Chuyên đề — **PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

ℑ 1 TỌA ĐỘ ĐIỂM VÀ VECTƠ

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN:

I. Tọa độ điểm :

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz:

1. $M(x_M;y_M;z_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$

2. Cho A($x_A;y_A;z_A$) và B($x_B;y_B;z_B$) ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$;

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

3. M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

II. Tọa độ của véctơ:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz .

1. $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

2. Cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ ta có

◇ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

◇ $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

◇ $k.\vec{a} = (ka_1;ka_2;ka_3)$

◇ $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

◇ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

◇ $\cos\varphi = \cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ (với $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$)

◇ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

III. Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng:

Tích có hướng của $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ là :

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

1.Tính chất :

◇ $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \vec{b}$

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùngphương $\Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$	◇ $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin(\vec{a},\vec{b})$ ◇ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0}$ ◇ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = 0$
	2.Các ứng dụng tích có hướng : ◇ Diện tích tam giác : $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right\|$ ◇ Thểtích tứ diện$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right\|$ ◇ Thể tích khối hộp: $V_{ABCDA'B'C'D'} = \left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right\|$

V.Phương trình mặt cầu:

1. Mặt cầu (S) tâm I(a;b;c) bán kính r có phương trình là :$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

2. Phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ với $A^2+B^2+C^2-D>0$ là phương trình mặt cầu tâm I(-A;-B;-C) , bán kính $r = \sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

IV. Điều kiện khác:*(Kiến thức bổ sung)*

1. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) thì ta có :

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k}; y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k}; z_M = \frac{z_A - kz_B}{1-k} \quad \text{Với k } \neq 1$$

2. G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

3. G là trọng tâm của tứ diện ABCD $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

BÀI TẬP

Bài 1: Trong không gian Oxyz cho A(0;1;2) ; B(2;3;1) ; C(2;2;-1)

a) Tính $F = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].(\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{CB})$.
b) Chứng tỏ rằng OABC là một hình chữ nhật tính diện tích hình chữ nhật đó.
c) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).
d) Cho S(0;0;5).Chứng tỏ rằng S.OABC là hình chóp.Tính thể tích hình chóp.

Bài 2: Cho bốn điểm A(1;0;0) , B(0;1;0) , C(0;0;1) , D(-2;1;-1)

a) Chứng minh rằng A,B,C,D là bốn đỉnh của tứ diện.
b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD.
c) Tính các góc của tam giác ABC.
d) Tính diện tích tam giác BCD.
e) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao của tứ diện hạ từ đỉnh A.

Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'biết A(0,0,0), B(1;0;0), D(0;2;0), A'(0;0;3), C'(1;2;3).

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

b) Tính thể tích hình hộp.
c) Chứng tỏ rằng AC’ đi qua trọng tâm của hai tam giác A’BD và B’CD’.
d) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của D lên đoạn A’C.

Bài 4: Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm A(2;3;4). Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của A lên ba trục tọa độ Ox;Oy,Oz và N_1, N_2, N_3 là hình chiếu của A lên ba mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx.
a) Tìm tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 và N_1, N_2, N_3.
b) Chứng minh rằng $N_1N_2 \perp AN_3$.
c) Gọi P,Q là các điểm chia đoạn N_1N_2, OA theo tỷ số k xác định k để PQ//M_1N_1.

Bài 5:a/.Cho ba điểm A(2 ; 5 ; 3), B(3 ; 7 ; 4), C(x ; y ; 6).Tìm x, y để A, B, C thẳng hàng
b/. Cho hai điểm A(-1 ; 6 ; 6), B(3 ; -6 ; -2).Tìm M thuộc mp(Oxy) sao cho MA + MB nhỏ nhất.
c/. Tìm trên Oy điểm cách đều hai điểm A(3 ; 1 ; 0) và B(-2 ; 4 ; 1).
d/. Tìm trên mặt phẳng Oxz cách đều ba điểm A(1 ; 1; 1), B(-1 ; 1 ; 0),C(3 ;1 ; -1).
e/. Cho hai điểm A(2 ; -1 ; 7), B(4 ; 5 ; -2). Đường thẳng AB cắt mp(Oyz) tại điểm M. Điểm M chia đọan AB theo tỉ số nào? Tìm tọa độ điểm M.

