

CHUYÊN ĐỀ NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

I. NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm.

Định nghĩa. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbf{K} (\mathbf{K} là đoạn, khoảng, nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbf{K} , nếu $F'(x) = f(x)$, với mọi $x \in \mathbf{K}$.

Định lý. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng \mathbf{K} . Khi đó

- a. Với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.
- b. Ngược lại, nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$.
- c. Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ là $\int f(x)dx = F(x) + C$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, C là hằng số bất kỳ.
- d. Bảng các nguyên hàm cơ bản.

Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm các hàm số sơ cấp thường gặp	Nguyên hàm của hàm số hợp $u = u(x)$
$\int kdx = kx + C, k \in R$	$\int kdu = ku + C, k \in R$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha} \cdot x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{1+\alpha} \cdot u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C (x \neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C (x \neq 0)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1).$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (0 < a \neq 1).$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$.	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$; $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$
<p>Ngoài ra còn một số công thức thường gặp là.</p> $\int (\alpha x + b)^k dx = \frac{1}{\alpha} \frac{(\alpha x + b)^{k+1}}{k+1} + C, (\alpha \neq 0, k \neq -1); \quad \int \frac{1}{\alpha x + b} dx = \frac{1}{\alpha} \ln \alpha x + b + C, \alpha \neq 0.$ $\int e^{\alpha x + b} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x + b} + C; \quad \int \cos(\alpha x + b) dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x + b) + C$ $\int \sin(\alpha x + b) dx = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x + b) + C$	

2. Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

Định lý. Nếu $F(x), G(x)$ tương ứng là một nguyên hàm của $f(x), g(x)$ thì

- a. $\int f'(x) dx = f(x) + C$
- b. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + C$;
- c. $\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx = aF(x) + C \quad (a \neq 0)$.

3. Một số phương pháp tìm nguyên hàm

a. Phương pháp đổi biến số

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lý sau: Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K . Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f , tức là $\int f(u) du = F(u) + C$ thì $\int f[u(x)] dx = F[u(x)] + C$.

b. Phương pháp tích phân từng phần

Một số dạng thường gặp:

Dạng 1. $\int P(x) \cdot e^{\alpha x + b} dx, \int P(x) \sin(\alpha x + b) dx, \int P(x) \cos(\alpha x + b) dx$

Cách giải: Đặt $u = P(x), dv = e^{\alpha x + b} dx$ (hoặc $dv = \sin(\alpha x + b) dx, dv = \cos(\alpha x + b) dx$)

Dạng 2. $\int P(x) \ln(\alpha x + b) dx$

Cách giải: Đặt $u = \ln(\alpha x + b), dv = P(x) dx$.

I. TÍCH PHÂN.

1. **Định nghĩa.** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng \mathbf{K} và a, b là hai số bất kỳ thuộc \mathbf{K} . Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của $f(x)$ từ a đến b và ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Trong trường hợp $a < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ là tích phân của f trên $[a; b]$.

2. Tính chất của tích phân.

Cho các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbf{K} và a, b, c là ba số thuộc \mathbf{K} .

$$\begin{aligned} \bullet \int_a^a f(x)dx &= 0 & \bullet \int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx \\ \bullet \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx & \bullet \int_a^b k \cdot f(x)dx &= k \int_a^b f(x)dx \\ \bullet \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

3. Một số phương pháp tính tích phân

- **Phương pháp đổi biến số:** Công thức đổi biến số $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$. Trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục và $u(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng \mathbf{J} sao cho hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên \mathbf{J} ; $a, b \in J$.

Phương pháp đổi biến số thường áp dụng theo hai cách

Cách 1. Đặt ẩn phụ $u = u(x)$ (u là một hàm của x)

Cách 2. Đặt ẩn phụ $x = x(t)$ (x là một hàm số của t).

- **Phương pháp tích phân từng phần.**

Định lý. Nếu $u(x), v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng \mathbf{K} và a, b là hai số thuộc \mathbf{K} thì $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$

4. Ứng dụng của tích phân

- **Tính diện tích hình phẳng**
- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = \int_a^b |f(x)|dx$.

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

- **Tính thể tích vật thể.** Thể tích vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a, b là $V = \int_a^b S(x) dx$. Trong đó $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là $x \in [a; b]$ và $S(x)$ là một hàm liên tục.

