CHUYÊN ĐỀ TOÁN 7

1. Lý thuyết

Tỷ lệ thức là đẳng thức giữa hai tỷ số

*** Tính chất của tỷ lệ thức:** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Tính chất 1: Từ tỷ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ suy ra a.d = b.c

Tính chất 2: Từ đẳng thức a.d = b.c với a, b, c, d $\neq$ 0 cho ta các tỷ lệ thức:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

Tính chất 3: Từ tỷ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ suy ra các tỷ lệ thức: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

*** Tính chất của dãy tỷ lệ thức bằng nhau:**

Tính chất 1: Từ tỷ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ suy ra các tỷ lệ thức sau: $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$, (b $\neq \pm$ d)

Tính chất 2: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{i}{j}$ suy ra các tỷ lệ thức sau:

$\frac{a}{b}=\frac{c+c+i}{b+d+j}=\frac{a-c+i}{b-d+j}$, (b, d, j $\neq$ 0)

Tính chất 3: a, b,c tỷ lệ với 3, 5, 7 tức là ta có: $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}$

2. Thực tế những năm trước kia khi chưa chú trọng trong việc rèn kỹ năng theo đề tài này học sinh gặp nhiều sai sót trong quá trình giải toán . Ví dụ các em hay sai nhất trong trình bày lời giải , sự nhầm lẫn giữa dấu “=” với dấu “=>”

Ví dụ: $\frac{x}{5}=\frac{y}{7}(\underset{d}{\Rightarrow})\frac{x}{5.3}=\frac{y}{7.3}$ thì các em lại dung dấu bằng là sai.

Hãy tìm x, y, z biết $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ và x – z = 7

Giải: $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}(\underset{s}{\Rightarrow})\frac{x-z}{5-4}=\frac{7}{1}=7$ vậy $\frac{x}{5}=7 \Rightarrow x=5.7$

Ở trên các em dùng dấu suy ra là sai

Hay khi biến đổi các tỷ lệ thức rất chậm chạp

Hiện nay các sai sót trên ít gặp hơn. Các em giải dạng toán này tương đối thành thạo khi tôi phân chia thành những dạng toán nhỏ.

1. ***Toán chứng minh đẳng thức***
2. ***Toán tìm x, y, z, ...***
3. ***Toán đố***
4. ***Toán về lập tỷ lệ thức***
5. ***Áp dụng và chứng minh bất đẳng thức***

Qua việc giải các bài tập đa dạng về áp dụng tính chất của tỷ lệ thức các em đã nắm chắc chắn tính chất của tỷ lệ thức

Biến đổi từ một tỷ lệ thức ra một tỷ lệ thức rất linh hoạt

III./ BÀI TẬP CỤ THỂ

A. Loại toán chứng minh đẳng thức

Bài 1. Chứng minh rằng : Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\neq 1$ thì $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ với a, b, c, d $\neq$ 0

Giáo viên hỏi: Muốn chứng minh trước hết xác định bài toán cho ta điều gì? Bắt chứng minh điều gì?

Giải: Với a, b, c, d $\neq$ 0 ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$\Rightarrow\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$ (1)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}$ (2)

Từ (1) và (2) => $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (ĐPCM)

Bài 2: Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ thì:

a, $\frac{5a+3b}{5a-3b}=\frac{5c+3d}{5c-3d}$

b, $\frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2}=\frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2}$

Giải:
- Nhận xét điều phải chứng minh?
- Làm như thế nào để xuất hiện 5a, 5c, 3b, 3d?
- Bài 1 gợi ý gì cho giải bài 2?

a. Từ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{5a}{5c}=\frac{3b}{3d}\Rightarrow\frac{5a}{3b}=\frac{5c}{3d}\Rightarrow\frac{5a+3b}{5a-3b}=\frac{5c+3d}{5c-3d}$ (đpcm)

b. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{ab}{cd}\Rightarrow\frac{7a^2}{7c^2}=\frac{8b^2}{8d^2}=\frac{3ab}{3cd}=\frac{11a^2}{11c^2}$

$\frac{7a^2+3ab}{7c^2+3cd}=\frac{11a^2-8b^2}{11c^2-8d^2}$ (đpcm)

<u>Bài 3</u>: CMR: Nếu $a^2=bc$ thì $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a}$ điều đảo lại có đúng hay không?

<u>Giải:</u> + Ta có: $a^2=bc\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{a+b}{c+a}\frac{a-b}{c-a}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a}$

+ Điều đảo lại cũng đúng, thật vậy:

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a}\Rightarrow(a+b)(c-a)=(a-b)(c+a)$

Ta có: $ac-a^2-bc-ab=ac+a^2-bc-ab$

$\Rightarrow 2bc=a^2$

$\Rightarrow a^2=bc$

<u>Bài 4</u>: Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ CMR $\frac{ac}{bd}=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$

<u>Giải:</u> $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{ac}{bd}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}\Rightarrow\frac{ac}{bd}=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$ (đpcm)

<u>Bài 5</u>: CMR: Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ thì $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4=\frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$

<u>Giải:</u>

Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a-b}{c-d}\Rightarrow\frac{a^4}{c^4}=\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4$ (1)

Từ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a^4}{c^4}=\frac{b^4}{d^4}=\frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4=\frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$ (đpcm)

<u>Bài 6</u>: CMR Nếu a + c = 2b (1) và 2bd = c(b+d) (2) đk: b; d≠0 thì $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

<u>Giải:</u>

Ta có: $a+c=2b \Rightarrow (a+c)d=2bd\,(3)$

Từ (3) và (2) $\Rightarrow c(b+d)=(a+c)d$

$\Rightarrow cb+cd=ad+cd$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (đpcm)

Bài 7: Cho a, b, c, d là 4 số khác nhau, khác không thỏa mãn điều kiện:

$b^2=ac; c^2=bd$ và $b^3+c^3+d^3 \neq 0$

CM: $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$

Giải: + Ta có $b^2=ac \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}(1)$

+ Ta có $c^2=bd \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{c}{d}(2)$

+ Từ (1) và (2) ta có $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}(3)$

Mặt khác: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{d}=\frac{a}{d}(4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$

Bài 8: CMR: Nếu a(y + z) = b(z + x) = c(x + y) (1)

Trong đó a ; b ; c là các số khác nhau và khác 0 thì:

$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}(*)$

Giải: Vì a; b; c $\neq$0 nên chia các các số của (1) cho abc ta có:

$\frac{a(y+z)}{abc}=\frac{b(z+x)}{abc}=\frac{c(x+y)}{abc} \Rightarrow \frac{y+z}{bc}=\frac{z+x}{ac}=\frac{x+y}{ab}(2)$

? Nhìn vào (*) ta thấy mẫu thức cần có ab – ac

? Ta sẽ biến đổi như thế nào?

Từ (2) $\Rightarrow \frac{y+z}{bc}=\frac{(x+y)-(z+x)}{ab-ac}=\frac{(y+z)-(x+y)}{bc-ab}=\frac{(z+x)-(y+z)}{ac-bc}$

$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$ (đpcm)

<u>Bài 9</u>: Cho $\frac{\text{bz-cy}}{a}=\frac{\text{cx-az}}{b}=\frac{\text{ay-bx}}{c}(1)$

CMR: $\frac{\text{x}}{a}=\frac{\text{y}}{b}=\frac{\text{z}}{c}$

<u>Giải</u>: Nhân thêm cả tử và mẫu của (1) với a hoặc b; c

Từ (1) ta có:

$$\frac{\text{bz-cy}}{a}=\frac{\text{abz-acy}}{a^2}=\frac{\text{bcx-baz}}{b^2}=\frac{\text{cay-cbx}}{c^2}=\frac{\text{abz-acy+bcx-baz+cay-cbx}}{a^2+b^2+c^2}=0$$

$\Rightarrow$ bz-cy = 0 $\Rightarrow$ bz = cy $\Rightarrow \frac{\text{x}}{\text{c}}=\frac{\text{y}}{\text{b}}$ (2)

$\Rightarrow$ ay-bx = 0 $\Rightarrow$ ay = bx $\Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}(3)$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ (đpcm)

<u>Bài 10</u>. Biết $\frac{\text{a}}{\text{a}'}+\frac{b'}{b}=1$ và $\frac{\text{b}}{b'}+\frac{c'}{c}=1$

CMR: abc + a'b'c' = 0

<u>Giải</u>: Từ $\frac{\text{a}}{\text{a}'}+\frac{b'}{b}=1\Rightarrow ab+a'b'=1(1)$

Nhân cả hai vế của (1) với c ta có: abc + a'b'c = a'bc (3)

Ta có: $\frac{\text{b}}{b'}+\frac{c'}{c}=1\Rightarrow bc+b'c'=b'c(2)$

Nhân cả hai vế của (2) với a' ta có:

a'bc + a'b'c' = a'b'c (4)

Cộng cả hai vế của (3) và (4) ta có:

abc + a'b'c + a'bc + a'b'c' = a'bc +a'b'c

=> abc + a'b'c = 0 (đpcm)

<u>B. Toán tìm x, y, z</u>

<u>Bài 11</u>. Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{15}=\frac{y}{20}=\frac{z}{28}$ và $2x+3y-2=186$

<u>Giải</u>: Giả thiết cho $2x+3y-2=186$

Làm như thế nào để sử dụng hiệu quả giả thiết trên?

Từ $\frac{x}{15}=\frac{y}{20}=\frac{z}{28}=\frac{2x}{30}=\frac{3y}{60}=\frac{z}{28}=\frac{2x+3y-z}{30+60-28}=\frac{186}{62}=3$

⇨ x = 3.15 = 45

⇨ y= 3.20 = 60

⇨ z = 3.28 = 84

Bài 12. Tìm x, y, z cho: $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$ và $2x+3y-z=372$

Giải: Nhận xét bài này và bài trên có gì giống nhau?

Đưa bài này về dạng bài trên bằng cách nào? Đưa tử số có cùng số chia

Ta có: $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\Rightarrow\frac{x}{15}=\frac{y}{20}$ (chia cả hai vế cho 5)

$\frac{y}{5}=\frac{z}{7}\Rightarrow\frac{y}{20}=\frac{z}{28}$ (chia cả hai vế cho 4)

$\Rightarrow\frac{x}{15}=\frac{y}{20}=\frac{z}{28}$

Tương tự học sinh tự giải tiếp: x = 90; y = 120; z = 168

Bài 13. Tìm x, y, z biết $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ và $\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$ và x + y + z = 98

Giải: Hãy nêu phương pháp giải (tìm GCNN (3;5)=?)