Bài 6: Trong không gian tọa độ Oxyz cho A(1 ; 1 ; 0), B0 ; 2 ; 1), C(1 ; 0 ; 2), D(1 ; 1 ; 1)
a) Chứng minh bốn điểm không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện ABCD.
b) Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC, trọng tâm tứ diện ABCD.
c) Tính diện tích các mặt của tứ diện.
d) Tính độ dài các đường cao của khối tứ diện.
e) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.
f) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài 7: Cho bốn điểm A(2 ; -1 ; 6), B(-3 ; -1 ; -4), C(5 ; -1 ; 0), D(1 ; 2 ; 1).
a) Chứng minh ABC là tam giác vuông.
b) Tính bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ABC.
c) Tính độ dài đường phân giác trong của tam giác ABC vẽ từ đỉnh C.

Bài 8 :Viết phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:
a) Tâm I(1 ; 0 ; -1), đường kính bằng 8.
b) Đường kính AB với A(-1 ; 2 ; 1), B(0 ; 2 ; 3)
c) Tâm O(0 ; 0 ; 0) tiếp xúc với mặt cầu tâm I(3 ; -2 ; 4) và bán kính R = 1
d) Tâm I(2 ;-1 ; 3) và đi qua A(7 ; 2 ; 1).
e) Tâm I(-2 ; 1 ; – 3) và tiếp xúc mp(Oxy).

Bài 9 :Viết phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:
a) Đi qua ba điểm A(1 ; 2 ; -4), B(1 ; -3 ; 1), C(2 ; 2 ; 3) và có tâm nằm trên mp(Oxy).
b) Đi qua hai điểm A(3 ; -1 ; 2), B(1 ; 1 ; -2) và có tâm thuộc trục Oz.
c) Đi qua bốn điểm A(1 ; 1 ; 1), B(1 ; 2 ; 1), C(1 ; 1 ; 2), D(2 ; 2 ; 1)

Bài 10 : Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 – 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$.Tìm m để nó là phương trình một mặt cầu và tìm m để bán kính mặt cầu là nhỏ nhất.

Ɜ2. MẶT PHẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN:

I. Phương trình mặt phẳng:

Định nghĩa :

Trong không gian Oxyz phương trình dạng Ax + By + Cz + D = 0 với $A^2+B^2+C^2 > 0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng

◇ Phương trình mặt phẳng (P) : Ax + By + Cz + D = 0 với $A^2+B^2+C^2 > 0$. Có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$

◇ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$, $\vec{n}\neq\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến có dạng (P) : $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

◇ Nếu (P) có cặp vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương ,có giá song song hoặc nằm trên (P) .Thì vectớ pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

II . Các trường hợp riêng của mặt phẳng :

Trong không gian Oxyz cho mp(α): Ax + By + Cz + D = 0 , với $A^2+B^2+C^2 > 0$ Khi đó:

◇ D = 0 Khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.

◇ A=0 ,B$\neq$0 ,C $\neq$0, D $\neq$0 Khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox

◇ A=0 ,B = 0 ,C$\neq$0, D $\neq$0 Khi và chỉ khi (α) song song mp (Oxy)

◇ A,B,C,D$\neq$0 . Đặt $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ Khi đó (α): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

(Các trường hợp khác nhận xét tương tự)

II. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho (α): Ax+By+Cz+D=0 và (α'):A'x+B'y+C'z+D'=0

◇ (α) cắt (α') $\Leftrightarrow$ A : B : C $\neq$ A': B': C'

◇ (α) // (α') $\Leftrightarrow$ A : A' = B : B' = C : C' $\neq$ D : D'

◇ $(\alpha)\equiv(\alpha')$ $\Leftrightarrow$ A : B : C : D = A': B': C': D'

Đặc biệt

$(\alpha)\perp(\alpha') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

B. CÁC BÀI TẬP:

Bài 1: Cho bốn điểm A(3;-2;-2), B(3;2;0), C(0;2;1), và D(-1;1;2)

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).
b) Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AC.
c) Viết phương trình mặt phẳng (P)chứa AB và song song với CD.

d) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa CD và vuông góc với mp(ABC).

Bài 2: Cho hai mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 4=0$, (Q): $x - 2y - 2z + 4=0$

a) Chứng tỏ rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau.
b) Viết phương trình tham số đường thẳng (Δ) là giao tuyến của hai mặtphẳng đó.
c) Chứng minh rằng đường thẳng (Δ) cắt trục Oz .Tìm tọa độ giao điểm.
d) Mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ tai ba điểm A,B,C. Tính diện tích tam giác ABC.
e) Chứng tỏ rằng điểm O gốc tọa độ không thuộc mặt phẳng (P) từ đó tính thể tích tứ diện OABC.

