CHUYÊN ĐỀ TOÁN 9

PHẦN I:
HỆ THỐNG CÁC VẤN ĐỀ CƠ BẢN CỦA TOÁN 9

---***---

VẤN ĐỀ I: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

A. Kiến thức cần nhớ:

A.1. Kiến thức cơ bản

A.1.1. Căn bậc hai

a. Căn bậc hai số học

- Với số dương a, số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a
- Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0
- Một cách tổng quát: $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = a \end{cases}$

b. So sánh các căn bậc hai số học

- Với hai số a và b không âm ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

A.1.2. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

a. Căn thức bậc hai

- Với A là một biểu thức đại số , người ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A, A được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn
- $\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) $\Leftrightarrow$ A $\ge$ 0

b. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

- Với mọi A ta có $\sqrt{A^2} = |A|$
- Như vậy: + $\sqrt{A^2} = A$ nếu A $\ge$ 0
  + $\sqrt{A^2} = -A$ nếu A < 0

A.1.3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

a. Định lí: + Với A $\ge$0 và B $\ge$ 0 ta có: $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$
   + Đặc biệt với A $\ge$ 0 ta có $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$

b. Quy tắc khai phương một tích: Muốn khai phương một tích của các thừa số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau

c. Quy tắc nhân các căn bậc hai: Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó

A.1.4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

a. Định lí: Với mọi A $\ge$0 và B > 0 ta có: $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

b. Quy tắc khai phương một thương: Muốn khai phương một thương a/b, trong đó a không âm và b dương ta có thể lần lượt khai phương hai số a và b rồi lấy kết quả thứ nhất chí cho kết quả thứ hai.

c. Quy tắc chia các căn bậc hai: Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho số b dương ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

A.1.5. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

a. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- Với hai biểu thức A, B mà B ≥ 0, ta có $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$, tức là

  + Nếu A ≥ 0 và B ≥ 0 thì $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$

  + Nếu A < 0 và B ≥ 0 thì $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$

b. Đưa thừa số vào trong dấu căn

  + Nếu A ≥ 0 và B ≥ 0 thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$

  + Nếu A < 0 và B ≥ 0 thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$

c. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

- Với các biểu thức A, B mà A.B ≥ 0 và B ≠ 0, ta có $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{AB}}{|B|}$

d. Trục căn thức ở mẫu

- Với các biểu thức A, B mà B > 0, ta có

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$$

- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$$

- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$$

A.1.6. Căn bậc ba

a. Khái niệm căn bậc ba:

- Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$
- Với mọi a thì $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$

b. Tính chất

- Với a < b thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$
- Với mọi a, b thì $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$
- Với mọi a và $b \neq 0$ thì $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

A.2. Kiến thức bổ xung (*) Dành cho học sinh khá giỏi, học sinh ôn thi chuyên

A.2.1. Căn bậc n

a. Căn bậc n ($2 \leq n \in N$) của số a là một số mà lũy thừa n bằng a

b. Căn bậc lẻ (n = 2k + 1)

- Mọi số đều có một và chỉ một căn bậc lẻ

- Căn bậc lẻ của số dương là số dương
- Căn bậc lẻ của số âm là số âm
- Căn bậc lẻ của số 0 là số 0

c. Căn bậc chẵn (n = 2k)
- Số âm không có căn bậc chẵn
- Căn bậc chẵn của số 0 là số 0
- Số dương có hai căn bậc chẵn là hai số đối nhau kí hiệu là $\sqrt[2k]{a}$ và $-\sqrt[2k]{a}$

d. Các phép biến đổi căn thức.

- $\sqrt[2k+1]{A}$. xác định với $\forall A$
  $\sqrt[2k]{A}$. xác định với $\forall A \geq 0$
- $\sqrt[2k+1]{A^{2k+1}} = A$ với $\forall$ A
  $\sqrt[2k]{A^{2k}} = |A|$ với $\forall$ A
- $\sqrt[2k+1]{A.B} = \sqrt[2k+1]{A}.\sqrt[2k+1]{B}$ với $\forall$ A, B
  $\sqrt[2k]{A.B} = \sqrt[2k]{|A|}.\sqrt[2k]{|B|}$ với $\forall$ A, B mà $A.B \geq 0$
- $\sqrt[2k+1]{A^{2k+1}.B} = A.\sqrt[2k+1]{B}$ với $\forall$ A, B
  $\sqrt[2k]{A^{2k}.B} = |A|.\sqrt[2k]{B}$ với $\forall$ A, B mà $B \geq 0$
- $\sqrt[2k+1]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[2k+1]{A}}{\sqrt[2k+1]{B}}$ với $\forall$ A, B mà B $\neq 0$
  $\sqrt[2k]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[2k]{|A|}}{\sqrt[2k]{|B|}}$ với $\forall$ A, B mà B $\neq 0$, $A.B \geq 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}$ với $\forall$ A, mà $A \geq 0$
- $\sqrt[m]{A^n} = A^{\frac{m}{n}}$ với $\forall$ A, mà $A \geq 0$

B. MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI.

Bài 1: Tính:

a. $A = \dfrac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{2-\sqrt{3}}+2\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{2}}$ **b. B =** $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \dfrac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$ c. **C** $= 5.\sqrt{\dfrac{1}{5}} + \dfrac{1}{2}.\sqrt{20} + \sqrt{5}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a. $A = \dfrac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{2-\sqrt{3}}+2\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{2}}. = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-3)}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}+4} + \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-4}$

$= \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-3)}{\sqrt{3}-1+4} + \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}{\sqrt{3}+1-4} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-3)^2+\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)^2}{3-9} = \dfrac{24\sqrt{2}}{-6} = -4\sqrt{2}$

b. $B = \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{(5+\sqrt{5})^2+(5-\sqrt{5})^2}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} = \frac{25+10\sqrt{5}+5+25-10\sqrt{5}+5}{25-5} = \frac{60}{20} = 3$

c. $C = 5.\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}.\sqrt{20} + \sqrt{5} = 5.\sqrt{\frac{5}{5^2}} + \frac{1}{2}.\sqrt{4.5} + \sqrt{5} = \frac{5}{5}\sqrt{5} + \frac{2}{2}\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Bài 2: Cho biểu thức A = $\left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

a) Nêu điều kiện xác định và rút biểu thức A **b.Tìm giá trị của x để A =** $\frac{1}{3}$**.**

c.Tìm giá trị lớn nhất cua biểu thức P = A - 9$\sqrt{x}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a). Điều kiện $0 < x \neq 1$

Với điều kiện đó, ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} : \frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

b). Để A = $\frac{1}{3}$ thì $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy $x = \frac{9}{4}$ thì A = $\frac{1}{3}$

c). Ta có P = A - 9$\sqrt{x}$ $= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = -\left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cô –si cho hai số dương ta có: $9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}} = 6$

Suy ra: $P \leq -6+1 = -5$. Đẳng thức xảy ra khi $9\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = -5$ khi $x = \frac{1}{9}$

Bài 3: 1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$**. Tính giá trị của A khi x = 36**

2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4}\right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ **(với** $x \geq 0; x \neq 16$**)**

3) Với các của biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị của x nguyên để giá trị của biểu thức B(A – 1) là số nguyên

HƯỚNG DẪN GIẢI:

1) Với x = 36 (Thỏa mãn x >= 0), Ta có : A = $\frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

2) Với x $\geq$ 0, x $\neq$ 16 ta có :B = $\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16}\right)\frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$

3) Ta có: $B(A-1)=\frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.\left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}-1\right)=\frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.\frac{2}{\sqrt{x}+2}=\frac{2}{x-16}$.

Để $B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà Ư(2) $=\{\pm1;\pm2\}$

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$x-16$	1	-1	2	-2
x	17	15	18	14

Kết hợp ĐK $x\ge0,\ x\ne16$, để $B(A-1)$ nguyên thì $x\in\{14;\ 15;\ 17;\ 18\}$

Bài 4: Cho biểu thức: $P=\frac{x}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})}-\frac{y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+1)}-\frac{xy}{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{y})}$

a). Tìm điều kiện của x và y để P xác định . Rút gọn P.

b). Tìm x,y nguyên thỏa mãn phương trình P = 2.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a). Điều kiện để P xác định là :; $x\ge0$; $y\ge0$; $y\ne1$; $x+y\ne0$.

$$P=\frac{x(1+\sqrt{x})-y(1-\sqrt{y})-xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}=\frac{(x-y)+\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)-xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+1\right)+y\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+y-y\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{y}\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{y}\right)-\sqrt{y}\left(1-\sqrt{y}\right)}{\left(1-\sqrt{y}\right)}=\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}.$$

Vậy P = $\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}.$

b) ĐKXĐ: $x\ge0$; $y\ge0$; $y\ne1$; $x+y\ne0$

P = 2 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}.=2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right)-\left(\sqrt{y}+1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{y}\right)=1$$

Ta có: $1+\sqrt{y}\ge1\Rightarrow\sqrt{x}-1\le1\Leftrightarrow0\le x\le4\Rightarrow$ x = 0; 1; 2; 3 ; 4

Thay x = 0; 1; 2; 3; 4 vào ta cócác cặp giá trị x=4, y=0 và x=2, y=2 (thoả mãn).