Học sinh nên tự giải (tương tự bài nào em gặp)

ĐS: x = 20; y = 30; z = 42

Bài 14. Tìm x, y, z biết 2x = 3y = 5z (1) và x + y –z = 95 (*)

Cách 1: Từ 2x = 3y $\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{y}{2}$

3y = 5z $\Rightarrow\frac{y}{5}=\frac{z}{3}$

Đưa về cách giải giống ba bài trên: cách này dài dòng

Cách 2: + Nếu có tỷ lệ của x, y, z tương ứng ta sẽ giải được (*)

+ Làm thế nào để (1) cho ta (*)

+ chia cả hai vế của (1) cho BCNN (2;3;5) = 30

2x = 3y = 5z $\Rightarrow\frac{2x}{30}=\frac{3y}{30}=\frac{5z}{30}=\frac{x}{15}=\frac{y}{10}=\frac{z}{6}=\frac{x+y-z}{15+10-6}=\frac{95}{19}=5$

=> x = 75, y = 50, z = 30

Bài 15. Tìm x, y, z biết:

$\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z(1)$ và x – y = 15

Giải: Hãy nêu cách giải (tương tự bài 11)

BCNN(1 ;2 ;3) = 6

Chia các vế của (1) cho 6 ta có

$\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8} = \frac{x-y}{12-9} = \frac{15}{3} = 5$

=> x = 2.15 = 60; y = 5.9 = 45; z = 8.5 = 40

Bài 16. Tìm x, y, z biết:

a. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}(1)$ và 2x + 3y –z = 50

b. $\frac{2x}{3} = \frac{2y}{4} = \frac{4z}{5}(2)$ và x + y +z = 49

Giải:

a. Với giả thiết phần a ta co cách giải tương tự bài nào? (bài 11)

Từ (1) ta có: $\frac{2(x-1)}{4} = \frac{3(y-2)}{9} = \frac{z-3}{4} = \frac{2x-2+3y-6-z+3}{4+9-4}$
$= \frac{(2x+3y-z)+-2-6+3}{9} = \frac{50-5}{9} = 5$

$\frac{x-1}{2} = 5 \Rightarrow x = 11$

$\frac{y-2}{3} = 5 \Rightarrow x = 17$

$\frac{z-3}{4} = 5 \Rightarrow x = 23$

b. ? Nêu cách giải phần b? (tương tự bài 15)

Chia các vế cho BCNN (2;3;4) = 12

$\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} \Rightarrow \frac{2x}{3.12} = \frac{3y}{4.12} = \frac{4z}{5.12}$

$\Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{18+16+15} = \frac{49}{49} = 1$

=> x = 18; y = 16; z = 15

Bài 17. Tìm x; y; z biết rằng:

a. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và xy = 54 (2)

b. $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}$ và $x^2+y^2=4$ (x, y > 0)

<u>Giải</u>: ? Làm như thế nào để xuất hiện xy mà sử dụng giả thiết.

a. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}(1)\Rightarrow \frac{x}{2}.\frac{x}{2}=\frac{y}{3}.\frac{x}{2}\Rightarrow \frac{x^2}{4}=\frac{xy}{6}=\frac{54}{6}=9$

$x^2=4.9=(2.3)^2=(6)^2=(-6)^2\Rightarrow x=\pm 6$

Thay vào (2) ta có: $x=6\Rightarrow y=\frac{54}{6}=9$

$x=-6\Rightarrow y=\frac{54}{-6}=-9$

b. $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}\Rightarrow \frac{x^2}{25}=\frac{y^2}{9}=\frac{x^2-y^2}{25-9}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x^2=\frac{25}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{5}{2}$

$\Rightarrow y^2=\frac{9}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{3}{2}$

<u>Bài 18</u>. Tìm các số a_1, a_2, …a_9 biết:

$\frac{a_1-1}{9}=\frac{a_2-2}{8}=...=\frac{a_9-9}{1}$ và $a_1+a_2+...+a_9=90$

<u>Giải</u> : $\frac{a_1-1}{9}=\frac{(a_1+a_2+...+a_9)-(1+2+...+9)}{9+8+...+1}=\frac{90-45}{45}=1$

Từ đó dễ dàng suy ra a_1; a_2; …

<u>Bài 19</u>. Tìm x; y; z biết:

a. $\frac{y+z+1}{x}=\frac{x+z+2}{y}=\frac{x+y-3}{z}=\frac{1}{x+y+z}(1)$

<u>Giải</u>: Theo tính chất của dãy tỷ số bằng nhau ta có từ (1)

$\frac{y+z+1}{x}=\frac{y+z+1+x+z+2+x+y-3}{x+y+z}=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y+z} = 2 \Rightarrow x+y+z = 0,5$$

$$\frac{y+z+1}{x} = 2 \Rightarrow y+z+1 = 2x \Rightarrow x+y+z+1 = 2x+x$$

$$\Rightarrow 1,5 = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Nếu a + y + z ≠ 0 : $\frac{x+z+2}{y} = 2 \Rightarrow x+y+z+2 = 3y$

$$\Rightarrow 2,5 = 3y \Rightarrow y = \frac{5}{6}$$

$$\frac{x+y-3}{z} = 2 \Rightarrow x+y+z-3 = 3z$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{2} = 3z \Rightarrow z = -\frac{5}{6}$$

b. Tương tự các em tự giải phần b

Tìm x, y, z biết:

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z$$

Nếu x + y + z ≠ 0 => x + y + z = 0,5

ĐS : $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}; z = -\frac{1}{2}$

Nếu x + y + z = 0 => x = y = z = 0

<u>Bài 20</u>. Tìm x biết rằng: $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$

<u>Giải:</u>

$$\frac{1+4y}{24} = \frac{1+2y+1+6y}{18+6x} = \frac{2+8y}{18+6x} \Rightarrow \frac{1+4y}{24} = \frac{2+8y}{18+6x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+4y}{24} = \frac{24}{18+6x} \Rightarrow \frac{1+4y}{2(1+4y)} = \frac{24}{18+6x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 18+6x = 24.2$$

$$\Rightarrow 6(3+x) = 6.4.2$$

$$\Rightarrow 3+x = 8 \Rightarrow x = 5$$

<u>Bài 21</u>. Tìm x, y,z biết rằng:

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và xyz = 810

Giải:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}\Rightarrow\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{3}\cdot\frac{z}{5}=\frac{xyz}{30}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)^3=\frac{810}{10}=27\Rightarrow\frac{x^3}{8}=27$$

$$\Rightarrow x^3=8.27=2^3.3^3=(2.3)^3$$

$$\Rightarrow x=6$$

mà $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\Rightarrow y=\frac{3.6}{2}=9$

$z=15$

Bài 22. Tìm các số x_1, x_2, …x_{n-1}, x_n biết rằng:

$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\cdots=\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{x_n}{a_n}$ và $x_1+x_2+\cdots+x_n=c$

$(a_1\neq 0,...,a_n\neq 0;a_1+a_2+...+a_n\neq 0)$

Giải:

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\cdots=\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{x_n}{a_n}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{a_1+a_2+...+a_n}=\frac{c}{a_1+a_2+...+a_n}$$

$$x_i=\frac{c.a_i}{a_1+a_2+...+a_n}$$

trong đó: i = 1, 2,…, n

Bài 23. Tìm các số x; y; z ЄQ biết rằng: $(x+y):(5-z):(y+z):(9+y)=3:1:2:5$

Giải: Ta có:

$$\frac{x+y}{3}=\frac{5-z}{1}=\frac{y+z}{2}=\frac{9+y}{5}=k(1)$$

$$\frac{(x+y)+(5-z)+(y+z)+(9+y)}{3+1+2+5}=\frac{x+y-4}{1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y-4=k\\x+y=3k\end{cases}\Rightarrow k+4=x+y$$

$$\Rightarrow 4+k=3k\Rightarrow 4=2k\Rightarrow k=2$$

$\Rightarrow 5-z=k \Rightarrow z=5-k=5-2=3$

$9+y=5k \Rightarrow y=5k-9=10-9=1$

Từ (1) $x+y=3k \Rightarrow x=3k-y=6-1=5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

Bài 24. Tổng các luỹ thừa bậc ba của 3 số là -1009. Biết tỷ số giữa số thứ 1 và số thứ 2 là $\frac{2}{3}$; giữa số thứ 1 và số thứ 3 là $\frac{4}{9}$. Tìm 3 số đó?

Giải:

Ta có:

$x^3+y^3+z^3=-1009$

$\frac{x}{y}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{y}{6}$

$\frac{x}{z}=\frac{1}{9} \Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{z}{9} \Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z}{9}$

$\Rightarrow x=4k, y=6k, z=9k$

$x^3+y^3+z^3=(4k)^3+(6k)^3+(9k)^3=64k^3+216k^3+729k^3=1009k^3=-1009$

$\Rightarrow k^3=-1 \Rightarrow k=-1$

$\Rightarrow x=-1.4=-4$

$\Rightarrow y=-1.6=-6$

$\Rightarrow z=-1.9=-9$

C./ TOÁN ĐỐ

(ngoài những dạng đơn giản trong sgk giáo viên soạn bổ sung thêm)

Bài 25. Có 3 đội A; B; C có tất cả 130 người đi trồng cây. Biết rằng số cây mỗi người đội A; B; C trồng được theo thứ tự là 2; 3; 4 cây. Biết số cây mỗi đội trồng được như nhau. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu người đi trồng cây?

Giải:

+ Gọi số người đi trồng cây của đội A; B; C lần lượt là: x; y; z (người), đk: x; y; z $\in N^*$

+ Theo bài ra ta có:

x.2 = y.3 = 4.z (1) và x + y+ z =130

BCNN (2;3;4) = 12

$\frac{x.2}{12}=\frac{y.3}{12}=\frac{4.z}{12}\Rightarrow\frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{x+y+z}{6+4+3}=\frac{130}{13}=10$

$x=60; y=10; z=30$

Trả lời: Đội A; B; C có số người đi trồng cây theo thứ tự là 60; 40; 30

ĐS: 60; 40; 30

Bài 26. Trường có 3 lớp 7, biết $\frac{2}{3}$ có số học sinh lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh 7B và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh 7C. Lớp 7C có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của 2 lớp kia là 57 bạn. Tính số học sinh mỗi lớp?

Giải: Gọi số học sinh 7A; 7B; 7C lần lượt là x; y; z (em), x; y; z $\neq 0$

Theo bài ra ta có:

$\frac{2}{3}x=\frac{3}{4}y=\frac{4}{5}z(1)$ và x + y + z = 57

Chia (1) cho BCNN (3;4;5) = 12

$\Rightarrow\frac{x}{18}=\frac{y}{16}=\frac{z}{15}=\frac{x+y-z}{18+16-15}=\frac{57}{19}$

=> x = 54; y = 18; z =45

Trả lời: số học sinh các lớp 7A; 7B; 7C lần lượt là: 54; 18; 45

ĐS: 54; 18; 45

Bài 27. Tìm ba số nguyên dương biết BCNN của chúng là 3150 và tỷ số số thứ nhất với số thứ 2 là $\frac{5}{9}$, của số thứ nhất với số thứ ba là $\frac{10}{7}$.

Giải: Gọi ba số nguyên dương lần lượt là: x; y; z

Theo bài ra ta có: BCNN (x;y;z) = 3150

$\frac{x}{y}=\frac{5}{9};\frac{x}{z}=\frac{10}{7}\Rightarrow\frac{x}{5}=\frac{y}{9};\frac{x}{10}=\frac{z}{7}$

$\Rightarrow\frac{x}{10}=\frac{y}{18}=\frac{z}{7}=k$

$\Rightarrow x=10k=2.5.k$

$\Rightarrow y=18.k=3^2.2.k$

$\Rightarrow z=7.k$

BCNN (x;y;z)=3150 = $2.3^2.5.7$

⇨ k = 5

⇨ x=50; y = 90; z = 35

Vậy 3 số nguyên dương lần lượt là x = 50; y = 90; z = 35.

E./ TÍNH CHẤT CỦA TỶ LỆ THỨC ÁP DỤNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

Tính chất 1: (Bài 3/33 GK Đ7) Cho 2 số hữu tỷ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ với b> 0; d >0.

CM: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad<bc$

Giải:

+ Có $\left.\begin{matrix}\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\\ b>0;d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{\text{db}}{\text{bd}}<\frac{\text{cd}}{\text{db}}\Rightarrow ad<bc$

+ Có: $\left.\begin{matrix}ad<bc\\ b>0;d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{\text{ad}}{\text{bd}}<\frac{\text{bc}}{\text{db}}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$

Tính chất 2: Nếu b > 0; d > 0 thì từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

(Bài 5/33 GK Đ7)

Giải:

+ $\left.\begin{matrix}\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\\ b>0;d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ad<bc(1)$ thêm vào 2 vế của (1) với ab ta có:

$\Rightarrow ad+ab<bc+ab$

$a(b+d)<c(b+d)\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}(2)$

+ Thêm vào hai vế của (1) dc ta có:

$(1) \Rightarrow ad + dc < bc + dc$

$\Rightarrow d(a+c) < c(b+d)$

$\Rightarrow \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d} (3)$

+ Từ (2) và (3) ta có:

Từ $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$ (đpcm)

Tính chất 3: a; b; c là các số dương nên

a, Nếu $\dfrac{a}{b} < 1$ thì $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$

b, Nếu $\dfrac{a}{b} > 1$ thì $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a+c}{b+c}$

Bài 30. Cho a; b; c; d > 0.