Bài 3: Trong không gian tọa độ Oxyz cho một mặt phẳng (P): $2x + y - z - 6=0$

a) Viết phương trình mp (Q) đi qua gốc tọa độ O và song song với mp (P).
b) Viết phương trình tham số ,chính tắc đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với mặt mp(P).
c) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (P). (*TNPT năm 1993*)

Bài 4: Cho mặt phẳng (P): $x + y - z + 5=0$ và (Q): $2x - z = 0$.

a) Chứng tỏ hai mặt phẳng cắt nhau
b) Lập phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) đi qua A(-1;2;3).
c) Lập phương trình mặt phẳng (β) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) và song song với Oy.
d) Lập phương trình mặt phẳng (χ) đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng (P)và (Q).

Bài 5: Trong không gian Oxyz. Cho M(2;1;-1) và mặt phẳng (P) : $2x + 2y - z + 2 =0$

a) Tính độ dài đoạn vuông góc kẽ từ M đến mặt phẳng (P).
b) Viết phương trình đường thẳng (d) qua M vuông góc với mặt phẳng (P).
c) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M song song Ox và hợp với mặt phẳng (P) một góc 45^0.

Bài 6: Trong không gian với hệ tọa Oxyz cho hai mặt phẳng
(P): $2x + ky + 3z - 5=0$ và (Q): $mx - 6y - 6z + 2=0$.

a) Xác định giá trị k và m để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau,lúc đó hãy tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng.
b) Trong trường hợp k = m = 0 gọi (d) là giao tuyến của (P) và (Q) hãy tính khoảng cách từ A(1;1;1) đến đường thẳng (d).

§3. ĐƯỜNG THẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN:

I. Phương trình đường thẳng:

Định nghĩa :

Phương trình ttham số của đường thẳng Δ ***đi qua điểm M₀(x₀;y₀;z₀) và có vectơ chỉ phương*** $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ **,** $\vec{a}\neq\vec{0}$

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \quad (\mathrm{t} \in \mathrm{R}) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

Nếu a_1***,*** a_2 ***,*** a_3 ***đều khác không .Phương trình đường thẳng*** Δ ***viết dưới dạng chính tắc như sau:***

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

II Vị Trí tương đối của các đường thẳng và các mặt phẳng:

<table>
<tr><th>Chương trình cơ bản</th><th>Chương trình nâng cao</th></tr>
<tr><td>

1)Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Trong Kg Oxyz cho hai đường thẳng

$d:\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ $\quad d':\begin{cases} x = x_o' + a_1' t' \\ y = y_o' + a_2' t' \\ z = z_o' + a_3' t' \end{cases}$

vtcp $\vec{u}$ đi qua M_o và d’có vtcp $\overrightarrow{u'}$ đi qua M_o’

◇ $\vec{u}$ **,** $\overrightarrow{u'}$ ***cùng phương***

- d // d’ $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = k\overrightarrow{u'} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$
- d ≡ d’ $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = k\overrightarrow{u'} \\ M_0 \in d' \end{cases}$

◇ $\vec{u}$ **,** $\overrightarrow{u'}$ ***Không cùng phương***

</td><td>

1)Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Trong Kg Oxyz cho hai đường thẳng

$d:\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ $\quad d':\begin{cases} x = x_o' + a_1' t' \\ y = y_o' + a_2' t' \\ z = z_o' + a_3' t' \end{cases}$

vtcp $\vec{u}$ đi qua M_o và d’có vtcp $\overrightarrow{u'}$ đi qua M_o’

◇ (d) / / (d’) $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\overrightarrow{u'}]=\vec{0} \\ \mathrm{M}_o \notin d' \end{cases}$

◇ (d) ≡ (d’) $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\overrightarrow{u'}]=\vec{0} \\ \mathrm{M}_0 \in d' \end{cases}$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

$$\begin{cases} x_o + a_1 t = x_o' + a_1' t' \\ y_o + a_2 t = y_o' + a_2' t' \\ z_0 + a_3 t = z_o' + a_3' t' \end{cases} \quad \text{(I)}$$