Bài 5:Cho biểu thức M = $\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$

a. Tìm điều kiện của x để M có nghĩa và rút gọn M

b. Tìm x để M = 5

c. Tìm x $\in$ Z để M $\in$ Z.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

M = $\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$

a.ĐK $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$ 0,5đ

Rút gọn M = $\dfrac{2\sqrt{x}-9-\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)+\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

Biến đổi ta có kết quả: M = $\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$ M = $\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\Leftrightarrow M=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

b. . $M = 5\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}=5\Rightarrow \sqrt{x}+1=5\left(\sqrt{x}-3\right)\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=5\sqrt{x}-15\Leftrightarrow 16=4\sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{16}{4}=4\Rightarrow x=16$

Đối chiếu ĐK: $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$ Vậy x = 16 thì M = 5

c. M = $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3}=1+\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$

Do M $\in z$ nên $\sqrt{x}-3$ là ước của 4 $\Rightarrow$ $\sqrt{x}-3$ nhận các giá trị: -4; -2; -1; 1; 2; 4

Lập bảng giá trị ta được: $\Rightarrow x\in\{1;4;16;25;49\}$ vì $x\ne 4\Rightarrow x\in\{1;16;25;49\}$

Bài 6: Cho biểu thức P = $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2.\left(\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}\right)$ Với a > 0 và a ≠ 1

a) Rút gọn biểu thức P **b. Tìm a để P < 0**

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) P = $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2.\left(\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}\right)$ Với a > 0 và a ≠ 1

$P=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2.\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ $P=\left(\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}}\right)^2.\dfrac{(\sqrt{a}-1)^2-(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}$

$P=\left(\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)^2.\dfrac{a-2\sqrt{a}+1-a-2\sqrt{a}-1}{a-1}$ $P=\dfrac{-(a-1)4\sqrt{a}}{4a}=\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$

Vậy P = $\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$Víi a > 0 và a ≠ 1

b) Tìm a để P < 0Với a > 0 và a ≠ 1 nên $\sqrt{a} > 0$ $P = \frac{1 - a}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow 1 - a < 0 \Leftrightarrow a > 1$ (TMĐK)

Bài 7: Cho biểu thức: $Q = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$

a) Rút gọn Q **b. Xác định giá trị của Q khi a = 3b**

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Rút gọn: $Q = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$

$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a - b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{(\sqrt{a - b})^2}{\sqrt{(a - b)(a + b)}} = \frac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b}}$

b) Khi có a = 3b ta có: $Q = \frac{\sqrt{3b - b}}{\sqrt{3b + b}} = \sqrt{\frac{2b}{4b}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Bài 8: Cho biểu thức $A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3 y} + \sqrt{xy^3}}$

a) Rút gọn A;

b) Biết xy = 16. Tìm các giá trị của x, y để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Đkxđ : x > 0 , y > 0

a) $A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3 y} + \sqrt{xy^3}}$

$= \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{x + y}{xy}\right) : \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(x - \sqrt{xy} + y\right) + \sqrt{xy}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}$

$= \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{x + y}{xy}\right) : \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)(x + y)}{\sqrt{xy}(x + y)} = \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}.$

b) Ta có $\left(\sqrt{\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{\sqrt{xy}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}}.$

Do đó $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2\sqrt{\sqrt{xy}}}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{16}}}{\sqrt{16}} = 1$ (vì xy = 16)

Vậy min A = 1 khi $\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}\\ xy=16\end{cases} \Leftrightarrow x=y=4.$

Bài 9: Cho biểu thức: $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}\right)$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa. b) Rút gọn biểu thức P. c) Tính giá trị của P với $x=3-2\sqrt{2}$**.**

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a. Biểu thức P có nghĩa khi và chỉ khi : $\begin{cases}\sqrt{x}>0\\ \sqrt{x-1}\ge 0\\ \sqrt{2}-\sqrt{x}\ne 0\\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2}\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x\ge 1\\ x\ne 2\\ x\ne 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x\ne 2\\ x\ne 3\end{cases}$

b) Đkxđ : $x\ge 1; x\ne 2; x\ne 3$

$$P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}\right)$$

$$=\left[\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}-\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}\right]\left[\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}\right]$$

$$=\left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}-\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)-2}\right].\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-x+1}-\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}{x-3}\right).\frac{-\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)(-1)}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

c) Thay $x=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ vào biểu thức $P=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, ta có:

$$P=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}-\left|\sqrt{2}-1\right|}{\left|\sqrt{2}-1\right|}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

Bài 10: Cho biểu thức: **P =** $\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}+\frac{8x}{4-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

a) Rút gọn P b) Tìm giá trị của x để P = -1

c) Tìm m để với mọi giá trị x > 9 ta có: $m(\sqrt{x}-3)P>x+1$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Ta có: $x-2\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)$