CMR: $1 < \dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b} < 2$

Giải:

+ Từ $\dfrac{a}{a+b+c} < 1$ theo tính chất (3) ta có:

$\dfrac{a+d}{a+b+c+d} > \dfrac{a}{a+b+c} (1)$ (do d>0)

Mặt khác: $\dfrac{a}{a+b+c} > \dfrac{a}{a+b+c+d} (2)$

+ Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{a}{a+b+c+d} < \dfrac{a}{a+b+c} < \dfrac{a+d}{a+b+c+d} (3)$

Tương tự ta có:

$\dfrac{b}{a+b+c+d} < \dfrac{b}{b+c+d} < \dfrac{b+a}{a+b+c+d} (4)$

$\dfrac{c}{a+b+c+d} < \dfrac{c}{c+d+a} < \dfrac{c+b}{c+d+a+b} (5)$

$\dfrac{d}{\text{d+a+b+c}} < \dfrac{d}{d+a+b} < \dfrac{d+c}{a+b+c+d} (6)$

Cộng bất đẳng thức kép (3); (4); (5); (6) theo từng vế thì được:

$1 < \dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b} < 2$ (đpcm)

<u>Bài 31</u>. Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $b;d > 0$ CMR: $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$

<u>Giải:</u>

Ta có $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $b;d > 0$ nên $\frac{a.b}{b.b} < \frac{c.d}{d.d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2}$

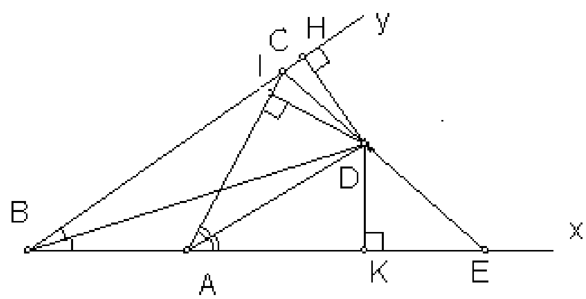
Theo tính chất (2) ta có: $\frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$ (đpcm)

Chuyên đề hình học

<u>Bài toán 1:</u> Cho tam giác ABC có $ABC = 30^0$ và $BAC = 130^0$. Gọi Ax là tia đối của tia AB, đường phân giác của góc ABC cắt phân giác CAx tại D. Đường thẳng BA cắt đường thẳng CD tại E. So sánh độ dài AC và CE.

<u>Giải:</u>

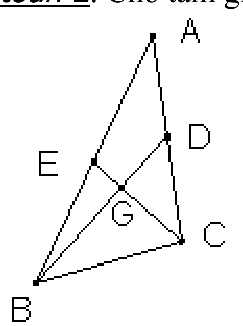
Gọi Cy là tia đối của tia CB. Dựng DH, DI, DK lần lượt vuông góc với BC. AC, AB. Từ giả thiết ta suy ra DI = DK; DK = DH nên suy ra DI = DH (CI nằm trên tia CA vì nếu điểm I thuộc tia đối của CA thì DI > DH). Vậy CD là tia phân giác của ICy và ICy là góc ngoài của tam giác ABC suy ra



$ACD = DCy = \frac{A+B}{2} = \frac{30^0 + 130^0}{2} = 80^0$.

Mặt khác $CAE = 180^0 - 130^0 = 50^0$. Do đó, $CEA = 50^0$ nên ΔCAE cân tại C. Vậy CA = CE

<u>Bài toán 2</u>: Cho tam giác ABC có BC = 10 cm. Các đường trung tuyến BD và CE có độ dài theo thứ tự bằng 9 cm và 12cm. Chứng minh rằng: $BD \perp CE$



<u>Giải</u>:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó ta có:

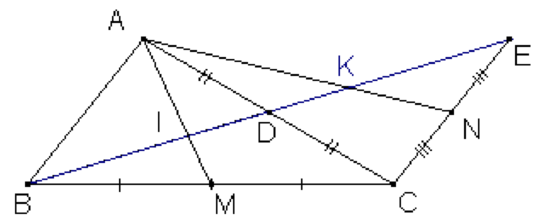
$GC = \frac{2}{3}CE = \frac{2}{3}.12 = 8(cm)$

$GB = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}.9 = 6(cm)$. Tam giác BGC có $10^2 = 6^2 + 8^2$

hay $BC^2 = BG^2 + CG^2$. Suy ra ΔBGC vuông tại G hay $BD \perp CE$

<u>Bài toán 3:</u> Cho tam giác ABC , đường trung tuyến BD. Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho DE = DB. Gọi M, N theo thứ tự trung điểm của BC và CE. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của AM, AN với BE. Chứng minh rằng BI = IK = KE

Giải:



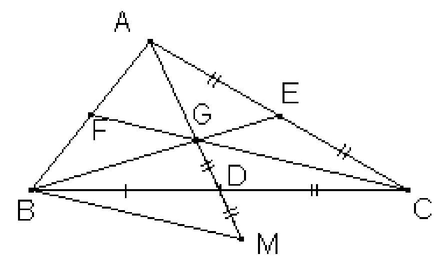
Do AM và BD là hai trung tuyến của tam giác ABC cắt nhau tại I nên I là trọng tâm của tam giác ABC, ta có: $BI = \frac{2}{3}BD$ (1)

Ta có K là trọng tâm tam giác ACE nên $EK = \frac{2}{3}ED$ (2)

Mà BD = DE từ (1) và (2) suy ra BI = EK (3) . Mặt khác, ta lại có: $ID = \frac{1}{3}BD$ và $KD = \frac{1}{3}ED$ suy ra ID = KD (do BD = ED) nên $IK = \frac{2}{3}BD$ (4). Từ (3) và (4) suy ra BI = IK = KE.

__Bài toán 4:__ Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD = 12cm.Trung tuyến BE = 9cm và trung tuyến CF = 15cm. Tính độ dài BC (hính xác đến 0,1 cm)

Giải:



Trên tia đối của tia DG lấy điểm M sao cho DM = DG khi đó AG = GM = $\frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}.12 = 8(cm)$; $BG = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}.9 = 6(cm)$;

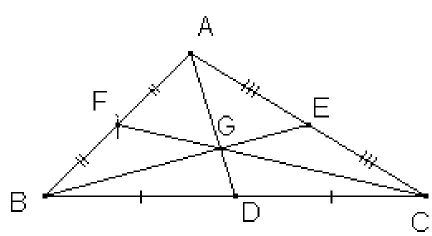
$\Delta BDM = \Delta CDG(c.g.c)$ nên suy ra $GCD = DBM$ (so le trong) nên BM//CG và MB = CG mà $CG = \frac{2}{3}CF = \frac{2}{3}.15 = 10(cm)$. Mặt khác, ta có $10^2 = 6^2 + 8^2$ hay $BM^2 = BG^2 + MG^2$. Suy ra ΔBGD vuông tại G.

Theo định lý Pythagore ta có $BD = \sqrt{BG^2 + GD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$.

Vậy BC = 2BD = $2\sqrt{52} \approx 14,4(cm)$

__Bài toán 5__: Chứng minh rằng tổng độ dài ba đường trung tuyến của một tam giác lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi của tam giác ấy.

Giải:



Ta có $2AD < AB + AC$; $2BE < AB + BC$; $2CF < BC + AC$ nên suy ra $2\left(AD + BE + CF\right) < 2\left(AB + BC + CA\right)$ hay $\left(AD + BE + CF\right) < \left(AB + BC + CA\right)$ (1)

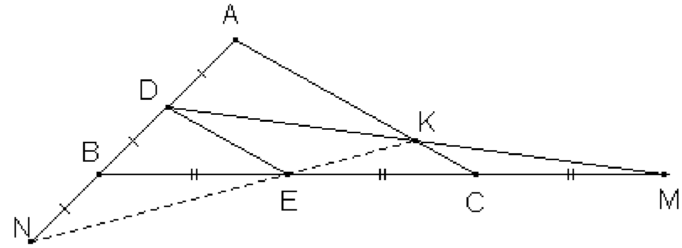
Trong tam giác BGC có: BG + GC > BC mà $BG = \frac{2}{3}BE$ $CG = \frac{2}{3}CF$ nên $\frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}CF > BC \Leftrightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC$.

Tương tự ta có $CF + AD > \frac{3}{2}AC$; $BE + AD > \frac{3}{2}AB$. Cộng các bất đẳng thức vế theo vế ta có:

$2\left(AD + BE + CF\right) > \frac{3}{2}\left(AB + BC + CA\right) \Leftrightarrow D + BE + CF > \frac{3}{4}\left(AB + BC + AC\right)$ (2).

Kết hợp (1) và (2) suy ra $\frac{3}{4}\left(AB + BC + AC\right) < AD + BE + CF < AB + BC + AC$ (đpcm)

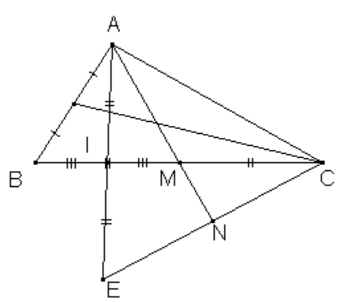
Bài toán 6: Cho tam giác ABC, gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AB và BC. Vẽ các điểm M, N sao cho C là trung điểm của ME và B là trung điểm của ND. Gọi K là giao điểm của AC và DM. Chứng minh N, E, K thẳng hàng.



Giải:

Tam giác MND có BE = EC = CM nên $ME = \frac{2}{3}MB$ mà MB là trung tuyến nên E là trọng tâm suy ra NE là trung tuyến của tam giác NMD. Mặt khác, DE //AC do DE là đường trung bình của tam giác ABC hay DE // KC mà C là trung điểm của ME nên K là trung điểm của DM. Nên ba điểm N, E, K thẳng hàng.

Bài toán 7: Cho tam giác ABC đường trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của BM. Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho IE = IA. Gọi N là trung điểm của EC. Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua N



Giải:

Tam giác AEC có CI là đường trung tuyến (vì IE = IA) nên $CM = \frac{2}{3}CI$ nên M là trọng tâm của tam giác AEC do đó AM đi qua N

Bài toán 8: Cho tam giác ABC có AH vuông góc với BC và $BAH = 2C$. Tia phân giác của B cắt AC tại E.

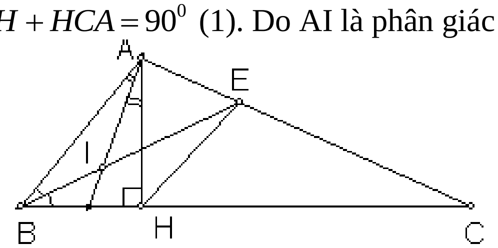
a) Tia phân giác BAH cắt BE tại I. Chứng minh rằng tam giác AIE vuông cân.

b) Chứng minh rằng HE là tia phân giác AHC

Giải:

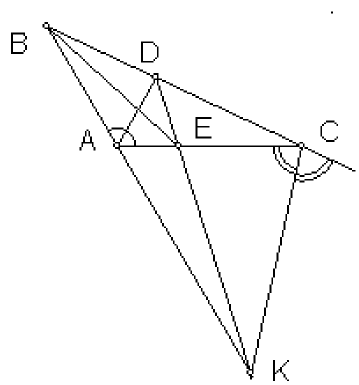
a) Chứng minh ΔAIE vuông cân:

Ta có $AH \perp BC$ nên tam giác AHC vuông tại H nên $CAH + HCA = 90^0$ (1). Do AI là phân giác của BAH nên $IAH = BAI = \frac{1}{2}BAH \Rightarrow BAH = 2IAH$



mà $BAH = 2C$ (gt) nên $IAH = C$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $CAH + IAH = 90^0$ nên tam giác AIE vuông tại A. Ta có $ABI = \frac{1}{2}B$; $BAI = \frac{1}{2}BAH$ Do AIE là góc ngoài của tam giác BIA nên

$AIE = ABI + BAI = \frac{1}{2}(B + BAH) = \frac{1}{2}.90^0 = 45^0$ nên tam giác AIE vuông cân



b)Chứng minh HE là tia phân giác AHC

Ta có $IA \perp AC$ mà AI là phân giác trong của tam giác BAH nên AE là phân giác ngoài của tam giác ABH tại A. BE là phân giác trong của tam giác ABH suy ra HE là phân giác ngoài tại AHC

Bài toán 9: Cho tam giác ABC có góc $A = 120^0$. Đường phân giác AD, đường phân giác ngoài tại C cắt AB tại K. Gọi E là giao điểm của DK và AC. Tính số đo của góc BED

Giải:

Tam giác ADC có hai phân giác ngoài tại A và C cắt nhau tại K nên DK là phân giác trong của ADC

Trong tam giác BAD có AE và DE là hai phân giác ngoài của các góc A và D cắt nhau tại E nên BE là phân giác trong của góc B.