- d chéo d'⇔Hệ Ptrình (I) vô nghiệm
- dcắtd'⇔HệPtrình (I) có một nghiệm

</td><td>

◇ (d) cắt (d') ⇔ $\begin{cases} \left[\vec{u},\vec{u'}\right] \neq 0 \\ \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_oM_0'} = 0 \end{cases}$

◇ (d) chéo (d') ⇔ $\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$

</td></tr>
<tr><td>

2)Vị trí tương đốicủa đthẳng vàmặtphẳng:
Trong Kg Oxyz cho (α): Ax+By+Cz+D=0

và $d:\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$

pt:A(x_o+a_1t)+B(y_o+a_2t)+C(z_0+a_3t)+D=0(1)

◇ P.trình (1) vô nghiệm thì d // (α)
◇ P.trình (1) có một nghiệm thì d cắt (α)
◇ P. trình (1) cóvôsốnghiệm thìd thuộc(α)
Đặc biệt :

$(d) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a},\vec{n}$ cùng phương

</td><td>

2)Vị trí tương đốicủa đthẳng vàmặtphẳng:
Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d qua M(x_0;y_0;z_0) có vtcp $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và(α): Ax+By+Cz+D=0 cóvtpt $\vec{n} = (A;B;C)$

◇ (d) cắt (α) ⇔ $\vec{a}.\vec{n} \neq 0$

◇ (d) // (α) ⇔ $\begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$

◇ (d) nằm trên mp(α) ⇔ $\begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$

(Bổsungkiếnthức chươngtrình nâng cao)

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

3) <u>Khoảng cách</u>:

◇ Khoảng cách giữa hai điểm A(x_A;y_A;z_A) và B(x_B;y_B;z_B) là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

◇ Khoảng cách từ M_0(x_0;y_0;z_0) đến mặt phẳng (α): Ax+By+Cz+D=0 cho bởi côngthức

$$d(M_0,\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

</td></tr>
<tr><td>

◇ Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)
<u>Phương pháp</u> :

- Lập ptmp(α)đi quaM vàvuônggócvới d
- Tìm tọa độ giao điểm Hcủa mp(α) và d
- d(M, d) =MH

◇ Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau
d điqua M(x_0;y_0;z_0);cóvtcp $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$
d'quaM'(x'$_0$;y'$_0$;z'$_0$) ;vtcp $\vec{a'} = (a'_1;a'_2;a'_3)$
<u>Phương pháp</u> :

- Lập ptmp(α)chứa d và songsong với d'
- d(d,d')= d(M',(α))

</td><td>

◇ Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)
(d đi qua M_0 có vtcp $\vec{u}$)

$$\boxed{d(M,\Delta) = \frac{\left|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]\right|}{\left|\vec{u}\right|}}$$

◇ Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau
d điqua M(x_0;y_0;z_0);cóvtcp $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$
d'quaM'(x'$_0$;y'$_0$;z'$_0$) ;vtcp $\vec{a'} = (a'_1;a'_2;a'_3)$

$$\boxed{d(\Delta,\Delta') = \frac{\left|[\vec{a},\vec{a'}].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|[\vec{a},\vec{a'}]\right|} = \frac{V_{hop}}{S_{day}}}$$

</td></tr>
</table>

Kiến thức bổ sung

◇ Gọiφ là góc giữa hai mặt phẳng ($0^0 \le \varphi \le 90^0$)

(P):Ax+By+Cz+D=0 và (Q):A’x+B’y+C’z+D’=0

$$\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|} = \frac{\left|A.A' + B.B' + C.C'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

◇ Góc giữa hai đường thẳng

(Δ) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

(Δ’) đi qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$ có VTCP $\vec{a'} = (a'_1;a'_2;a'_3)$

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{a}, \vec{a'})\right| = \frac{\left|\vec{a}.\vec{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a'}\right|} = \frac{\left|a_1.a'_1 + a_2.a'_2 + a_3.a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

◇ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

(Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, mp(α) có VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$

Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mp(α)

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{a}, \vec{n})\right| = \frac{\left|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

B. BÀI TẬP:

Bài 1:

a) Viết phương trình tham số,chính tắc của đường thẳng qua hai điểm A(1;3;1) và B(4;1;2).