- **Tính thể tích khối tròn xoay.**

- Hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V được tính bởi công thức $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V được tính bởi công thức $V = \pi \int_c^d g^2(y) dy$.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Phần 1. Tìm nguyên hàm

Dạng 1: Tìm nguyên hàm dựa vào bảng nguyên hàm.

Bài 1. Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $\int (x+2)(x^2 - 2x + 4) dx$

b. $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}) dx$

c. $\int \sin^2 x dx$

d. $\int \sin^4 x dx$

e. $\int \tan^4 x dx$

f. $\int \cot^4 x dx$

g. $\int \sin 2x \cdot \cos x dx$

h. $\int 10^{2x} \cdot 3^x \cdot 5^x dx$

i. $\int \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 3)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

k. $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^5} dx$

l. $\int \sin(2x + 1) dx$

m. $\int (1 + 2x^2)^{10} dx$

n. $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx$

o. $\int xe^{x^2} dx$

p. $\int \frac{dx}{(1 - 2x)^4}$

Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến.

Tính tích phân $I = \int f(x)dx$

Phương pháp 1. Đổi biến $t = \varphi(x)$, rút x theo t .

+) Xác định vi phân: $dx = \varphi'(t)dt$

+) Biểu thị $f(x)dx$ theo t và dt . Giả sử $f(x)dx = g(t)dt$. Khi đó $I = \int g(t)dt$

Lưu ý: Một số dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ:

Dấu hiệu	Có thể chọn
Hàm số có mẫu	Đặt t là mẫu
Hàm $f(x, \sqrt{\varphi(x)})$	Đặt $t = \varphi(x)$
Hàm $f(x, \sqrt[n]{\varphi(x)}, \sqrt[m]{\varphi(x)})$	Đặt $t = \sqrt{nm}\sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x + e}$	Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$
Hàm lẻ với $\sin x$	Đặt $t = \cos x$
Hàm lẻ với $\cos x$	Đặt $t = \sin x$
Hàm chẵn với $\sin x$ và $\cos x$	$t = \tan x$

Phương pháp 2. Đổi biến $x = \varphi(t)$

+) Lấy vi phân $dx = \varphi'(t)dt$

+) Biểu thị $f(x)$ theo t và dt , Giả sử: $f(x)dx = g(t)dt$. Khi đó $I = \int g(t)dt$

Lưu ý: Một số dấu hiệu dẫn tới việc chọn ẩn phụ:

Dấu hiệu	Có thể chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ x = a \cos t, 0 \leq t \leq \pi \end{array} \right.$

$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}; t \neq 0 \\ x = \frac{ a }{\cos t}, 0 \leq t \leq \pi; t \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$\begin{cases} x = a \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ x = a \cot t, 0 < t < \pi \end{cases}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	Đặt $x = a \cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	Đặt $x = a + (b-a) \sin^2 t$

Bài 2. Tìm nguyên hàm của các hàm số

- | | | |
|--|--|---|
| a. $\int (2x+1)^3 dx$ | b. $\int \frac{2z}{\sqrt[3]{z^2+5}} dz$ | c. $\int 2x(x^2+1) dx$ |
| d. $\int \sin(7x+6) dx$ | e. $\int x e^{1+x^2} dx$ | f. $\int \frac{2x}{x^2+4x+3} dx$ |
| g. $\int \sin^{2012} x \cdot \cos x dx$ | h. $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx$ | k. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+2012}} dx$ |
| l. $\int \frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$ | m. $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$ | n. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx$ |
| o. $\int \frac{1}{\cos^2(5x+2)} dx$ | p. $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} dx$ | q. $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$ |
| r. $\int \frac{\sin(3x+1)}{\cos^2(3x+1)} dx$ | s. $\int \frac{xdx}{x^4-2x^2-2}$ | t. $\int \frac{xdx}{x^2-4x-5}$ |
| u. $\int \frac{x^3 dx}{x^4-x^2-2}$ | v. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{39}} dx$ | |

Dạng 3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần.

Bài 3. Tìm nguyên hàm của các hàm số.

- | | | |
|------------------------|---|---------------------------------|
| a. $\int x e^x dx$ | b. $\int x^2 \cos x dx$ | c. $\int (x+1) \cdot \ln x dx$ |
| d. $\int x^2 \ln x dx$ | e. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx$ | f. $\int e^x \cdot \cos^2 x dx$ |

g. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

h. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

Dạng 4. Nguyên hàm của một số hàm phân thức hữu tỷ.