EDC là góc ngoài của tam giác BDE nên ta có $EDC = DBE + DEB$ mà $EDC = ADE$ (do DE là phân giác ADC) suy ra

$$DEB = EDC - DBE = EDA - \frac{1}{2}ABD = \frac{2EDA - ABD}{2} = \frac{ADC - ABC}{2} = \frac{BAD}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$$

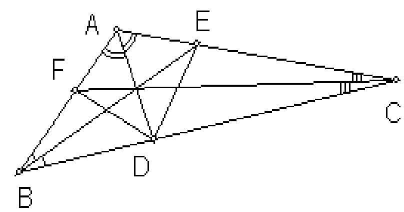
Bài toán 10: Cho tam giác ABC có $A = 120^0$ các đường phân giác AD, BE, CF.

a) Chứng minh rằng DE là tia phân giác ngoài của tam giác ADB

b) Tính EDF

Giải:

a) Chứng minh rằng DE là tia phân giác ngoài của tam giác ADB.



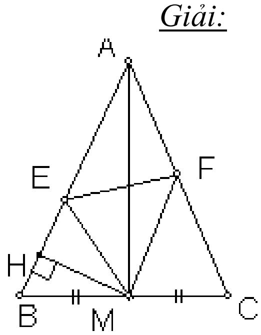
Tam giác BAD có AE và BE là hai phân giác ngoài và trong tại đỉnh A và B (Do $A = 120^0$) nên DE là phân giác ngoài của tam giác ABD.

b) Tính EDF

Trong tam giác ACD có AF và CF là hai phân giác ngoài và trong tại các đỉnh A và C cuả tam giác ADC nên DF là phân giác ngoài của góc D của tam giác ADC suy ra DE là phân giác trong tại đỉnh D nên $DE \perp DF$ hay $EDF = 90^0$

Bài toán 11:Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC. Kẻ MH vuông góc với AB . Gọi E là một điểm thuộc đoạn AH. Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AEF = 2.EMH$. Chứng minh FM là tia phân giác của góc EFC

Giải:



Tam giác ABC cân tại A có AM là trung tuyến nên AM là phân giác BAC. Tam giác AEF có AM là phân giác trong tại góc A nên ta phảI chứng minh EM là phân giác góc ngoài tại E của tam giác AEF.

Thật vậy, Do tam giác EMH vuông tại H nên $HEM = 90^0 - EMH$ mà $AEF = 2.EMH$ (gt) nên $\frac{1}{2}AEF = EMH$. Do đó

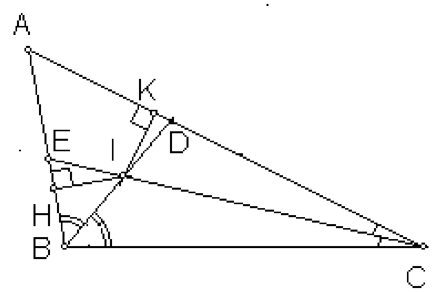
$HEM = 90^0 - EMH = 90^0 - \frac{1}{2}AEF \quad (1)$. Mặt khác ta có

$FEM = 180^0 - (AEF + BEM) = 180^0 - \left(AEF + 90^0 - \frac{1}{2}AEF\right) = 90^0 - \frac{1}{2}AEF \quad (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $HEM = FEM$ hay EM là phân giác của BEF. Tia phân giác trong AM của góc A và tia

EM là phân giác ngoài của tam giác AEF cắt nhau tại M nên FM là phân giác ngoài của AFE hay FM là phân giác EFC

Bài toán 12: Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I và ID = IE. Chứng minh rằng $B = C$ hay $B + C = 120^0$

Giải:



Qua I kẻ $IH \perp AB$ và $IK \perp AC$, Do I là giao điểm của hai đường phân giác nên $IH = IK$ và $ID = IE(gt)$ nên $\Delta IHE = \Delta IKD$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) nên suy ra $ADB = BEC$ (1)

a) Trường hợp $K \in AD; H \in BE$ thì ta có

$BEC = A + \frac{1}{2}C$ (BEC là góc ngoài của ΔAEC) (2)

$ADB = C + \frac{1}{2}B$ (ADB là góc ngoài của ΔDBC) (3) . Từ (1); (2) và (3) $A + \frac{1}{2}C = C + \frac{1}{2}B$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B \Rightarrow 2A = C + B \Rightarrow 3A = A + C + B = 180^0 \Rightarrow A = 60^0 \Rightarrow C + B = 120^0$

b) Nếu $H \in AE$ và $K \in DC$ thì suy ra tương tự trên ta có $C + B = 120^0$

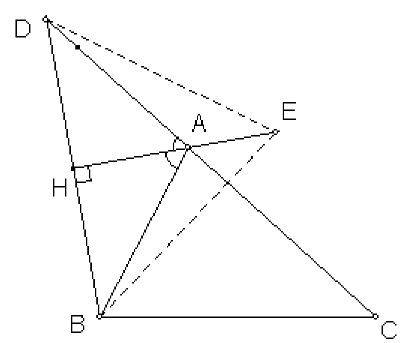
c) Nếu $H \in EB$ và $K \in DC$ thì $A + \frac{1}{2}C = A + \frac{1}{2}B \Leftrightarrow C = B$

d) $H \in AE$ và $K \in DA$ thì $C + \frac{1}{2}B = B + \frac{1}{2}C \Leftrightarrow C = B$.

Vậy cả bốn trường hợp trên ta luôn có $B = C$ hoặc $C + B = 120^0$

Bài toán 13: Cho tam giác ABC. Tìm điểm E thuộc phân giác góc ngoài tại đỉnh A sao cho tam giác EBC có chu vi nhỏ nhất.

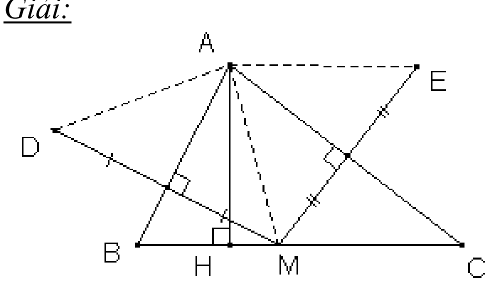
Giải:



Chu vi tam giác EBC nhỏ nhất khi và chỉ khi tổng EB + CE nhỏ nhất. Vẽ BH vuông góc với phân giác ngoài tại góc A cắt AC tại D vì đường thẳng a (đường phân giác ngoài tại đỉnh A) của tam giác ABC nên a là đường trung trực của BD nên EB = ED . Do đó $EB + EC = ED + EC \geq DC$ với mọi điểm E thuộc a ta có $EB + EC \geq DC$ xảy ra dấu đẳng thức thì E nằm giữa D và C. Vậy $E \equiv A$ thì chu vi tam giác EBC nhỏ nhất

Bài toán 14: Cho tam giác ABC nhọn. Tìm điểm M trên cạnh BC sao cho nếu vẽ các điểm D, E trong đó AB là đường trung trực MD, AC là đường trung trực của ME thì DE có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

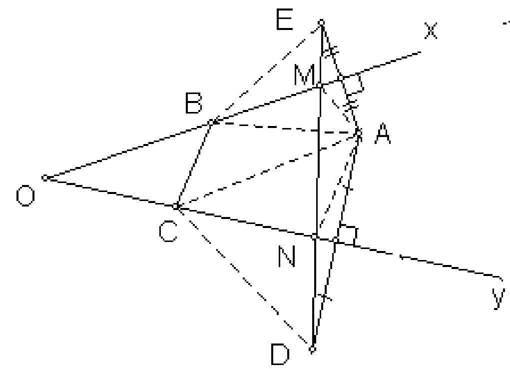


Ta có AB là đường trung trực của MD nên $AD = AM$ (1)

AC là đường trung trực của ME nên $AM = AE$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $AD = AE$ nên tam giác ADE cân tại A và

$DAE = 2.BAC$ không đổi nên DE đạt nhỏ nhất nếu AD nhỏ nhất. $AD = AM \ge AH$ với $AH \perp BC$ xảy ra dấu bằng khi $M \equiv H$ khi đó DE đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 15: Cho A nằm trong góc xOy nhọn. Tìm điểm B,C lần lượt thuộc Ox, Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.



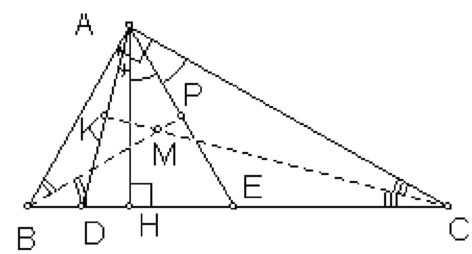
Giải:

Vẽ D đối xứng với A qua Oy, E đối xứng với A qua Ox
Nên Oy, Ox lần lượt là các đường trung trực của AD và AE. Khi đó ta có CA = CD và BE = BA nên chu vi của tam giác ABC là: CB + AB + CA = CB + CD + BE $\ge DE$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $B \equiv M; C \equiv N$. Do đó ΔABC có chu vi nhỏ nhất ở vị trí ΔAMN

Bài toán 16: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của góc HAB cắt BC tại D, tia phân giác của góc HAC cắt BC tại E. Chứng minh rằng giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC là giao điểm các đường trung trực của tam giác ADE

Giải:

Ta có ADE là góc ngoài của tam giác ADB nên $ADE = DBA + BAD$. Mặt khác ta có: $DAC = CAH + HAD$ mà $ABH = HAC$ (cùng phụ với BAH); $BAD = DAH$ (Do AD là tia phân giác của BAH nên $ADC = DAC$. Vậy tam giác CAD cân tại C mà CK là đường phân giác nên CK cũng là đường trung trực của AD.

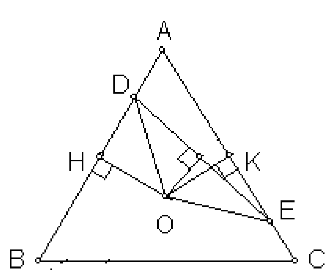


Tương tự ΔABE cân tại E mà BP là đường phân giác nên BP cũng là đường trung trực của AE. Nên M là giao điểm của hai đường phân giác CK và BP cũng là giao điểm của hai đường trung trực của tam giác ADE.

Bài toán 17: Cho tam giác ABC cân tại A, các điểm E và D theo thứ tự di chuyển trên hai cạnh AB và AC sao cho AD = CE. Chứng minh rằng các đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định

Giải:

Khi $D \equiv B \Rightarrow E \equiv A$. Đường trung trực của DE chính là đường trung trực của AB
Khi $D \equiv A \Rightarrow E \equiv C$. Đường trung trực của DE chính là đường trung trực của AC.