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M(2;-1;1) vuông góc với mặt phẳng (P) : 2x – z + 1=0 . Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

c) Viết phương trình tham số ,chính tắc của đường thẳng d là phương trình giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 4 = 0$, $(Q) x - y + 2z + 2 = 0$

Bài 2 : Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(0;1;1), B(-1;0;2), C(3;1;0) và một đường thẳng (Δ) có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = 9 + 2t \\ z = 5 + 3t \end{cases}$, $t \in R$

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A,B,C.

b) Viết phương trình tham số , chính tắc đường thẳng BC.Tính d(BC,Δ).

c) Chứng tỏ rằng mọi điểm M của đường thẳng (Δ) đều thỏa mãn AM ⊥ BC, BM ⊥ AC, CM ⊥ AB.

Bài 3: Trong không gian cho hình hộp chữ nhật có các đỉnh A(3;0;0), B(0;4;0), C(0;0;5), O(0;0;0) và D là đỉnh đối diện với O.

a) Xác định tọa độ đỉnh D.Viết phương trình tổng quát mặt phẳng (A,B,D).
b) Viết phương trình đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (A,B,D).
c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (A,B,D).

Bài 4: Cho hai đường thẳng: $(\Delta):\begin{cases} x=-2t' \\ y=3 \\ z=1+t' \end{cases}$ $(\Delta'):\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ $t,t'\in R$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng (Δ) và (Δ’) không cắt nhau nhưng vuông góc nhau.
b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ)và (Δ’).
c) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua (Δ) và vuông góc với (Δ’).
d) Viết phương trình đường vuông góc chung của (Δ)và (Δ’).

Bài 5: Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(-1;-2;0), B(2;-6;3),C(3;-3;-1),D(-1;-5;3).

a) Lập phương trình tham số đường thẳng AB.
b) Lập phương trình mp (P) đi qua điểm C và vuông góc với đường thẳng AB.
c) Lập phương trình đường thẳng (d) là hình chiếu vuông góc của đường thẳng CD xuống mặt phẳng (P).
d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

Bài 6: Trong không gian Oxyz cho A(3;-1;0) , B(0;-7;3) , C(-2;1;-1) , D(3;2;6).

a) Tính các góc tạo bởi các cặp cạnh đối diện của tứ diện ABCD.
b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).
c) Viết phương trình đường thẳng (d) qua D vuông góc với mặt phẳng (ABC).
d) Tìm tọa độ điểm D’ đối xứng D qua mặt phẳng (ABC).
e) Tìm tọa độ điểm C’ đối xứng C qua đường thẳng AB.

Bài 7: Cho đường thẳng

$(\Delta):\begin{cases} x=-2+t \\ y=\quad 4t \\ z=-1+2t \end{cases}$ và mp (P) : x + y + z - 7=0

a) Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
b) Tìm tọa độ giao điểm của (Δ) và (P).
c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mp(P).

Bài 8: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng (Δ) và (Δ’) lần lượt có phương trình: $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$; $\Delta'\begin{cases} x=7+3t \\ y=2+2t \\ z=1-2t \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng (Δ) và (Δ’) cùng nằm trong mặt phẳng (α)
b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α)
c) Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc và cắt cả hai đường (Δ) và (Δ’) .

Bài 9: Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(5;0;0) , B(0;5/2;0) C(0;0;5/3) và đường thẳng (Δ): x = 5 + t ; y = -1 + 2t ; z = - 4 + 3t .

a) Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua A , B, C. Chứng minh rằng (α) và (Δ) vuông góc nhau, tìm tọa độ giao điểm H của chúng.
b) Chuyển phương trình của (Δ) về dạng tổng quát. Tính khoảng cách từ M(4;-1;1) đến (Δ).
c) Lập phương trình đường thẳng (d) qua A vuông góc với (Δ), biết (d) và (Δ) cắt nhau.

BÀI TẬPTỔNG HỢP:

Bài 1: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 -2x - 4y - 6z =0$ và hai điểm M(1;1;1) N(2;-1;5).

a) Xác định tọa độ tâm I và bán kính của mặt cầu (S).
b) Viết phương trình đường thẳng MN.
c) Tìm k để mặt phẳng (P): x + y – z + k =0 tiếp xúc mặt cầu(S).
d) Tìm tọa độ giao điểm của mặt cầu (S) và đường thẳng MN .Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại các giao điểm.