- ĐKXĐ: $\begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} \ne 0 \\ 4 - x \ne 0 \\ \sqrt{x} - 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 4 \end{cases}$

- Với x > 0 và $x \ne 4$ ta có:

$$P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} - \frac{8x}{x-4}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-8x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})} = \frac{4x-8x-8x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{-4x-8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$ (Đk: $x \ne 9$)

$$= \frac{-4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} . \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{3-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-4\sqrt{x}.\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$$

Với x > 0 , $x \ne 4, x \ne 9$ thì P = $\frac{4x}{\sqrt{x}-3}$

b) P = - 1

$\Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = -1$ (ĐK: x > 0, $x \ne 4, x \ne 9$)

$\Leftrightarrow 4x = 3 - \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 4x - 3 - \sqrt{x} = 0$

Đặt $\sqrt{x} = y$ đk y > 0

Ta có phương trình: $4y^2 - y - 3 = 0$ Các hệ số: a + b + c = 4- 1-3 =0

$\Rightarrow y_1 = -1$ (không thoả mãn ĐKXĐ y > 0), $y_2 = \frac{3}{4}$ (thoả mãn ĐKXĐ y > 0)

Với $y = \frac{3}{4} = \sqrt{x}$ thì x = $\frac{9}{16}$ (thoả mãn đkxđ) **Vậy với x = $\frac{9}{16}$ thì P = - 1**

c) $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$ (đk: x > 0; $x \ne 4, x \ne 9$)

$$\Leftrightarrow m(\sqrt{x}-3)\frac{4x}{\sqrt{x}-3} > x+1 \Leftrightarrow m.4x > x+1 \Leftrightarrow m > \frac{x+1}{4x}$$

(Do 4x > 0)

- Xét $\frac{x+1}{4x} = \frac{x}{4x} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4x}$ Có x > 9 (Thoả mãn ĐKXĐ)

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{9}$ (Hai phân số dương cùng tử số, phân số nào có mẫu số lớn hơn thì nhỏ hơn)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4x} < \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} < \frac{1}{4} + \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} < \frac{5}{18}$$

Theo kết quả phần trên ta có : $\begin{cases} \frac{5}{18} > \frac{x+1}{4x} \\ m > \frac{x+1}{4x} \end{cases} \Rightarrow m \geq \frac{5}{18}$

Kết luận: Với $m \geq \frac{5}{18}, x > 9$ thì $m(\sqrt{x} - 3)P > x + 1$

C. MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Câu 1 Cho biểu thức :

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 . \frac{x^2 - 1}{2} - \sqrt{1 - x^2}$$

1) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa .
2) Rút gọn biểu thức A .
3) Giải phương trình theo x khi A = -2 .

Câu2 Cho biểu thức : $A = \left(\frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức .
b) Tính giá trị của $\sqrt{A}$ khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

Câu3 Cho biểu thức : $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A .
b) Coi A là hàm số của biến x vẽ đồ thi hàm số A .

Câu4 Cho biểu thức : A= $\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A .
b) Tính giá trị của A khi x = $7 + 4\sqrt{3}$
c) Với giá trị nào của x thì A đạt giá trị nhỏ nhất .

Câu 5 Cho biểu thức : A = $\left(\frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a}}\right) : \frac{a+2}{a-2}$

a. Tìm ĐKXĐ
b) Rút gọn biểu thức A
c) Tìm giá trị nguyên của a để A nguyên.

Câu 6 Cho biểu thức $P=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$

a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn P

b) Tìm giá trịn nguyên của x để $P-\sqrt{x}$ nhậ giá trị nguyên.

Câu 7 Cho $P=\left(1+\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\frac{a-\sqrt{a}}{-1+\sqrt{a}}\right)$; $a\geq 0, a\neq 1$

a) Rút gọn P.

b) Tìm a biết P > $-\sqrt{2}$.

c) Tìm a biết P = $\sqrt{a}$.

Câu 8 Cho $P=\frac{(1-2x)^2-16x^2}{1-4x^2}$; $x\neq \pm\frac{1}{2}$

a) Chứng minh $P=\frac{-2}{1-2x}$

b) Tính P khi $x=\frac{3}{2}$

2.Tính $Q=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{12}}$

Câu 9 Cho biểu thức $B=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{8\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của B khi $x=3+2\sqrt{2}$.

c) Chứng minh rằng $B\leq 1$ với mọi gía trị của x thỏa mãn $x\geq 0; x\neq 1$.

Câu 10 Cho $M=\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)$

a) Tìm TXĐ
b) Rút gọn biểu thức M.

c) Tính giá trị của M tại $a=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

Câu 11 Cho biểu thức: $A=\left(\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}+1\right)\cdot\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-1\right)$; $a\geq 0,\ a\neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm a ≥0 và a≠1 thoả mãn đẳng thức: A= $-a^2$

Câu 12 Cho biểu thức: $S=\left(\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}\right):\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}$; $x>0,\ y>0,\ x\neq y$.