Gọi O là giao điểm của hai đường trung trực AB và AC. Ta phải chứng minh đường trung trực của DE đi qua O.
Ta có tam giác ABC cân tại A nên O nằm trên đường trung trực của BC. Suy ra AH = KC mà AD = CE (gt) nên DH = KE và OH = OK nên $\Delta HDO = \Delta KEO\left(c.g.c\right)$. Do đó OD = OC. Vậy mọi đường trung trực của DE đều đi qua một điểm cố định O

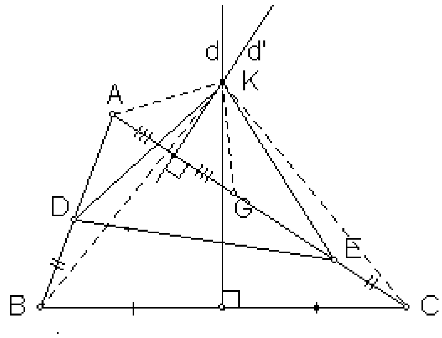
Khai thác bài toán trên:

Nếu ΔABC bất kỳ với AC > AB và BD = CE thì các đường trung trực của DE luôn đi qua điểm cố định nào?

Tìm điểm đặc biệt:

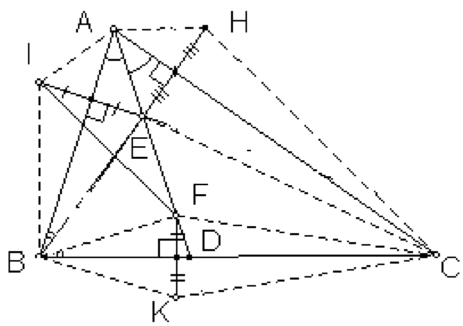
Khi $D \equiv B \Rightarrow E \equiv C$. Đường trung trực của DE chính là đường trung trực của BC.

Khi $D \equiv A \Rightarrow E \equiv G$. Với $G \in AC$.Đường trung trực của AG là (d') cắt đường trung trực (d) của BC tại K. Vậy mọi đường trung trực của DE đều đi qua K.



Thật vậy, trên cạnh AC lấy điểm G sao cho AB = CG. Gọi K là giao điểm của hai đường trung trực (d) và (d') của các đoạn thẳng BC và AG khi đó ta có KB = KC và KA = KG nên $\Delta AKB = \Delta GKC\left(c.c.c\right)$ nên suy ra

$ABK = GCK$, hay $DBK = ECK$ nên $\Delta DKB = \Delta EKC\left(c.g.c\right)$ suy ra KD = KE. Vậy đường trung trực của DE luôn qua K (đpcm)



__Bài toán 18__: Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Trên đoạn thẳng AD lấy điểm E và F sao cho $ABE = CBF$. Chứng minh rằng $ACE = BCF$.

Giải:

Vẽ K, H, I sao cho BC, AC, AB là các đường trung trực của KF, EH, EI. Khi đó ta có $HCE = 2.ACE$;

$KCF = 2.FCB$. Ta phải chứng minh $ACE = BCF$

Ta có AI = AE = AH (vì AB là đường trung trực của EI) nên tam giác AHI cân tại A mà AE là phân giác nên AD là đường trung trực của IH do đó IF = FH (1). Ta lại có BK = BF ; $IBE = FBK$ và BI = BE nên $\Delta BEK = \Delta BIF\left(c.g.c\right)$

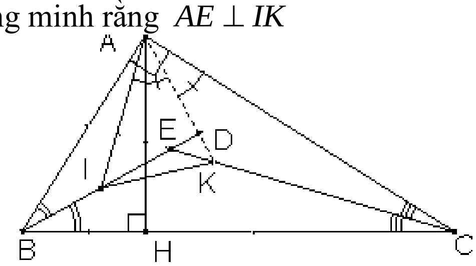
suy ra EK = IF (2). Từ (1) và (2) suy ra EK = FH (3)

Xét tam giác ΔHCF và ΔECK ta có HC = EC (4) (vì AC là đường trung trực của EH); CF = CK (vì BC là đường trung trực của KF) (5) . Từ (3) ,(4) và (5) nên $\Delta HCF = \Delta ECK\left(c.c.c\right)$ suy ra

$HCF = ECK \Rightarrow HCE + ECF = KCF + FCE \Rightarrow HCE = KCF \Rightarrow ACE = BCF$ (đpcm)

__Bài toán 19__: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E,I,K theo thứ tự là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC, ABH, ACH. Chứng minh rằng $AE \perp IK$

__Giải:__



Ta có $B = HAC$ (vì cùng phụ với BAH)

$ABI = IBC = \frac{B}{2}$ (Do BI là tia phân giác của góc B)

$HAD = DAC = \frac{CAH}{2}$ (Do AD là tia phân giác của góc CAH) Từ những đẳng thức trên suy ra $ABI = DAC$ mà

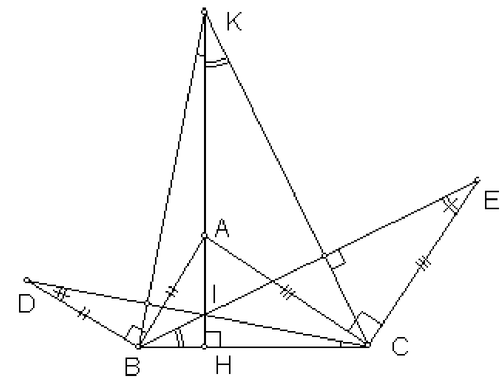
$DAC + KAB = 90^0 \Leftrightarrow ABI + KAB = 90^0 \Rightarrow ADB = 90^0$ nên $BD \perp AD$. Chứng minh tương tự ta cũng có $CE \perp AI$ .Tam giác AIK có hai đường cao cắt nhau tại E nên E là trực tâm của tam giác nên $AE \perp IK$

Bài toán 20: Cho tam giác ABC, đường cao AH, vẽ ngoài tam giác ấy các tam giác vuông cân ABD, ACE với $B = C = 90^0$

a) Qua điểm C vẽ đường thẳng vuông góc với BE cắt đường thẳng HA tại K. Chứng minh rằng $DC \perp BK$.

b) Ba đường thẳng AH, BE, CD đồng quy

Giải:



a) Chứng minh $DC \perp BK$:

Ta có $BEC = KCA$ cùng phụ với KCE

$HKC = HBE$ cùng phụ với KIE nên suy ra $KAC = ECB$ và AC = CE (gt) nên $\Delta KAC = \Delta BCE\left(g.c.g\right)$ suy ra KA = BC. Mặt khác ta có BD =AB ; $KAB = DBC$; KA = BC nên $\Delta DBC = \Delta BAK\left(c.g.c\right)$ suy ra $BKH = DCB$ và $HKB + KBH = 90^0$ suy ra $DCB + KBH = 90^0 \Rightarrow BMC = 90^0$ (với M giao điểm của DC và KB) nên $DC \perp BK$ tại M.

b) Trong tam giác KBC ba đường cao AH, CD, BE nên đồng quy tại I.

Bài toán 21: Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) HA + HB + HC < AB + AC

b) $HA + HB + HC < \frac{2}{3}\left(AB + BC + AC\right)$

Giải:

a) Chứng minh HA + HB + HC < AB + AC.

Ta kẻ NH // AC và HM //AB. Khi đó ta có HA < AM + HM = AM + AN (1) (Theo tính chất đoạn chắn). Do BH vuông góc với AC mà HN //AC nên $BH \perp HN$. Do đó BH < BN. (2) Tương tự ta cũng chứng minh được HC < CM (3).

Từ (1) ; (2) và (3) suy ra HA + HB + HC < AM + AN + BN + CM = AC + AB (đpcm)

b) Ta có HA + HB + HC < AB + AC (Theo câu a)

Tương tự HA + HB + HC < BC + AC

HA + HB + HC < AB + BC

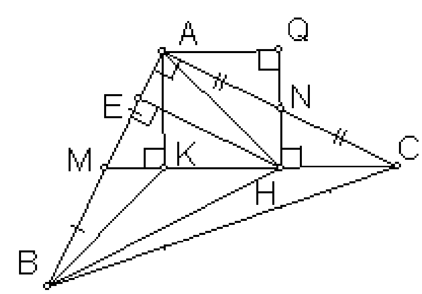
Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$3\left(HA + HB + HC\right) < 2\left(AB + BC + AC\right) \Rightarrow HA + HB + HC < \frac{2}{3}\left(AB + BC + AC\right) \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 22: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Kẻ NH$\perp CM$ tại H. Kẻ $HE \perp AB$ tại E. Chứng minh rằng tam giác ABH cân và HM là phân giác của góc BHE.

Giải:

Từ A ta kẻ AK$\perp CM$ tại K và $AQ \perp HN$ tại Q. Hai tam giác vuông MAK và NCH có MA = NC =$\left(\frac{1}{2}AB\right)$ $ACH = MAK$ (cùng phụ với góc KAC) nên $\Delta MAK = \Delta NCH$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra AK = HC (1) . Ta lại có $\Delta BAK = \Delta ACH\left(c.g.c\right) \Rightarrow BKA = AHC$. Hai tam giác



vuông AQN và CHN có NA = NC và $\widehat{ANQ} = \widehat{HNC}$ (đ.đ) nên $\Delta ANQ = \Delta CNH$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra AQ = CH (2). Từ (1) và (2) suy ra AK = AQ nên HA là tia phân giác của góc KHQ suy ra $\widehat{AHQ} = 45^0 \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^0 + 45^0 = 135^0 \Rightarrow \widehat{AKB} = 135^0$. Từ

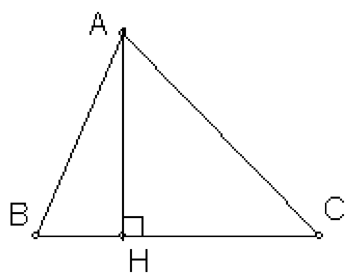
$\widehat{AKB} + \widehat{BKH} + \widehat{AKH} = 360^0 \Rightarrow \widehat{BKH} = 135^0$. Tam giác AKH có $\widehat{KHA} = 45^0$ nên nó vuông cân tại K$\Rightarrow KA = KH$. Xét hai tam giác BKA cà BKH có BK chung ;

$\widehat{BKA} = \widehat{BKH} = 135^0; AK = KH \Rightarrow \Delta BKA = \Delta BKH\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{KHB} = \widehat{MAK}; AB = BH$ hay tam giác BAH cân tại B

Ta có $\widehat{KHB} = \widehat{MAK}$ và KE // CA nên $\widehat{ACH} = \widehat{EHM}$ (đồng vị) vì $\widehat{ACH} = \widehat{MAK}$ suy ra $\widehat{EHM} = \widehat{MHB}$ nên HM là tia phân giác của EHB.

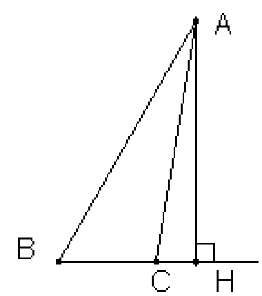
Dùng phương pháp phản chứng để chứng minh hình học:

Bài toán 23: Tam giác ABC có hai góc B và C nhọn. Kẻ $AH \perp BC$. Chứng minh rằng H nằm giữa BC.



Giải:

Ta thấy H, B, C là ba điểm phân biệt . Thật vậy, nếu H trùng với B hoặc C thì $\widehat{B} = 90^0$ hoặc $\widehat{C} = 90^0$. Trái với giả thiết . Trong ba điểm phân biệt thì có một và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm kia. Giả sử C nằm giữa B và H thì $\widehat{ACH} < 90^0$ suy ra $\widehat{BCA} > 90^0$ trái với giả thiết. Giả sử B nằm giữa C và H thì $\widehat{ABH} < 90^0$ suy ra $\widehat{CBA} > 90^0$ trái với giả thiết. Vậy H nằm giữa B và C.