Bài 2*: Trong không gian Oxyz Cho A(6;-2;3), B(0;1;6), C(2;0;-1), D(4;1;0).

a) Chứng minh rằng A,B,C,D là bốn đỉnh của tứ diện.
b) Tính thể tích tứ diện ABCD.
c) Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm A,B,C.
d) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Xác định tọa độ tâm và bán kính.
e) Viết phương trình đường tròn qua ba điểm A,B,C . Hãy tìm tâm và bán kính của đường tròn đó.

Bài 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)có phương trình tương ứng :(P): 2x - 3y + 4z - 5=0 (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 4y - 5z + 6=0$

a) Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).
b) Tính khoảng cách từ tâm I đên mặt phẳng (P).Từ đó suy ra rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn mà ta ký hiệu là (C). Xác định bán kính R và tọa độ tâm H của đường tròn (C).

Bài 4: Trong không gian cho (P): x + 2y – z + 5 = 0 điểm I(1;2;-2) và đường thẳng

$$(d):\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=4+t \end{cases}, t\in R$$

a) Tìm giao điểm của (d) và (P). Tính góc giữa (d) và (P).
b) Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P).
c) Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua (d) và I.
d) Viết phương trình đường thẳng (d’)nằm trong (P) cắt (d) và vuông góc (d).

Bài 5: Trong không gian Oxyz cho A(1;-1;2) , B(1;3;2), C(4;3;2), D(4;-1;2).

a) Chứng minh A,B,C,D là bốn điểm đồng phẳng.

b) Gọi A’ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng Oxy. hãy viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A’,B,C,D.
c) Viết phương trình tiếp diện (α) của mặt cầu (S) tại điểm A’.

Bài 6: Trong không gian Oxyz cho A(1;0;0) B(1;1;1) và C(1/3; 1/3;1/3)

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc OC tại C. Chứng minh O,B,C thẳng hàng. Xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) tâm B, bán kính $R=\sqrt{2}$ với mặt phẳng(P).
b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB lên mặt phẳng(P).

Bài 7: Trong không gian Oxyz cho mp(P): x + y + z – 1 = 0. mp(P) cắt các trục tọa độ tại A,B,C.

a) Tìm tọa độ A,B,C. Viết phương trình giao tuyến của (P) với các mặt tọa độ. Tìm tọa độ giao điểm D của (d): $\begin{cases} x=2+t \\ y=-t \\ z=-3-3t \end{cases}$ $, t\in R$ với mp(Oxy). Tính thể tích tứ diện ABCD.
b) Lập phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp ABCD. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ACD. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

Bài 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 4 điểm A,B,C,D có tọa độ xác định bởi các hệ thức: $A=(2;4;-1)$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$, $C=(2;4;3)$, $\overrightarrow{OD}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

a) Chứng minh AB⊥AC, AC⊥AD, AD⊥AB. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.
b) Viết phương trình tham số của đường (d) vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD. Tính góc giữa (d) và mặt phẳng (ABD).
c) Viết phương trình mặt cầu (S) qua 4 điểm A,B,C,D. Viết phương trình tiếp diện (α) của (S) song song với mặt phẳng (ABD).

Bài 9: Trong không gian Oxyz cho 3 điểm A(2;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1) và mp(P): x + y + z – 2 = 0.

a) Viết pt mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm thuộc mp (P).
b) Tính độ dài đường cao kẽ từ A xuống BC
c) Cho D(0;3;0).Chứng tỏ rằng DC song song với mp(P) từ đó tính khoảng cách giữa đường thẳng DC và mặt phẳng (P).

Bài10: Trong không gian Oxyz cho A(2;0;0) , B(0;4;0), C(0;0;4).

a) Viết phương trình mặt cầu qua 4 điểm O,A,B,C. Tìm tọa độ tâm I và bán kính của mặt cầu.
b) Viết phương trình mặt phẳng(ABC).
c) Viết phương trình tham số của đường thẳng qua I và vuông góc mặt phẳng(ABC).
d) Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 11: Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu (S).

b) Gọi A,B,C lần lượt là giao điểm (khác điểm gốc tọa độ) của mặt cầu (S) với các trục tọa độ Ox,Oy,Oz.Tính tọa độ A,B,C và viết phương trình mặt phẳng (ABC).

c) Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng.Từ đó hãy xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

ℑ5. GIẢI TOÁN BẰNG HHGT

A. CÁCH GIẢI CHUNG

Để giải bài toán bằng phương pháp tọa độ trong không gian ta có thể chọn cho nó một hệ trục tọa độ phù hợp rồi chuyển về hình học giải tích để giải.