1. Rút gọn biểu thức trên.
2. Tìm giá trị của x và y để S=1.

Câu 13 Cho biểu thức: $Q=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$; $x>0,\ x\neq 1$.

a. Chứng minh $Q=\frac{2}{x-1}$

b. Tìm số nguyên x lớn nhất để Q có giá trị là số nguyên.

Câu 14 Cho biểu thức: $A=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}\right)$; $x>0$, $x\neq 1,\ x\neq 4$.

1. Rút gọn A.
2. Tìm x để A = 0.

Câu 15 Rút gọn biểu thức: $A=\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+a}}+\frac{1}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a^3}-a}{\sqrt{a}-1}$; $a>1$.

Câu 16 Cho biểu thức: $T=\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$; $x>0,\ x\neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức T.
2. Chứng minh rằng với mọi $x>0$ và $x\neq 1$ luôn có T<1/3.

Câu 17 Cho biểu thức: $M=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}-\frac{1-(\sqrt{x})^3}{1+\sqrt{x}+x}$; $x\geq 0;\ x\neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức M.
2. Tìm x để $M\geq 2$.

Bài 18: Cho biểu thức :

$$A=\left(\sqrt{m+\frac{2mn}{1+n^2}}+\sqrt{m-\frac{2mn}{1+n^2}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\quad \text{với } m\geq 0\ ;\ n\geq 1$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A với $m=\sqrt{56+24\sqrt{5}}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 19: Cho biểu thức $P=\left[\frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}-\frac{a+\sqrt{a}}{a-1}\right]:\left(\frac{1}{\sqrt{a}+1}+\frac{1}{\sqrt{a}-1}\right)$

a) Rút gọn P.

b) Tìm a để $\frac{1}{P}-\frac{\sqrt{a}+1}{8}\geq 1$

Bài 20: Cho biểu thức $P=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$

a) Tìm ĐKXĐ và Rút gọn P

b) Tìm các giá trị nguyên của x để $P-\sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên.

VẤN ĐỀ 2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

A.1 Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

a. Phương trình bậc nhất hai ẩn

- Phương trình bậc nhất hai ẩn: ax + by = c với a, b, c $\in$ R ($a^2 + b^2 \neq 0$)
- Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn:
  Phương trình bậc nhât hai ẩn ax + by = c luôn luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng (d): ax + by = c

- Nếu a $\neq 0$, b $\neq 0$ thì đường thẳng (d) là đồ thị hàm số $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$
- Nếu a $\neq 0$, b = 0 thì phương trình trở thành ax = c hay x = c/a và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung
- Nếu a = 0, b $\neq 0$ thì phương trình trở thành by = c hay y = c/b và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành

b. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ trong đó a, b, c, a', b', c' $\in$ R
- Minh họa tập nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn
  Gọi (d): ax + by = c, (d'): a'x + b'y = c', khi đó ta có
  - ✓ (d) // (d') thì hệ vô nghiệm
  - ✓ (d) $\cap$(d') = $\{A\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất
  - ✓ (d) $\equiv$ (d') thì hệ có vô số nghiệm
- Hệ phương trình tương đương

Hệ hai phương trình tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm

c. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

- Quy tắc thế
- Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế
  - ✓ Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới trong đó có một phương trình một ẩn
  - ✓ Giải phương trình một ẩn vừa có rồi suy ra nghiệm của hệ

d. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

- Quy tắc cộng
- Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

- ✓ Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau
- ✓ áp dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (phương trình một ẩn)
- ✓ Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho

A.2 Hệ phương trình đưa về phương trình bậc hai

- Nếu hai số x và y thỏa mãn x + y = S, x.y = P (với $S^2 \geq 4P$) khi đó hai số x, y là nghiệm của phương trình: $x^2 + SX + P = 0$

A.3 Kiến thức bổ xung

1. Hệ phương trình đối xứng loại 1

a. Định nghĩa:

Hệ hai phương trình hai ẩn x và y được gọi là đối xứng loại 1 nếu ta đổi chỗ hai ẩn x và y đó thì từng phương trình của hệ không đổi

b. Cách giải

- Đặt S = x + y, P = x.y, Đk: $S^2 \geq 4P$
- Giải hệ để tìm S và P
- Với mỗi cặp (S, P) thì x và y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - St + P = 0$

c. Ví dụ

- Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+xy=7 \\ x^2+y^2+xy=13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+xy+1=0 \\ x^2+y^2-x-y=22 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy(x+1)(y+1)=12 \end{cases}$$