Bài toán 24: a) Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^0$ và $BC = \frac{1}{2}AB$. Chứng minh $\widehat{C} = 90^0$

b) Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^0$ và BC = 2dm; AB = 3dm. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AD = AC

Giải:

a) Giả sử $\widehat{C} \neq 90^0$ Kẻ AH$\perp BC$ thì H không trùng C nên ΔABH vuông tại H suy ra $\widehat{BAH} = 30^0$ nên $BH = \frac{1}{2}AB$. Theo giả thiết ta có $BC = \frac{1}{2}AB$ nên BH = BC suy ra H trùng với C mâu thuẩn. Nên $\widehat{C} = 90^0$

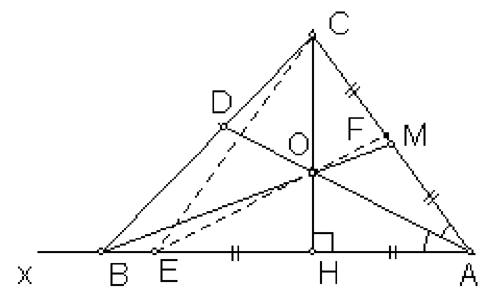
b) Gọi H là trung điểm của DC thì $BH = 1,5dm$. Do đó $BH = \frac{1}{2}AB$. Theo câu a) $\widehat{AHB} = 90^0$ nên $\Delta AHD = \Delta AHC\left(c.g.c\right)$ suy ra AD = AC

Bài toán 25: Cho tam giác ABC đều, đường cao AH. Trên tia HD lấy điểm C sao cho HD = HA. Trên nửa mặt phẳng bờ BD không chứa điểm A vẽ tia Dx sao cho $\widehat{BDx} = 15^0$. Dx cắt AB tại E. Chứng minh HD = HE

Giải:

Giả sử HD > HE thì $\widehat{HED} > 15^0$ (1) . Mặt khác HD > HE nên HA > HE do đó $\widehat{AEH} > 30^0$ (2) . Từ (1) và (2) $\widehat{BED} > 45^0$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{BED} + \widehat{BDE} > 45^0 + 15^0 = 60^0$. TráI với giả thiết tam giác ABC đều. Tương tự giả sử HD < HE ta cũng chứng minh được $\widehat{ABD} < 60^0$, trái với giả thiết. Nên HD = HE (đpcm)

Bài toán 26: Tam giác ABC nhọn , đường cao AH, đường trung tuyến BI, đường phân giác CK cắt nhau tại ba điểm phân biệt D, E, F. Chứng minh tam giác DEF không thể là tam giác đều



Giải:

Giả sử tam giác DEF đều thì $\widehat{CFH} = 60^0$ nên $\widehat{FCH} = 30^0$ suy ra $\widehat{ACF} = 30^0$. Ta lại có $\widehat{CEI} = 60^0$ suy ra $\widehat{BIC} = 90^0$. Tam giác ABC có BI là trung tuyến cũng là đường cao nên tam giác ABC cân tại B. lại có $\widehat{ACB} = 60^0$ nên tam giác ABC đều. Do đó AH, BI, CK đồng quy tức là D, E, F trùng nhau, trái với giả thiết. Vậy tam giác DEF không thể là tam giác đều.

Bài toán 27: Tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường phân giác AD, đường trung tuyến BM, và đường cao CH đồng quy. Chứng minh rằng $\widehat{A} > 45^0$

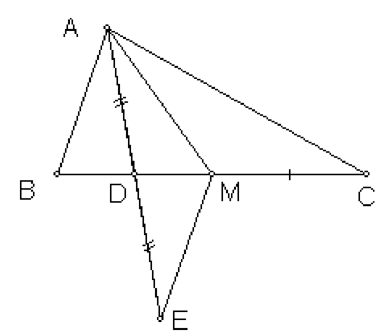
Giải:

Giả sử $\widehat{A} \le 45^0$. Trên tia Hx lấy điểm E sao cho HE = HA thì $\widehat{AEC} = \widehat{EAC} \le 45^0 \Rightarrow \widehat{ACE} \ge 90^0$.
Ta chứng minh $\widehat{ACB} > \widehat{ACE}$ nên trái với giả thiết tam giác ABC các góc nhọn.

Thật vậy, ta chứng tỏ B thuộc tia Ex. Gọi O là giao điểm của các đường CH,BM,AD và F là giao điểm của EO và AC. Xét tam giác EAC có EA > EC (vì EA đối diện với góc lớn hơn) mà FE là phân giác của góc CEA nên AF > FC suy ra $AF > \frac{AC}{2}$ còn M là trung điểm của AC nên M nằm giữa A và F vì thế B thuộc tia Ex. Do đó $\widehat{ABC} > \widehat{ACE}$ mà $\widehat{ACE} \ge 90^0 \Rightarrow \widehat{ACB} > 90^0$. Trái với giả thiết nên $\widehat{A} > 45^0$.

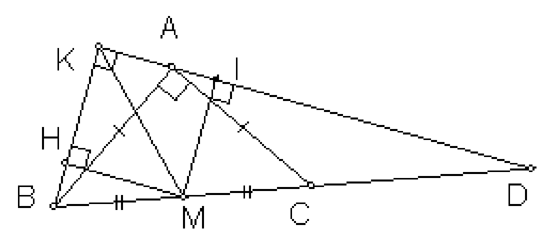
Bài toán 28: Cho tam giác ABC có BC = 2 AB. Gọi M là trung điểm của BC và D là trung điểm của BM. Chứng minh rằng AC = 2AD

Giải:



Trên tia AD lấy điểm E sao cho AD = DE nên ta có $\widehat{ADB} = \widehat{EDM}$ (đ.đ). DB = DM nên $\Delta ABD = \Delta EMD$ (c.g.c) suy ra AB = ME và $\widehat{ABD} = \widehat{DME}$. Vì AB = ME = MC = $\frac{BC}{2}$ nên MC = ME. Ta lại có $\widehat{AMC} = \widehat{B} + \widehat{BAM}$ (góc ngoài bằng tổng hai góc trong không kề nó của tam giác ABM) mà $\widehat{ABD} = \widehat{DME}$ và $\widehat{BAM} = \widehat{BMA}$ (Do tam giác BAM cân tại B). Suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{BME} + \widehat{BMA} = \widehat{AMC} = \widehat{AME}$. Vậy $\Delta AME = \Delta AMC(c.g.c)$. Suy ra AC = AE =2AD (đpcm).

*Bài toán 29:*Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là trung điểm của BC. Trên tia BC lấy điểm D với D khác B và M. Kẻ



BK vuông góc với AD tại K. Chứng minh KM là phân giác trong hoặc phân giác ngoài của tam giác BKD tại đỉnh K

Giải:

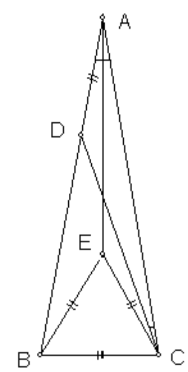
Khi D trùng với C thì K trùng với A. Khi đó $AM \perp BC$ tại M nên kết luận đúng. Từ M ta hạ $MH \perp KB$ và $MI \perp KD$ nên $MH \perp MI$ tại M và MH //KD. Do đó

$AMI = 90^0 - AMH = BMH$ và $AMI = 90^0 - BMI = BMH$

Khi M nằm ngoài đoạn BD. Do đó $\Delta BMH = \Delta AMI$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra MI = MH.

Do M cách đều hai đoạn thẳng KB và KD nên KM là phân giác của BKD.

Tính số đo các góc trong tam giác

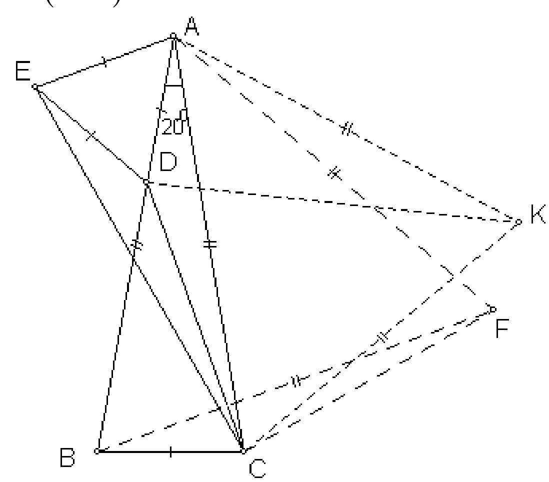


Bài toán 30: Tam giác ABC cân tại A có $A = 20^0$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = BC. Tính ACD ?

Cách giải 1:

Vẽ tam giác BCE đều (với E nằm cùng phia với A có bờ đường thẳng BC) nên $ECA = \dfrac{180^0 - 20^0}{2} - 60^0 = 20^0$. Hay $ECA = DAC = 20^0$.

Xét tam giác ΔDAC và ΔECA có DA = EC; $ECA = DAC$; AC cạnh chung nên ΔDAC = ΔECA (c.g.c) suy ra $CAE = ACD$ mà $\Delta AEB = \Delta AEC\left(c.c.c\right)$ nên $BAE = CAE = 10^0$. Vậy $ACD = 10^0$.



Cách giải 2:

Vẽ tam giác đều ADE nằm ngoài tam giác ABC thì $CAE = 80^0$. Do đó $\Delta CAE = \Delta ABC\left(c.g.c\right)$ nên CE =AC

$ACE = BAC = 20^0$. Nên $\Delta ACD = \Delta ECD\left(c.c.c\right)$ suy ra

$ACD = ECD = 10^0$

Cách giải 3: Vẽ tam giác đều ACK ta chứng minh được tam giác CDK cân tại K (vì $KAD = 80^0$, KA = AB; AD = BC nên $\Delta KAD = \Delta ABC\left(c.g.c\right)$ suy ra KD = AC = KC) nên

$DKC = AKC - AKD = 60^0 - 20^0 = 40^0$ suy ra

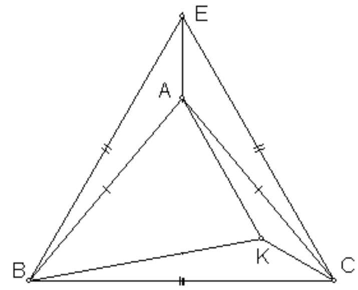
$KCD = (180^0 - DKC):2 = (180^0 - 40^0):2 = 70^0 \Rightarrow DCA = 70^0 - 60^0 = 10^0$

Cách giải 4: Vẽ tam giác đều FAB với F và C cùng phía đối với AB. Nên tam giác AFC cân tại A Tính được $FAC = 40^0$ nên

$$AFC = \frac{180^0 - 40^0}{2} = 70^0 \Rightarrow BFC = 10^0 \Rightarrow CBF = 20^0 \Rightarrow \Delta ADC = \Delta BCF\left(c.g.c\right) \Rightarrow ACD = BFC = 10^0$$

Chú ý : Nếu giả thiết cho $ACD = 10^0$ thì AD = BC ta xét ΔDAC = ΔECA (c.g.c).

Bài toán 31: Cho tam giác ABC cân có $B = C = 50^0$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho $KBC = 10^0; KCB = 30^0$. Chứng minh rằng tam giác ABK cân và tính BAK ?



Giải:

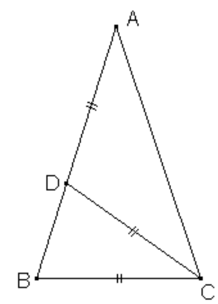
Dựng tam giác đều EBC có đỉnh E và A cùng nằm trên một nửa mặt phẳng có bờ là BC. Nên $\Delta EAB = \Delta EAC\left(c.c.c\right)$ Do $B = C = 50^0$ nên

$EBA = ECA = 60^0 - 50^0 = 10^0$ và EA là phân giác của

$BEC \Rightarrow BEA = CEA = 30^0$. Do đó $\Delta EBA = \Delta CBK$ (g.c.g) nên AB = BK hay tam giác BAK cân tại B.