Các bước chung để giải như sau:

B1: Chọn hệ trục tọa độ thích hợp.

B2: Chuyển các yêu cầu của bài toán về HH giải tích.

B3: Giải bằng HH giải tích.

B4: Kết luận các tính chất, định tính, định lượng... của bài toán đặt ra.

B. CÁC BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ có cạnh bằng a

a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A’B và B’D.

b) Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm BB’, CD, A’D’.Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C’N.

Bài 2:Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh bên và cạnh đáy bằng a tính góc hợp bởi cạnh bên và mặt bên đối diện.

Bài 3:Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) đáy ABC là tam giác vuông tại C. Cho SA=AC=CB=a

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mp(SBC).

Bài 4 : Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C. SA $\perp$ (ABC), AC=a, BC=b, SA=h. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và SB.

a) Tính độ dài MN.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h để MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AC và SB.

Bài 5 Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’.Tính số đo của góc nhị diện [B,A’C,D].

Bài 6 Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A’B’C’D’có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M là trung điiểm cạnh AA’ và N là trung điểm của cạnh CC’. Chứng minh rằng bốn điểm B’,M,D,N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA’ theo a để tứ giác B’MDN là hình vuông.

Bài 7*: Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ có cạnh a. M là điểm thuộc AD’ và N thuộc BD sao cho AM=DN=k (0<k< $a\sqrt{2}$).

a) Tìm k để đoạn MN ngắn nhất.
b) Chứng minh rằng MN//(A’D’BC) khi k biến thiên.
c) Khi đoạn MN ngắn nhất. Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AD’ và BD và MN//A’C.

Bài 8 Tìm m để hệ phương trình sau đây có đúng một nghiệm tìm nghiệm đó

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x-y+2z=m \end{cases}.$$

Bài 9 Cho ba số thực x,y,z thỏa $x^2+y^2+z^2=1$ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $F=|2x+2y-z-3|$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP BỔ SUNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1:Cho hai dường thẳng $\Delta_1:\frac{x}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{4}$ và $\Delta_2:\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}, t\in R$

a/. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và song song với Δ_2.

b/. Cho điểm M(2;1;4).Tìm tọa độ đuiểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn MH có độ dài nhỏ nhất

Bài 2: Cho hai điểm A(2;0;0) ,B(0;0;8) và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC}=(0;6;0)$.Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA .

Bài 3: Trong không Oxyz cho mp(β): x+3ky – z +2=0 và (γ):kx – y +z +1=0 . Tìm k để giao tuyến của (β) và (γ) vông góc với mặt phẳng (α):x – y – 2z +5=0 .

Bài 4:Trong không gian Oxyz cho điểm A(-4;-2;4)và đường thẳng d: $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=-1+4t \end{cases}, t\in R$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A , cắt và vuông góc với đường thẳng d.

Bài 5: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thoi ABCD , AC cắt BD tại gốc tọa độ O.Biết A(2;0;0),B(0;1;0) ,S(0;0; $2\sqrt{2}$) . Gọi M là trung điểm SC .

a/. Viết phương trình mặt phẳng chứa SA và song song với BM b/. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

Bài 6: Trong không gian Oxyz cho điểm D(-3;1;2) và mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A(1;0;11) , B(0;1;10), C(1;1;8).

a/. viết phương trình đường thẳng AC .

b/. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α).

c/.Viết phương trình mặt cầu (S) tâm D,bán kính r=5.Chứng minh mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S).

Bài 7: Trong không gian Oxyz ,cho mặt phẳng (α): 2x +y – z – 6 =0 .

a/. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua O và song song với (α).

b/. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với mặt phẳng (α).

c/. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α).

Bài 8 : Cho hình hộp chữ nhật có các đỉnh A(3 ;0 ;0),B(0 ;4 ;0),C(0 ;0 ;5),O(0 ;0 ;0) và đỉnh D đối xứng với O qua tâm của hình hộp chữ nhật .

a/. xác định tọa độ đỉnh D . Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABD) .

b/. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABD) .