A.2 Hệ phương trình đối xứng loại 2

d. Định nghĩa

Hệ hai phương trình hai ẩn x và y được gọi là đối xứng loại 2 nếu ta đổi chỗ hai ẩn x và y thì phương trình này trở thành phương trình kia và ngược lại

e. Cách giải

- Trừ vế theo vế hai phương trình trong hệ để được phương trình hai ẩn
- Biến đổi phương trình hai ẩn vừa tìm được thành phương trình tích
- Giải phương trình tích ở trên để biểu diễn x theo y (hoặc y theo x)
- Thế x bởi y (hoặc y bởi x) vào 1 trong 2 phương trình trong hệ để được phương trình một ẩn
- Giải phương trình một ẩn vừa tìm được ròi suy ra nghiệm của hệ

f. Ví dụ

- Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x=y^2-4y+5 \\ 2y=x^2-4x+5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3=13x-6y \\ y^3=13y-6x \end{cases}$$

A.3 Hệ phương trình đẳng cấp bậc 2

g. **Định nghĩa**

- Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai có dạng: $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0 \end{cases}$

h. Cách giải

- Xét xem x = 0 có là nghiệm của hệ phương trình không
- Nếu x $\neq$ 0, ta đặt y = tx rồi thay vào hai phương trình trong hệ
- Khử x rồi giải hệ tìm t
- Thay y = tx vào một trong hai phương trình của hệ để được phương trình một ẩn (ẩn x)
- Giải phương trình một ẩn trên để tìm x từ đó suy ra y dựa vào y = tx

*** *Lưu ý:* ta có thể thay x bởi y và y bởi x trong phần trên để có cách giải tương tự**

i. Ví dụ

Giải hệ phương trình

$\begin{cases} x^2-4xy+y^2=1 \\ y^2-3xy=4 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3 \\ x^2+2xy-2y^2=6 \end{cases}$

B. MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI:

Bài 1: Giải hệ phương trình:a. $\begin{cases} \dfrac{6x-3}{y-1}-\dfrac{2y}{x+1}=5 \\ \dfrac{4x-2}{y-1}-\dfrac{4y}{x+1}=2 \end{cases}$

+/ Đặt $u=\dfrac{2x-1}{y-1}, v=\dfrac{y}{x+1}$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} 3u-2v=5 \\ 2u-4v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

+/ Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{y-1}=2 \\ \dfrac{y}{x+1}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=-1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ Vậy $S=\left\{\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

b. $\begin{cases} x(y-2)=(x+2)(y-4) \\ (x-3)(2y+7)=(2x-7)(y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-2x=xy+2y-4x-8 \\ 2xy-6y+7x-21=2xy-7y+6x-21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (-2; 2)

Bài 2: ***(2,0 điểm)*** ***a.*****Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+3y=4 \end{cases}$

b.Xác định các giá trị của m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$\begin{cases} (m+2)x+(m+1)y=3 \\ x+3y=4 \end{cases}$ **(m là tham số)**

HD Giải:

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x+6y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=5 \\ x+3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình có một nghiệm là: (1;1)

b) Hệ phương trình vô nghiệm khi:

$$\frac{m+2}{1}=\frac{m+1}{3}\neq\frac{3}{4}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{m+2}{1}=\dfrac{m+1}{3}\\ \dfrac{m+1}{3}\neq\dfrac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3m+6=m+1\\4m+4\neq 9\end{cases}\Rightarrow m=-\frac{5}{2}$$

Vậy m = -5/ 2 thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 3:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x-2y=1\\-x+3y=2\end{cases}$.

2. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=m-1\\3x+y=4m+1\end{cases}$ **có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện x + y > 1.**

Giải:

Bài 3: (1,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x-2y=1\\-x+3y=2\end{cases}.\Leftrightarrow\begin{cases}3(3y-2)-2y=1\\x=3y-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7y=7\\x=3y-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}$

2. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=m-1\\3x+y=4m+1\end{cases}$ có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện x + y > 1.

$\begin{cases}2x-y=m-1\\3x+y=4m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=5m\\2x-y=m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=m\\2m-y=m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=m\\y=m+1\end{cases}$

Mà x + y > 1 suy ra m + m + 1 > 1 $\Leftrightarrow$ 2m > 0 $\Leftrightarrow$ m > 0.

Vậy với m > 0 thì hệ phương trình có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện x + y > 1.