$BAK = \left(180^0 - ABK\right) : 2 = \left(180^0 - 40^0\right) : 2 = 70^0$.

Bài toán 32: Tính các góc của tam giác ABC cân tại A biết rằng trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = DC = BC.



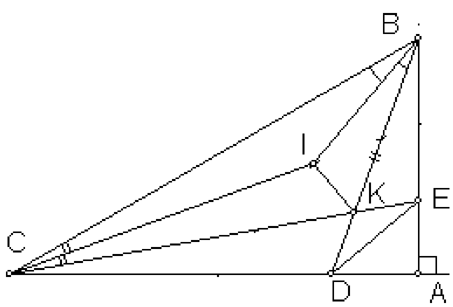
Giải:

Đặt $A = x$ thì $ACD = x$. Do đó $BDC = 2x$; $B = 2x$ mà tam giác ABC có $A + B + C = 180^0$ nên $x + 2x + 2x = 180^0 \Leftrightarrow 5x = 180^0 \Leftrightarrow x = 36^0$. Vậy $x = A = 36^0$.

Nên $B = C = \left(180^0 - 36^0\right) : 2 = 72^0$.

Bài toán 33: Tam giác ABC có $B = 60^0; C = 30^0$. Lấy điểm D trên cạnh AC. Điểm E trên cạnh AB sao cho $ABD = 20^0$; $ACE = 10^0$. Gọi K là giao điểm của BD và CE. Tính các góc của tam giác KDE.

Giải:



Tam giác ABC có $B = 60^0; C = 30^0$ suy ra $A = 90^0$. Do đó $CEA = 90^0 - 10^0 = 80^0$; $BDA = 90^0 - 20^0 = 70^0$;

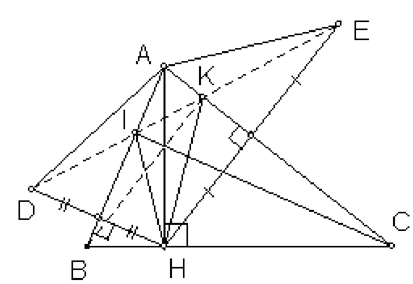
$CKB = DKE = 180^0 - \left(KCB + CBK\right) = 180^0 - (20^0 + 40^0) = 120^0$. Gọi I là giao điểm của hai đường phân giác của các góc $BCK; KBC$ nên $CKI = BKI = 60^0$. Do đó

$KEA = BKE + KBE \Leftrightarrow BKE = KEA - KBE = 80^0 - 20^0 = 60^0$ nên

$\Delta IKB = \Delta EKB\left(g.c.g\right)$ suy ra KI = KE. Tương tự ta chứng minh được $\Delta IKC = \Delta DKC\left(g.c.g\right)$ suy ra KI = KD. Do đó KD = KE. Tam giác KDE cân tại K suy ra

$KDE = KED = (180^0 - 120^0) : 2 = 30^0$.

Bài toán 34: Cho tam giác ABC góc $A \neq 90^0$ và các góc B, C nhọn, đường cao AH vẽ điểm D và E sao cho AB là đường trung trực của HD ,

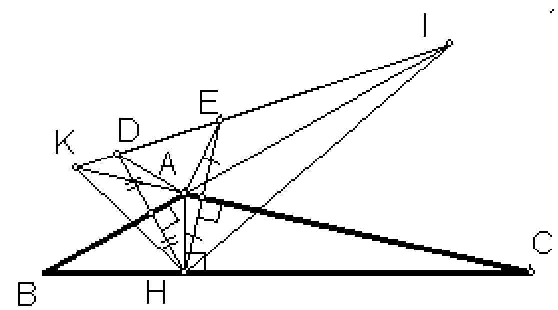


AC là đường trung trực của HE. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của DE với AB và AC. Tính các góc AIC và AKB

Giải:

Trường hợp $A < 90^0$ Thì IB và KC là hai phân giác ngoài của tam giác IHK. Do đó HA là phân giác trong . Do $AHC = 90^0$ nên HC là phân giác ngoài tại đỉnh H. Các phân giác ngoài cắt nhau tại C nên IC là phân giác của góc HIK . Do đó

$BIH + HIC = \frac{180^0}{2} = 90^0 \Rightarrow BIC = 90^0$ hay $AIC = 90^0$.



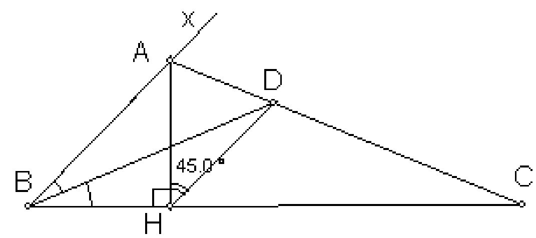
Chứng minh tương tự ta cũng có $BK \perp KC$ (phân giác trong KB và phân giác ngoài tại góc K) nên $AKB = 90^0$.

Trường hợp $A > 90^0$. Tam giác HIK có KC, IB là các tia phân giác trong góc HKI, HIK và KB , IC là các tia phân giác ngoài HKI, HIK nên $AIC = AKB = 90^0$

Bài toán 35: Cho tam giác ABC có AH là đường cao, phân giác BD và $AHD = 45^0$. Nêu cách vẽ hình và tính ADB

Giải:

*) Vẽ tam giác BHD sao cho $BHD = 135^0$, vẽ đường thẳng vuông góc với BH tại H. vẽ tia Bx sao cho $HBD = DBx$ cắt đường thẳng vừa vẽ tại điểm A. Hai tia AD và BH cắt nhau tại C, ta được hình thoả mãn đề cần vẽ.



Xét ΔABH ta có

$HAx = ABH + AHB = ABH + 90^0 = 2ABD + 90^0$ (Do BD là tia phân giác của góc B). Ta lại có $HAx = 2CAx$ (vì tia BD là phân giác trong và tia HD là phân giác ngoài cắt nhau tại D nên AD là phân giác ngoài của tam giác BHA). Vậy

$2ABD + 90^0 = 2CAx \Leftrightarrow ABD + 45^0 = CAx$ (1). Mặt khác, trong tam giác ABD có

$CAx = ABD + ADB(2)$ (định lý góc ngoài của tam giác ABD). Từ (1) và (2) suy ra

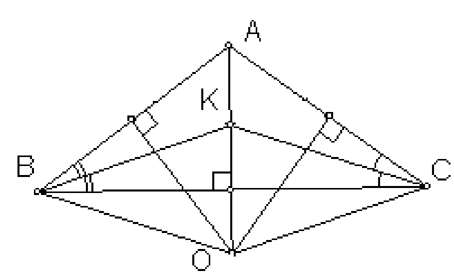
$ABD + 45^0 = ABD + ADB \Leftrightarrow ADB = 45^0$

Bài toán 36: Cho tam giác ABC có K là giao điểm của các đương phân giác, O là giao điểm các đường trung trực, BC là đường trung trực của OK. Tính các góc của tam giác ABC.

Giải:

Do O là giao điểm của các đường trung trực của tam giác ABC nên OB = OC. Suy ra ΔOBC cân tại O suy ra $OBC = OCB$, Mà BC là đường trung trực của OK nên

BO = BK ; OC = CK . Do đó $OBC = KBC; OCB = BCK$. K là giao điểm các đường phân giác nên



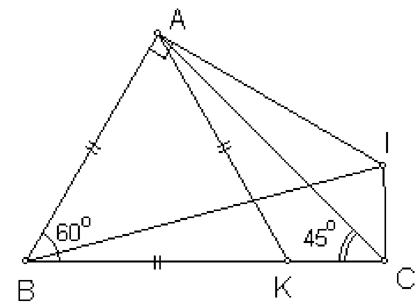
$OBC = KBC = KBA = OCB = BCK = KCA = \alpha$. Ta lại có OA = OB nên $OBA = OAB$ và CA = OC nên $OCA = OAC$. Do đó,

$BAC = BAO + OAC = ABO + OCA = 3\alpha + 3\alpha = 6\alpha$ mà ΔABC có

$BAC + ABC + BCA = 180^0 \Leftrightarrow 2\alpha + 6\alpha + 2\alpha = 180^0 \Leftrightarrow 10\alpha = 180^0 \Leftrightarrow \alpha = 18^0$.
Vậy $ABC = BCA = 36^0; BAC = 108^0$.

Bài toán 37: Cho tam giác ABC có $B = 60^0; C = 45^0$. Trong góc ABC vẽ tia Bx sao cho $xBC = 15^0$. Đường vuông góc với BA tại A cắt Bx tại I. Tính ICB.

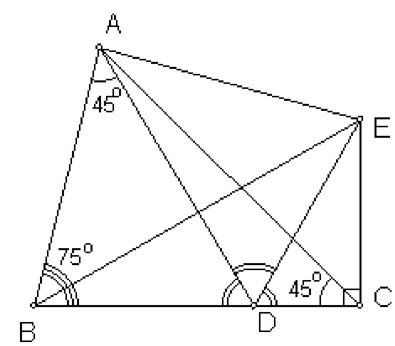
Giải:



Trên cạnh BC lấy điểm K sao cho AB = BK nên tam giác ABK cân tại B có $B = 60^0$ nên tam giác ABK đều . Do đó KB = KA. Ta lại có tam giác ABI vuông tại A mà $ABI = ABC - IBC = 60^0 - 15^0 = 45^0$ nên tam giác ABI vuông cân tại A suy ra AB = AK = AI. Do $B = 60^0; C = 45^0$ nên $A = 75^0$. Nên $KAC = BAC - BAK = 75^0 - 60^0 = 15^0$;
$CAI = 90^0 - A = 90^0 - 75^0 = 15^0$. Do đó
$\Delta AKC = \Delta AIC\,(c.g.c) \Rightarrow ACK = ACI = 45^0 \Rightarrow ICB = ACK + ACI = 90^0$. Vậy $ICB = 90^0$

Bài toán 38: Cho tam giác ABC có $B = 75^0; C = 45^0$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BAD = 45^0$. Đường vuông góc với DC tại C cắt tia phân giác của ADC tại E. Tính CBE.

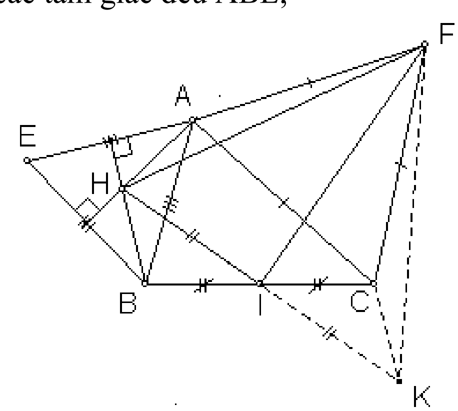
Giải:



Ta có $B = 75^0; C = 45^0$ và $BAD = 45^0$ suy ra $BDA = 60^0$ nên $ADC = 120^0$ mà DE là phân giác của ADC nên $ADE = EDC = 60^0$. Ta lại có CE là phân giác trong của ΔDCE và DA là phân giác ngoài của EDC cắt nhau tại A nên EA là phân giác ngoài tại E.
ΔDCE vuông tại C có $EDC = 60^0 \Rightarrow DEC = 30^0$. Do đó
$AED = \left(180^0 - DEC\right) : 2 = \left(180^0 - 30^0\right) : 2 = 75^0$ (do EA là phân giác ngoài tại E) suy ra
$DAE = 45^0$. Do đó $\Delta ABD = \Delta ADE\,(g.c.g) \Rightarrow$ BD = ED nên tam giác BDE cân tại D nên ta có
$EBD = (180^0 - 120^0) : 2 = 30^0$.