Bài 9 : Trong không gian Oxyz cho A(6 ;- 2 ;3) ,B(0 ;1 ;6) , C(2 ;0 ;-1), D(4 ;1 ;0)

a/. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn điểm A,B,C,D . Hãy lập pương trình mặt cầu (S)

b/. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

Bài 10 : Trong không gian Oxyz cho A(1 ;0;0) ,B(0 ;1 ;0) , C(0;0;1), D(1 ;1 ;0)

a/. Viết lập phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A,B,C,D .

b/. Xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn là giao tuyến của với mặt cầu (S)với mặt phẳng (ACD)

Bài 11: Trong không gian Oxyz cho A(2;4;-1) ,B(1;4;-1) , C(2 ;4;3), D(2;2;-1).

a/. Chứng minh các đường thẳng AB,AC,AD vuông góc với nhau từng đôi một .

b/.Viết phương trình tham số của đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng ABvà CD

c/. Viết lập phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A,B,C,D

d/.Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (ABD)

Bài 12:Trong không gian Oxyz cho A(3;-1;6) , B(-1;7;-2) , C(1;-3;2), D(5;1;6)

a/.Chứng minh A,B,C không thẳng hàng .Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC

b/.Chứng minh A,B,C,D không đồng phẳng.Xác định tọa độ trọng tâm của tứ diện .

c/. Tính góc tạo bởi các cặp cạnh đối diện của tứ diện ABCD .

d/. Tính diện tích các tam giác là các mặt của tứ diện.

e/. Tìm tọa độ điểm I cách đều các đỉnh của tứ diện .

f/. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của D lên mặt phẳng (ABC)

Bài 13: Trong không gian Oxyz cho ba mặt phẳng có phương trình :
(P): $x + y - 2 = 0$, (Q) : $x - 3y - z + 2 = 0$, (R): $4y + z - 2 = 0$
a/. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau . Viết phương trình tham số của đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (Q) .
b/. Viết phương trình mặt phẳng (T) chứa đường thẳng d và song song với mặt phẳng (R)

Bài 14: Trong không giao Oxyz cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình :
(S) : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$, (P) : $2x - 2y - z + 9 = 0$
a/. Chứng minh : (P) và (S) cắt nhau .
b/. Xác định tâm và bán kính đường tròn là giao tuyến của của (P) và (S)

Bài 15: Cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$
a/. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) :$x+y+z - 9 = 0$ và cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn .
b/. Viết phương trình mặt phẳng (K) song song với mặt phẳng (R) :$x+2y+z - 1 = 0$ và cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có diện tích bằng 3π.

Bài 16 : Cho dường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình :
(d) : $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z}{3}$, (P) : $3x + 2y + z - 12 = 0$.
a/. Chứng minh (d) $\subset$(P) .
b/. Lập phương trình mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với mặt phẳng (P) .
c/. Lập phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với mặt phẳng (P) một góc 60^o .

Bài 17: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình
(d_1) : $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$, (d_2) $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}$
a/. Chứng tỏ (d_1) và (d_2) song song với nhau.
b/. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2) .
c/. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) .
d/. Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d_1) và cách (d_2) một khoảng bằng 2.
e/.Lập phương trình đường thẳng(Δ) thuộc mặt phẳng (P) và songsong cáchđều(d_1)và(d_2)

Bài 18:Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2)
(d_1): $\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, (t \in R)$, (d_2) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$
a/. Chứng minh hai đường thẳng (d_1) và (d_2) đồng phẳng .viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).
b/. Tính thể tích tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng (P) và ba mặt phẳng tọa độ .
c/. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện nói trên .

Bài 19:Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2)có phương trình :

$$(d_1):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+t\\ z=-3+3t\end{cases},(t\in R) \quad \text{và } (d_2):\begin{cases}x=2+u\\ y=-3+2u\\ z=1+3u\end{cases},(u\in R)$$

a/. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau .
b/. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).
c/. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2)
d/. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với Oz , cắt cả (d_1) và (d_2).

Bài 20:Cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình :

$$(d):\begin{cases}x=3t\\ y=2+2t\\ z=3-t\end{cases},(t\in R) \quad ,(S): x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$$

a/. Chứng tỏ đường thẳng (d) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau . Tìm tọa độ điểm tiếp xúc
b/. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng (d) và cắt (S) tại hai điểm A,B sao cho độ dài AB = 2 .
c/. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có chu vi bằng 2π

Bài 21: Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-t\\ z=3t\end{cases},(t\in R) \quad ,(P): 2x-y-2z+1=0$$

a/. Tìm các điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 1 .
b/. Gọi K là điểm đối xứng của I(2 ;-1 ;3) qua đường thẳng (d) . Xác định tọa độ điểm K .