài hình tròn (O)

HD:

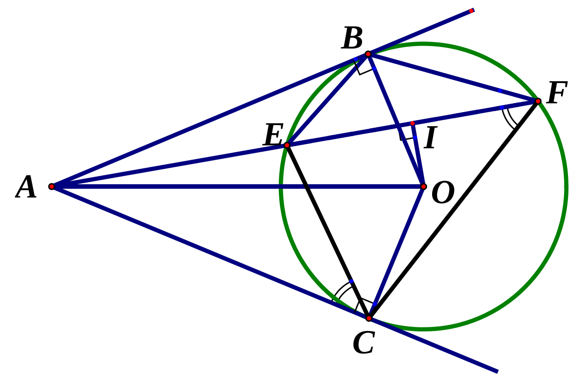
<u>a) CMR: ΔAEC và ΔACF đồng dạng. Suy ra AC^2 = AE. AF</u>:

+ ΔAEC *và* ΔACF *có:*

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACE} = \widehat{CFE}\,(\text{cùng chắn } \overset{\frown}{CE})\\ \widehat{CAF}:\ \text{chung}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KCB \backsim \Delta KHD\ (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AC^2 = AE.\ AF\ (đpcm).$$

b) <u>Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh 5 điểm A, B, O, I, C cùng nằm trên một đường tròn</u>:



+ (O) có:

- *I là trung điểm của dây EF* $\Rightarrow OI \perp EF$

  $\Rightarrow \widehat{OIA} = 90^0$ *nhìn đoạn OA* *(1)*

- $AB \perp OB$ *(T/c tiếp tuyến)*

  $\Rightarrow \widehat{OBA} = 90^0$ *nhìn đoạn OA* *(2)*

- $AC \perp OC$ *(T/c tiếp tuyến*

) $\Rightarrow \widehat{OCA} = 90^0$ *nhìn đoạn OA* *(3)*

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ *5 điểm , A,B, O, I, C* $\in$ *đường tròn đường kính OA.*

c) <u>Từ E vẽ đường thẳng vuông góc với OB cắt BC tại M. Chứng minh tứ giác EMIC nội tiếp được trong đưởng tròn. Suy ra tứ giác MIFB là hình thang</u>:

+