Bài 4. Tìm nguyên hàm

a. $\int \frac{dx}{2x + 3}$

b. $\int \frac{4x + 3}{2x + 1} dx$

c. $\int \frac{dx}{(2x - 1)^2}$

d. $\int \frac{2x^2 + 3x + 5}{x + 3} dx$

e. $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} dx$

f. $\int \frac{4x - 6}{x^2 - 3x + 4} dx$

g. $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5x + 6} dx$

h. $\int \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} dx$

h. $\int \frac{3x^3 - 14x^2 + 13x + 7}{x^2 - 5x + 6} dx$

i. $\int \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 - 9} dx$

k. $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^3} dx$

l. $\int \frac{2x dx}{x^2 + 3}$

Dạng 5. Nguyên hàm của một số hàm số lượng giác.

Các bài toán cơ bản:

a) Nguyên hàm của các hàm số có dạng:

$\oplus f(x) = \cos ax \cdot \cos bx$

$\oplus f(x) = \sin ax \cdot \sin bx$

$\oplus f(x) = \sin ax \cdot \cos bx$

$\oplus f(x) = \sin^2 ax; \cos^2 bx$

Phương pháp chung: Dùng các công thức biến đổi, công thức hạ bậc để đưa về tổng các nguyên hàm cơ bản.

Bài 5. Tìm các nguyên hàm:

a. $\int \cos 3x \cdot \cos 2x dx$

b. $\int \sin x \cdot \cos^2 2x dx$

c. $\int \cos^3 2x \cdot \sin 2x dx$

b) Nguyên hàm của các hàm số có dạng: $f(x) = \sin^n x \cdot \cos^m x$

Phương pháp chung: Dựa vào tính chẵn lẻ của m, n để biến đổi hoặc đặt ẩn phụ cho phù hợp.

Bài 6. Tìm nguyên hàm

a. $\int (\sin^3 x + \cos^3 2x) dx$

b. $\int (\sin^5 x + \cos^5 x) dx$

c. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$

d. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

e. $\int \sin^4 2x dx$

f. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

g. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

h. $\int \frac{\tan^6 x}{\cos 2x} dx$

Dạng 6. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến lượng giác.

Bài 7. Tìm nguyên hàm

a. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

b. $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

c. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$

d. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$

e. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$

f. $\int \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} dx$

g. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

h. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^{2k+1}}}$

k. $\int \frac{(a_1x^2 + b_1x + c_1)dx}{(x-d)(ax^2 + bx + c)}$

l. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ với $(a \neq b)$

m. $\int \frac{4 \sin x + 3 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$

n. $\int \frac{8 \cos x dx}{2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x}$

Bài 8. Tìm nguyên hàm

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

b. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx$

c. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

d. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} dx$

e. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(x+1)}}$

f. $\int \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$

g. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$

h. $\int \frac{2}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} dx$

Dạng 7. Nguyên hàm của một số hàm số mũ và lôgarit

Bài 9. Tìm nguyên hàm

a. $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$

b. $\int \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{2 + \ln x}} dx$

c. $\int (x+1) \cdot e^{x-1} dx$

d. $\int x \cdot \ln^2 x dx$

e. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$

f. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$

Phần 2. Tính tích phân

Dạng 1. Dùng định nghĩa và các tính chất của tích phân.

Bài 10. Tính các tích phân

a. $\int_{-2}^2 (x^3 - 3x^2 + 1)dx$

b. $\int_1^3 (x + \frac{1}{x})^2 dx$

c. $\int_0^2 (x^2\sqrt{x} + 1)dx$

d. $\int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$

e. $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} dx$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$

g. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{5}{\cos^2 x} - 4\sin x + \cos x) dx$

h. $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx$

i. $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$

k. $\int_0^{\pi} (\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2}) dx$

l. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x \cdot \cos x}{2 + \sin x} dx$

m. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2(5x + 6)}$

n. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x \cdot \sin 3x dx$

o. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) dx$

p. $\int_1^2 \frac{(x+1)dx}{x^2 + x \ln x}$

Dạng 2. Tính tích phân bằng phương pháp phân tích

Bài 11. Tính tích phân

a. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^2}$

b. $\int_0^1 \frac{x^7 dx}{x^2 + 1}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}$

f. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2\cos x + 3} dx$

g. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$

h. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2(x+1)}$

Dạng 3. Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến.

