CHUYÊN ĐỀ 1 - PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

MỤC TIÊU:

Hệ thống lại các dạng toán và các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

Giải một số bài tập về phân tích đa thức thành nhân tử

Nâng cao trình độ và kỹ năng về phân tích đa thức thành nhân tử

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI TẬP

TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ:

Định lí bổ sung:

+ Đa thức f(x) có nghiệm hữu tỉ thì có dạng p/q trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có một nhân tử là x – 1

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì f(x) có một nhân tử là x + 1

+ Nếu a là nghiệm nguyên của f(x) và f(1); f(- 1) khác 0 thì $\frac{f(1)}{a-1}$ và $\frac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên.

Để nhanh chóng loại trừ nghiệm là ước của hệ số tự do

Ví dụ 1: $3x^2 - 8x + 4$ **Cách**

1: Tách hạng tử thứ 2

$3x^2 - 8x + 4 = 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 3x(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(3x - 2)$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất:

$3x^2 - 8x + 4 = (4x^2 - 8x + 4) - x^2 = (2x - 2)^2 - x^2 = (2x - 2 + x)(2x - 2 - x)$

$= (x - 2)(3x - 2)$

Ví dụ 2: $x^3 - x^2 - 4$

Ta nhân thấy nghiệm của f(x) nếu có thì x = 1; 2; 4 , chỉ có f(2) = 0 nên x = 2 là nghiệm của f(x) nên f(x) có một nhân tử là x – 2. Do đó ta tách f(x) thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là x – 2

Cách 1:

$x^3 - x^2 - 4 = x^3 \;\; 2x^2 \quad x^2 \;\; 2x \quad 2x \;\; 4 \quad x^2 \;\; x \;\; 2 \quad x(x \;\; 2) \;\; 2(x \;\; 2) = x \;\; 2 \;\; x^2 \;\; x \;\; 2$

Cách 2: $x^3 \quad x^2 \quad 4 \quad x^3 \quad 8 \quad x^2 \quad 4 \quad x^3 \quad 8 \quad x^2 \quad 4 \quad (x \quad 2)(x^2 \quad 2x \quad 4) \quad (x \quad 2)(x \quad 2)$

$x \quad 2 \quad x^2 \quad 2x \quad 4 \quad (x \quad 2) \quad (x \quad 2)(x^2 \quad x \quad 2)$

Ví dụ 3: $f(x) = 3x^3 – 7x^2 + 17x – 5$

Nhận xét: 1, 5 không là nghiệm của f(x), như vậy f(x) không có nghiệm nguyên. Nên f(x) nếu có nghiệm thì là nghiệm hữu tỉ

Ta nhận thấy x = $\frac{1}{3}$ là nghiệm của f(x)
do đó f(x) có một nhân tử là 3x – 1. Nên
$f(x) = 3x^3 – 7x^2 + 17x – 5 =$ $3x^3 \quad x^2 \quad 6x^2 \quad 2x \quad 15x \quad 5 \quad 3x^3 \quad x^2 \quad 6x^2 \quad 2x \quad 15x \quad 5$

$x^2(3x \quad 1) \quad 2x(3x \quad 1) \quad 5(3x \quad 1) \quad (3x \quad 1)(x^2 \quad 2x \quad 5)$

Vì $x^2 \; 2x \; 5 \; (x^2 \; 2x \; 1) \; 4 \; (x \; 1)^2 \; 4 \; 0$ với mọi x nên không phân tích được thành nhân tử nữa

Ví dụ 4: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Nhận xét: Tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là x + 1

$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x^2 + 4x) + (4x + 4) = x^2(x + 1) + 4x(x + 1) + 4(x + 1)$

$(x + 1)(x^2 + 4x + 4) = (x + 1)(x + 2)^2$ **Ví dụ 5:** $f(x) = x^5 – 2x^4 + 3x^3 – 4x^2 + 2$

Tổng các hệ số bằng 0 thì nên đa thức có một nhân tử là x – 1, chia f(x) cho (x – 1) ta có:

$x^5 – 2x^4 + 3x^3 – 4x^2 + 2 = (x – 1)(x^4 - x^3 + 2 x^2 - 2 x - 2)$

Vì $x^4 - x^3 + 2 x^2 - 2 x - 2$ không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỉ nên không phân tích được nữa

Ví dụ 6: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997 = (x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996)$

$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1)$

$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1 + 1996) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1997)$ **Ví dụ 7:** $x^2 - x - 2001.2002 = x^2 - x - 2001.(2001 + 1)$

$x^2 - x – 2001^2 - 2001 = (x^2 – 2001^2) – (x + 2001) = (x + 2001)(x – 2002)$

II. THÊM , BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ:

1. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện hiệu hai bình phương:

Ví dụ 1: $4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 = (2x^2 + 9)^2 – 36x^2$

$(2x^2 + 9)^2 – (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 – 6x)$

$(2x^2 + 6x + 9)(2x^2 – 6x + 9)$

Ví dụ 2: $x^8 + 98x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) + 96x^4$

$(x^4 + 1)^2 + 16x^2(x^4 + 1) + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4$

$(x^4 + 1 + 8x^2)^2 – 16x^2(x^4 + 1 – 2x^2) = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2 – 1)^2$

$(x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 – 4x)^2$

$(x^4 + 4x^3 + 8x^2 – 4x + 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1)$

2. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện nhân tử chung

Ví dụ 1: $x^7 + x^2 + 1 = (x^7 – x) + (x^2 + x + 1) = x(x^6 – 1) + (x^2 + x + 1)$

$x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) = x(x – 1)(x^2 + x + 1) (x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$

$(x^2 + x + 1)[x(x – 1)(x^3 + 1) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 – x^4 + x^2 - x + 1)$

Ví dụ 2: $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 – x) + (x^5 – x^2) + (x^2 + x + 1)$

$x(x^3 – 1)(x^3 + 1) + x^2(x^3 – 1) + (x^2 + x + 1)$

$(x^2 + x + 1)(x – 1)(x^4 + x) + x^2 (x – 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$(x^2 + x + 1)[(x^5 – x^4 + x^2 – x) + (x^3 – x^2) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 – x^4 + x^3 – x + 1)$

Ghi nhớ:

Các đa thức có dạng $x^{3m + 1} + x^{3n + 2} + 1$ như: $x^7 + x^2 + 1$; $x^7 + x^5 + 1$; $x^8 + x^4 + 1$; $x^5 + x + 1$; $x^8 + x + 1$; … đều có nhân tử chung là $x^2 + x + 1$

III. ĐẶT BIẾN PHỤ:

Ví dụ 1: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = [x(x + 10)][(x + 4)(x + 6)] + 128$

$(x^2 + 10x) + (x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y$, đa thức có dạng

$(y – 12)(y + 12) + 128 = y^2 – 144 + 128 = y^2 – 16 = (y + 4)(y – 4)$

$(x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$ **Ví**

dụ 2: $A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 – 6x + 1$

Giả sử x 0 ta viết

$x^4 + 6x^3 + 7x^2 – 6x + 1 = x^2 (x^2 + 6x + 7 – \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}) = x^2 [(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 6(x – \frac{1}{x}) + 7]$

Đặt $x - \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, do đó

$A = x^2(y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2(y + 3)^2 = (xy + 3x)^2 = [x(x - \frac{1}{x})^2 + 3x]^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$

Chú ý: Ví dụ trên có thể giải bằng cách áp dụng hằng đẳng thức như sau:

$A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^4 + (6x^3 - 2x^2) + (9x^2 - 6x + 1)$

$= x^4 + 2x^2(3x - 1) + (3x - 1)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$ **Ví dụ 3:**

A = $(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$

$(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) + (xy + yz + zx)^2$

Đặt $x^2 + y^2 + z^2 = a$, xy + yz + zx = b ta có

$A = a(a + 2b) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2$ **Ví dụ 4:** $B = 2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$ Đặt $x^4 + y^4 + z^4$ = a, $x^2 + y^2 + z^2$ = b, x + y + z = c ta có:

$B = 2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2a - 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b^2) + (b - c^2)^2$

Ta lại có: $a - b^2 = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$ và $b - c^2 = -2(xy + yz + zx)$ Do đó;

$B = -4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4(xy + yz + zx)^2$

$= -4x^2y^2 - 4y^2z^2 - 4z^2x^2 + 4x^2y^2 + 4y^2z^2 + 4z^2x^2 + 8x^2yz + 8xy^2z + 8xyz^2 = 8xyz(x + y + z)$

Ví dụ 5: $(a + b + c)^3 - 4(a^3 + b^3 + c^3) - 12abc$

Đặt a + b = m, a – b = n thì $4ab = m^2 - n^2$

$a^3 + b^3 = (a + b)[(a - b)^2 + ab] = m(n^2 + \frac{m^2 - n^2}{4})$. Ta có:

$C = (m + c)^3 - 4.\frac{m^3 + 3mn^2}{4} - 4c^3 - 3c(m^2 - n^2) = 3(-c^3 + mc^2 - mn^2 + cn^2)$

$= 3[c^2(m - c) - n^2(m - c)] = 3(m - c)(c - n)(c + n) = 3(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)$

PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH: Ví dụ 1: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

Nhận xét: các số 1, 3 không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên củng không có nghiệm hữu tỉ

Như vậy nếu đa thức phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng

4

$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$

đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho ta có: $\begin{matrix} a \quad c \quad 6 \\ ad \quad bc \quad 14 \\ bd \quad 3 \end{matrix}$

Xét bd = 3 với b, d Z, b1, 3 với b = 3 thì d = 1 hệ điều kiện trên trở thành

$\begin{matrix} a \ c \ \ 6 \\ ac \ \ 8 \\ a \ 3c \ \ 14 \\ bd \ \ 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2c \ \ 8 \\ ac \ \ 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c \ \ 4 \\ a \ \ 2 \end{matrix}$

Vậy: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$

Ví dụ 2: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$

Nhận xét: đa thức có 1 nghiệm là x = 2 nên có thừa số là x - 2 do đó ta có:

$2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + ax^2 + bx + c)$

$= 2x^4 + (a - 4)x^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$ $\quad \begin{matrix} a \ 4 \ \ 3 \\ b \ 2a \ \ 7 \\ c \ 2b \ 6 \\ 2c \ \ 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a \ \ 1 \\ b \ \ 5 \\ c \ \ 4 \end{matrix}$

Suy ra: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + x^2 - 5x - 4)$

Ta lại có $2x^3 + x^2 - 5x - 4$ là đa thức có tổng hệ số của các hạng tử bậc lẻ và bậc chẵn bằng nahu nên có 1 nhân tử là x + 1 nên $2x^3 + x^2 - 5x - 4 = (x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Vậy: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Ví dụ 3:

$12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (ax + by + 3)(cx + dy - 1)$

$= acx^2 + (3c - a)x + bdy^2 + (3d - b)y + (bc + ad)xy – 3$

$\begin{matrix} ac \quad 12 \\ bc \quad ad \quad 10 \\ 3c \ a \ 5 \ bd \\ 12 \ 3d \ b \ 12 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a \quad 4 \\ c \ 3 \\ d \quad 2 \end{matrix}$

$12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (4x - 6y + 3)(3x + 2y - 1)$

BÀI TẬP:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $x^3 - 7x + 6$
2) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$
3) $x^3 - 6x^2 - x + 30$
4) $2x^3 - x^2 + 5x + 3$
5) $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$
6) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$
7) $(x + 2)(x +3)(x + 4)(x + 5) - 24$
8) $4x^4 - 32x^2 + 1$
9) $3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2$
10) $64x^4 + y^4$
12) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$
13) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$
14) $x^8 + x + 1$
15) $x^8 + 3x^4 + 4$
16) $3x^2 + 22xy + 11x + 37y + 7y^2 +10$
17) $x^4 - 8x + 63$