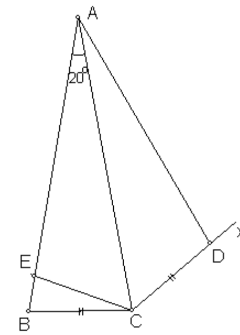
Bài toán 39: Cho tam giác ABC, vẽ về phía ngoài tam giác ấy các tam giác đều ABE; ACF. Gọi I là trung điểm của BC, H là trực tâm của tâm giác ABE.
Tính các góc cuả tam giác FIH.

Giải:



Trên tia đối của tia IH lấy điểm K sao cho IH = IK. Gọi $BAC = \alpha$ thì $HAF = 60^0 + 30^0 + \alpha = 90^0 + \alpha\,(1)$ (vì ΔACF đều nên $FAC = 60^0$ và tam giác EAB đều có H là trực tâm nên $HAB = 30^0$ nếu $0 < \alpha \le 90^0$).
Ta lại có: $\Delta BIH = \Delta CIK\,(c.g.c)$ nên suy ra $KCI = HBI = ABC + 30^0$ nên $ACB = 180^0 - \left(ABC + \alpha\right)$.
Do đó:
$KCI + BCA + ACF = ABC + 30^0 + 180^0 - \left(ABC + \alpha\right) + 60^0 = 270^0 - \alpha$

$KCF = 360^0 - \left(KCI + BCA + ACF\right) = 360^0 - \left(270^0 - \alpha\right) = 90^0 + \alpha \quad (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $HAF = KCF$ .Nên $\Delta AHF = \Delta CKF\,(c.g.c) \Rightarrow HF = KF; AFH = CFK \Rightarrow HFK = 60^0$ do đó tam giác HFK đều suy ra tam giác HFI là nửa tam giác đều cạnh HF. Các góc của tam giác HFI có số đo là: $HIF = 90^0; IHF = 60^0; HFI = 30^0$.

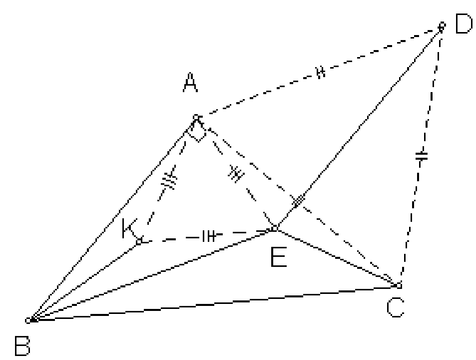


Bài toán 40: Cho tam giác ABC cân tại A có $BAC = 20^0$. Trên nửa mặt phẳng không chứa B có bờ AC vẽ tia Cx sao cho $ACx = 60^0$, trên tia ấy lấy điểm D sao cho AB = CD. Tính ADC.

Giải:

Trên nửa mặt phẳng chứa B có bờ AC vẽ tia Cy sao cho $ACy = 60^0$. Tia này cắt AB tại E. Do tam giác ABC cân tại A có $BAC = 20^0$ nên $B = C = (180^0 - 20^0):2 = 80^0$.

Trong tam giác BCE có $B = 80^0$. Góc BEC là góc ngoài của tam giác AEC nên ta có $BEC = A + ECA = 20^0 + 60^0 = 80^0$. Nên tam giác CEB cân tại C suy ra CE = CB. Từ đó ta có $\Delta AEC = \Delta ADC\,(c.g.c) \Rightarrow AEC = ADC = 180^0 - 80^0 = 100^0$



Bài toán 41: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm E nằm trong tam giác sao cho tam giác EAC cân tại E và có góc ở đáy 15^0. Tính góc BEA.

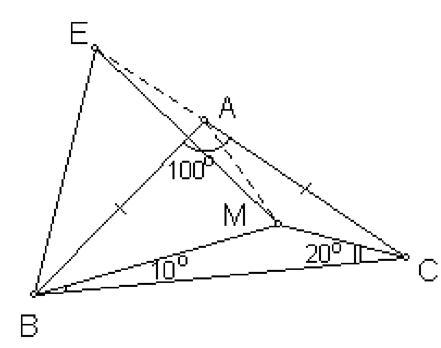
Giải:

Cách giải 1: Vẽ tam giác đều ACD.

Ta có tam giác EAC cân tại E nên $EAC = ACE = 15^0$ nên $BAE = 90^0 - 15^0 = 75^0$.

Xét ΔBAE và ΔDAE có AB = AD = AC ; $BAE = DAE = 75^0$; AE cạnh chung. Nên $\Delta BAE = \Delta DAE\,(c.g.c) \Rightarrow AEB = AED$. Do AD = AC và EA = EC nên ED là đường trung trực của AC. Đồng thời AE là phân giác của AEC nên $AED = \dfrac{AEC}{2} = \dfrac{180^0 - 2.15}{2} = 75^0$

Cách giải 2: Vẽ tam giác đều EAK nằm ngoài tam giác AEC. Ta được $\Delta ABK = \Delta ACE\,(c.g.c)$ và $\Delta ABK = \Delta BEK\,(c.g.c) \Rightarrow BEA = BEK + KEA = 15^0 + 60^0 = 75^0$



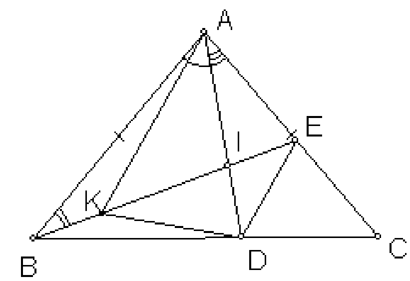
Bài toán 42: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 100^0$. Điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $MBC = 10^0; MCB = 20^0$. Tính AMB.

Giải:

Tam giác ABC cân tại A nên $ACB = \dfrac{180^0 - 100^0}{2} = 40^0$ mà $MBC = 20^0 \Rightarrow MCA = 20^0$ nên CM là tia phân giác của BCA. Trên tia CA lấy điểm E sao cho CB = CE nên $\Delta MCB = \Delta MCE\,(c.g.c) \Rightarrow ME = MB$ và $EMC = BMC = 180^0 - 30^0 = 150^0 \Rightarrow EMB = 360^0 - 2.BMC = 360^0 - 300^0 = 60^0$. Do đó tam giác

BME đều suy ra BM =BE. Ta có: $EAB + AEM = 80^0 + 10^0 = 90^0$ nên $AB \perp ME$ suy ra BA là phân giác của góc $MBE \Rightarrow EBA = MBA = 60^0 : 2 = 30^0$ nên $\Delta ABM = \Delta ABE\left(c.g.c\right) \Rightarrow BEA = AMB = 60^0 + 10^0 = 70^0$.

Bài toán 43: Cho tam giác cân tại A có $A = 80^0$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $CAD = 30^0$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $EBA = 30^0$. Gọi I là giao điểm của AD và BE. Chứng minh rằng tam giác IDE cân và tính các góc của nó.



Giải:

Ta có tam giác ABC cân tại A có $A = 80^0$ nên $B = C = 50^0$ mà $CAD = 30^0$ nên $BAD = A - DAC = 80^0 - 30^0 = 50^0$. Khi đó ΔDBA cân tại D suy ra AD = BD. Trên BI lấy điểm K sao cho $BAK = 10^0$ nên

$BEA = 180^0 - (BAE + EBA) = 180^0 - (80^0 + 30^0) = 70^0$ (1)

$KAE = ABC - BAK = 80^0 - 10^0 = 70^0$ (2)

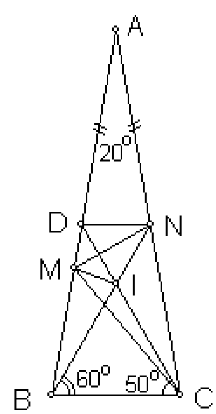
Từ (1) và (2) suy ra ΔKAE cân tại K nên KA = KE. Ta cũng chứng minh được tam giác AkD cân tại A nên AK = AD . Do đó AD = KE. (3)

Mặt khác, $KAI = AKI = 40^0 \Rightarrow \Delta IKA$ cân tại I nên IA = IK (4). Từ (3) và (4) suy ra IE = ID nên tam giác IED cân tại I. $AIK = DIE = \left(180^0 - 2IAK\right) = 180^0 - 80^0 = 100^0$.

$$IDE = IED = \frac{180^0 - 100^0}{2} = 40^0.$$

Bài toán 44: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^0$, các điểm M,N theo thứ tự thuộc các cạnh bên AB, AC sao cho $BCM = 50^0; CBN = 60^0$. Tính MNA

Giải:



Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AN = AD thì DN //BC và $AND = 80^0$. Ta tính DNM.

Gọi I là giao điểm của BN và CD thì các tam giác IBC và IDN là các tam giác đều vì $IBC = 60^0$ và tam giác ABC cân tại A. Ta chứng minh MN là tia phân giác của DNB.Thật vậy, Trong tam giác BDC có

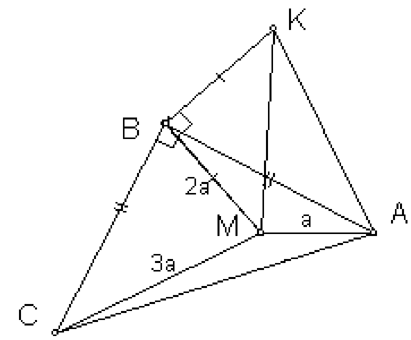
$MDI = BDC = 180^0 - \left(DBC + DCB\right) = 180 - \left(80^0 + 60^0\right) = 40^0$ (1)

Trong tam giác BMC có $MBC = 80^0; MCB = 50^0 \Rightarrow BMC = 50^0 \Rightarrow \Delta BMC$ cân tại B. Do đó BM = BC mà tam giác BIC đều nên IB = BC suy ra MB = BI hay tam giác BMI cân tại B mà $MBI = 20^0 \Rightarrow BIM = \dfrac{180^0 - 20^0}{2} = 80^0$. Do đó

$MID = 180^0 - \left(MIB + DIN\right) = 180^0 - \left(80^0 + 60^0\right) = 40^0$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $MDI = DIM$ nên ΔMDI cân tại M. Suy ra MD = MI. Ta lại có NI = ND nên MN là đường trung trực của DI suy ra MN là phân giác của DNB hay $DNM = \dfrac{DNB}{2} = \dfrac{60^0}{2} = 30^0$.

Vậy $MNA = MND + DNA = 30^0 + 80^0 = 110^0$

Bài toán 45: Điểm M nằm bên trong tam giác ABC vuông cân tại B sao cho KA: MB: MC = 1: 2: 3. Tính AMB



Giải:

Vẽ tam giác MBK vuông cân tại B (K và A nằm cùng phía đối với BM).
Đặt MA = a; MB = 2a; MC = 3a. Khi đó ta có AB = BC; $MBC = ABK$;
BM = BK nên $\Delta ABK = \Delta CBM\,(c.g.c)$ suy ra CM = KA = 3a. Xét tam giác vuông MBK vuông tại B ta có
$MK^2 = MB^2 + MK^2 = (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2$

Xét tam giác AMB có $AM^2 + MK^2 = a^2 + 8a^2 = 9a^2 = (3a)^2 = AK^2$

(vì AK = MC) nên tam giác KMA vuông tại M. Vậy $AMB = AMK + KMB = 90^0 + 45^0 = 135^0$

Bài toán 46: Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 > 5c^2$ thì c là độ dài cạnh nhỏ nhất.

Giải:

Giả sử $c \ge a$ thì $c + c \ge a + c > b \Rightarrow 2c > b \Rightarrow 4c^2 > b^2$ và $c \ge a \Rightarrow c^2 \ge a^2$ nên ta có $5c^2 > a^2 + b^2$ trái với giả thiết

Giả sử $c \ge b$ thì $c + c \ge b + c > a \Rightarrow 2c > a \Rightarrow 4c^2 > a^2$ và $c \ge b \Rightarrow c^2 \ge b^2$ nên ta có $5c^2 > a^2 + b^2$ trái với giả thiết. Vậy c là độ dài nhỏ nhất trong tam giác.