Bài 12. Tính các tích phân sau

a. $\int_1^2 (x^2 - 1)^{25} x dx$

b. $\int_0^1 x^5 \sqrt{x^6 + 1} dx$

c. $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2 + 4x + 7} dx$

d. $\int_0^3 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos^2 x} \sin x \cdot \cos x dx$

f. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

g. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1-\cos^3 x} \cdot \sin x \cdot \cos^5 x dx$

i. $\int_1^e \frac{1+\ln^3 x}{x} dx$

k. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin^3 x + e^{\sin x}) \cdot \cos x dx$

l. $\int_0^{\ln 2} (3+e^x)^5 e^x dx$

m. $\int_4^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Bài 13. Tính các tích phân

a. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

b. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$

c. $\int \frac{dx}{\sqrt{2} x \sqrt{x^2-1}}$

d. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

e. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{9+3x^2} dx}{x^2}$

f. $\int_{-a}^0 \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx, (a > 0)$

g. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x dx}{2 \sin^2 x + \cos^2 x}$

h. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}}$

Bài 14. Tính các tích phân

a. $\int_{-1}^1 x^{2012} \sin x dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

c. $\int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{e^x + 1}$

d. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$

e. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{4 + \cos^2 x}$

f. $\int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx$

g. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{3^x + 1}$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

i. $\int_0^{2\pi} x \cos^3 x dx$

k. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$

l. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + 3}$

m. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + e^x}$

• Dạng 4. Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần.

Bài 15. Tính các tích phân

a. $\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx$

b. $\int_1^2 x^2 e^{2x} dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-x) \sin 3x dx$

d. $\int_3^5 x^2 \ln(x-1) dx$

e. $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

f. $\int_0^{e^{\pi}} \cos(\ln x) dx$

g. $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(1 + \cos x) dx$

• Dạng 5. Liên kết phương pháp đổi biến số và tích phân từng phần

Bài 16. Tính tích phân

a. $\int_0^1 x^2 (e^{2x} + \sqrt{x^3 + 1}) dx$

b. $\int_{e^2}^{e^5} \frac{\ln x \cdot \ln(\ln x) dx}{x}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^3 x + e^{\sin x}) \cdot \cos x dx$

• Dạng 6. Lập công thức tích phân truy hồi

Bài 17. Lập công thức tích phân truy hồi cho các tích phân sau.

a. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

b. $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$ với n là số nguyên dương.

• Dạng 7. Ứng dụng của tích phân

Bài 18. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số sau.

a. $y = 2x^2 - x^4$ và trục hoành

b. $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 1 = 0$

c. $y = \sin^2 x \cos^3 x$; $y = 0$ và $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$

d. $y = -x^2 + 2x$; $y = -3x$

e. $y = x^2$; $y = \frac{x^2}{8}$; $y = \frac{8}{x}$

f. $y = |x^2 - 4x + 3|$; $y = 3 - x$

Bài 19. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục mỗi hình phẳng giới hạn bởi.

- a. $y = \ln x$; trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.
- b. $y = \sqrt{x}e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$
- c. $y = \sqrt{\cos^2 x + x \sin x}$, $y = 0, x = 0, x = 2$.
- d. $y = \frac{x^2}{2}, y = 2, y = 4$.

Phần 3. Bài tập tổng hợp

Bài 20. Tính các tích phân.

a. $\int_1^e \frac{(\ln x + 2013)^2}{x} dx$

b. $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2 + 3)^2} dx$

c. $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$

d. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1 + x^2} dx$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$

g. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}} dx$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + 3 \cos x)^2}$

i. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

k. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$

l. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 4 \sin x + 3}$

m. $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$

Bài 21. Tính các tích phân.

a. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$

c. $\int_0^1 x^3 \ln(x^2 + 1) dx$

d. $\int_0^1 x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \tan^2 x dx$

f. $\int_0^{\ln 3} \frac{x e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

g. $\int_0^1 \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$

h. $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$

i. $\int_1^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 2}} dx$

k. $\int_1^2 \frac{2(2x - 1)}{(x + 2)(x^2 + 1)} dx$

l. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}$

m. $\int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$

n. $\int_{-3}^3 |x^2 - 4| dx$

o. $\int_{-2}^3 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx$

p. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt[4]{\cot x}}$

Bài 22. Tính tích phân.

a. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$

b. $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

c. $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

d. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin 2x} dx$

e. $\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$

f. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$

g. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{2(e^x + 1)\sqrt{e^x + 1}}$

h. $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

i. $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$

k. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} dx$

l. $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx$

m. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$

n. $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

o. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$ (B-08)

p. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx$

q. (A-05) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$

r. $\int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2} dx$

s. $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x}{x} dx$

t. $\int_2^3 \ln(x^2-x) dx$

u. $\int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1+2e^x} dx$

v. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sin 2x + 2(1+\sin x + \cos x)} dx$

Bài 23. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau.

a. $y^2 - 2y + x = 0, x + y = 0$

b. $y = 3 + x - x^2, y = 2x + 1.$

c. $y = 0, y = \sin x, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}.$

d. $y = |x^2 - 4x + 3|, x = 2, y = x + 3.$

e. $y = \frac{1}{e^{-2x}}, y = 2^{-x}, x = 1.$

f. $y = x^2, y = 2x - x^2, x = 2.$

g. $y = (e+1)x, y = (1+e^x)x.$

h. $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}, y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}.$

i. $y = |x^2 - 4x + 3|, y = x + 3.$

Bài 24. Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox

a. $y^2 = 4x, y = x$

b. $y = x \ln x, y = 0, x = e.$

c. $y = 0, y = \sqrt{\cos^2 x + x \sin x}, x = 0, x = \frac{\pi}{2}.$

Bài 25. Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Oy : $y = 0, y = 2x - x^2.$

Bài 26. Tính các tích phân.

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2012} x}{\sin^{2012} x + \cos^{2012} x} dx.$

b. $\int_{-1}^1 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

c. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+2012^x} dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+x \sin x}{\cos^2 x} dx$

f. $\int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$

g. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\sin x} \sqrt{1+\cos^2 x} dx$

h. $\int_0^1 \frac{x \ln(x+2)}{\sqrt{4-x^2}} dx$

i. $\int_0^1 \frac{4x^3 + 6x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

k. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos 2x}{1+e^x} dx$

l. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(x+1)(1-2 \sin 2x) + \cos 2x}{x \cos 2x + \cos 2x} dx.$

Bài 27. Tính các tích phân.

a. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx$

c. $\int_1^3 \frac{1 + \ln(1+x)}{x^2} dx$

Bài 28. Tính các tích phân

a. $\int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x dx$

b. $\int_0^1 x \sqrt{2-x^2} dx$

c. $\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} dx$

TÍCH PHÂN TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC TỪ NĂM 2009-2013

Bài 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$ - ĐHKA-2009

KQ: $\frac{8}{5} - \frac{\pi}{4}$

Bài 2: Tính $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$ - ĐHKB-2009

KQ: $\frac{1}{4} (3 + \ln \frac{27}{16})$

- Bài 3:** Tính $I = \int_1^3 \frac{1}{e^x - 1} dx$ - ĐHKD-2009 KQ: $\ln(e^2 + e + 1) - 2$
- Bài 4:** Tính $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx$ - ĐHKA-2010 KQ: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + 2e}{3}\right)$
- Bài 5:** Tính $I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(2 + \ln x)^2}$ - ĐHKB-2010 KQ: $-\frac{1}{3} + \ln \frac{3}{2}$
- Bài 6:** Tính $I = I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x dx$ - ĐHKD-2010 KQ: $\frac{e^2}{2} - 1$
- Bài 7:** Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$ - ĐHKA-2011 KQ: $\frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\right)$
- Bài 8:** Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx$ - ĐHKB-2011 KQ: $\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})$
- Bài 9:** Tính $I = \int_0^4 \frac{4x - 1}{\sqrt{2x + 1} + 2} dx$ - ĐHKD-2011 KQ: $\frac{34}{3} + 10 \ln \frac{3}{5}$
- Bài 10:** Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$ - KA-2012 KQ: $\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} \ln 2 + \ln 3$
- Bài 11:** Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$ - ĐHKB-2012 KQ: $\frac{1}{2} (2 \ln 3 - 3 \ln 2)$
- Bài 12:** Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/4} x(1 + \sin 2x) dx$ - ĐHKD-2012 KQ: $\frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$
- Bài 13:** Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x dx$ - ĐHKA-2013 KQ: $\frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}$
- Bài 14:** Tính tích phân $I = \int_0^1 x \sqrt{2 - x^2} dx$ - ĐHKB-2013 KQ: $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$
- Bài 15:** Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} dx$ - ĐHKD-2013 KQ: $1 + \ln 2$