Bài 4. *(2,0 điểm)* Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\x+(m-2)y=2\end{cases}$, với $m\in R$

a. Giải hệ đã cho khi m = –3

b. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

HD Giải:

Bài 4.

a. Giải hệ đã cho khi m = –3

Ta được hệ phương trình $\begin{cases}-2x+2y=-12\\x-5y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=-6\\x-5y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ với $(7;1)$

b. Điều kiện có nghiệm duy nhất của hệ phương trình: $\dfrac{m+1}{1}\neq\dfrac{-(m+1)}{m-2}\Leftrightarrow(m+1)(m-2)\neq-(m+1)$

$\Leftrightarrow(m+1)(m-2)+(m+1)\neq 0\Leftrightarrow(m+1)(m-1)\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\neq 0\\m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -1\\m\neq 1\end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m\neq -1$ và $m\neq 1$

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\ x+(m-2)y=2\end{cases}$ khi $\begin{cases}m\neq -1\\ m\neq 1\end{cases}$

$$\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\ x+(m-2)y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\dfrac{4m}{m+1}\\ x+(m-2)y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+\dfrac{4m}{m+1}\\ y=\dfrac{-2}{m+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4m-2}{m+1}\\ y=\dfrac{-2}{m+1}\end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm (x; y) với $\left(\dfrac{4m-2}{m+1};\dfrac{-2}{m+1}\right)$

Bài 5 ***(2,0 điểm)***

Cho hệ phương trình: $\begin{cases}2x+y=5m-1\\ x-2y=2\end{cases}$ ***(m là tham số)***

a) Giải hệ phương trình với $m=1$

b) Tìm *m* để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ **thỏa mãn:** $x^2-2y^2=1$.

HD Giải:

a) *<u>1,0 điểm</u>*

Với *m = 1* ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2x+y=4\\ x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=8\\ x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=10\\ x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$

b) *<u>1,0 điểm</u>*

Giải hệ: $\begin{cases}2x+y=5m-1\\ x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=10m-2\\ x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=10m\\ x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2m\\ y=m-1\end{cases}$ Có: $x^2-2y^2=1\Leftrightarrow$

$(2m)^2-2(m-1)^2=1\Leftrightarrow 2m^2+4m-3=0$ Tìm được: $m=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}$ và $m=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$

B. MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các hệ phương trình

a. $\begin{cases}(x+2)(y-2)=xy\\ (x+4)(y-3)=xy+6\end{cases}$ b. $\begin{cases}(x-1)(y-2)-(x+1)(y-3)=4\\ (x-3)(y+1)-(x-3)(y-5)=18\end{cases}$ c. $\begin{cases}(x+5)(y-2)=xy\\ (x-5)(y+12)=xy\end{cases}$

d. $\begin{cases}\dfrac{2x-5y-1}{11}+\dfrac{x-2y}{3}=16\\ \dfrac{7x+y}{5}+\dfrac{2(x-1)}{3}=31\end{cases}$ e. $\begin{cases}\dfrac{9x}{7}-\dfrac{2y}{3}=-28\\ \dfrac{3x}{2}+\dfrac{12y}{5}=15\end{cases}$ f. $\begin{cases}x+y=\dfrac{4x-3}{5}\\ x+3y=\dfrac{15-9y}{14}\end{cases}$

g. $\begin{cases}\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}=10\\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=18\end{cases}$ h. $\begin{cases}\dfrac{4}{x+2y}-\dfrac{1}{x-2y}=1\\ \dfrac{20}{x+2y}+\dfrac{3}{x-2y}=1\end{cases}$ i. $\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=\dfrac{13}{36}\\ \dfrac{6}{\sqrt{x}}+\dfrac{10}{\sqrt{y}}=1\end{cases}$

k. $\begin{cases} \dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{5}{x-3y}=3 \\ \dfrac{1}{3x-y}+\dfrac{2}{x-3y}=\dfrac{3}{5} \end{cases}$ l. $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$ m. $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y-3}-\dfrac{2}{x-y-1}=8 \\ \dfrac{3}{x+y-3}+\dfrac{1}{x-y+1}=1,5 \end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình

a. $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1 \\ |x-1|+3y=3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \sqrt{x^2+10x+25}=x+5 \\ \sqrt{x^2-10x+25}=5-x \end{cases}$ c. $\begin{cases} |x-2|+2|y-1|=9 \\ x+|y-1|=-1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=6 \end{cases}$ e. $\begin{cases} x+y+xy+1=0 \\ x^2+y^2-x-y=22 \end{cases}$ f. $\begin{cases} x+y+xy=7 \\ x^2+y^2+xy=13 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+y=4 \end{cases}$ h. $\begin{cases} x^2+y^2=65 \\ (x-1)(y-1)=18 \end{cases}$ i. $\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ xy+x+y=5 \end{cases}$

k. $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=x^2+y^2 \end{cases}$ l. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=x^2+y^2 \end{cases}$ m. $\begin{cases} (x+1)(y+1)=10 \\ (x+y)(xy+1)=25 \end{cases}$

n. $\begin{cases} x+y=5 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$ p. $\begin{cases} x^3+y^3=2 \\ x^2y+xy^2=2 \end{cases}$ q. $\begin{cases} x^4+y^4=97 \\ xy(x^2+y^2)=78 \end{cases}$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Bài 1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x-y=-m \\ 9x-m^2y=-3\sqrt{3} \end{cases}$$

a. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình vô nghiệm
b. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có vô số nghiệm? Khi đó hãy tìm dạng tổng quát nghiệm của hệ phương trình
c. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Bài 2. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình

$\begin{cases} mx+y=4 \\ x-my=1 \end{cases}$ Có nghiệm thỏa mãn điều kiện $x+y=\dfrac{8}{m^2+1}$. Khi đó hãy tìm các giá trị của x và y.

Bài 3. Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình

$\begin{cases} 2mx+3y=m \\ x+y=m+1 \end{cases}$ Có nghiệm nguyên, tìm nghiệm nguyên đó.

Bài 4. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình đã cho bằng phương pháp đồ thị
b. Nghiệm của hệ phương trình đã cho có phải là nghiệm của phương trình 3x - 7y = - 8 không ?
c. Nghiệm của hệ phương trình đã cho có phải là nghiệm của phương trình 4,5x + 7,5y = 25 không ?

Bài 5. Cho hai đường thẳng (d_1): 2x - 3y = 8 và (d_2): 7x - 5y = -5
Tìm các giá trị của a để đường thẳng y = ax đi qua giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

Bài 6. Cho ba đường thẳng (d_1): y = 2x - 5 (d_2): y = 1 (d_3): y = (2m - 3)x -1
Tìm các giá trị của m để ba đường thẳng đồng quy

Bài 7. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+ay=2 \\ ax-2y=1 \end{cases}$

Tìm các giá trị của a để hệ phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn điều kiện x > 0, y < 0

Bài 8. Tìm các giá trị của a và b để đồ thị hàm số y = ax + b đi qua điểm A(-5; -3) và điểm B(3; 1)

Bài 9. Tìm các giá trị của m để

a. Hệ phương trình: $\begin{cases} mx-y=5 \\ 2x+3my=7 \end{cases}$ có nghiệm thỏa mãn điều kiện x > 0, y < 0

b. Hệ phương trình: $\begin{cases} mx+y=3 \\ 4x+my=6 \end{cases}$ có nghiệm thoả mãn điều kiện x > 1, y > 0

Bài 10. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=2m \\ x+my=m+1 \end{cases}$ Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm x, y là các số nguyên

Bài 11. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x+my=2m-1 \\ mx-y=m^2-2 \end{cases}$

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện xy đạt giá trị lớn nhất

Bài 12. Hãy tìm giá trị của m và n sao cho đa thức
$P(x) = mx^3 + (m + 1)x^2 - (4n + 3)x + 5n$ đồng thời chia hết cho (x - 1) và (x + 2).

Bài 13. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x-y=m+1 \\ x+(m-1)y=2 \end{cases}$

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện: S = x + y đạt giá trị lớn nhất

Bài 14. Cho hệ phương trình

$\begin{cases} mx+my=m \\ mx+y=2m \end{cases}$ m, n là các tham số

a. Giải và biện luận hệ phương trình
b. trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất hãy tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện x > 0, y < 0

Bài 15. Tìm a và b để hệ phương trình sau có nghiệmcó nghiệm với mọi giá trị của tham số m

$$\begin{cases} (m+3)x+4y=5a+3b+m \\ x+my=am-2b+3m-1 \end{cases}$$

Bài 16. Tìm tham số a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + a.x \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay \end{cases}$

Bài 17. Biết cặp số (x, y) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = m \\ y^2 + x^2 = -m^2 + 6 \end{cases}$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = xy + 2(x + y).

Bài 18. Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ y^2 + x^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$ Xác định giá trị của tham số a để hệ thỏa mãn tích xy nhỏ nhất.

Bài 19. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} xy = a^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{b} \end{cases}$

Giải và biện luận hệ phương trình biết rằng x, y là độ dài các cạnh của một hình chữ nhất.

Bài 20. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$

a. Giải và biện luận theo tham số m.
b. Tìm các số nguyên m để cho hệ có nghiệm duy nhất (x; y) với x, y là các số nguyên.

Bài 21. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 4 \\ mx + 4y = 10 - m \end{cases}$ (m là tham số).

a. Giải và biện luận theo m.
b. Với giá trị nào của số nguyên m, hệ có nghiệm (x; y) với x, y là các số nguyên dương.

Bài 22. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) mà S = x^2 + y^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 23 Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m+1)x + my = 2m - 1 \\ mx - y = m^2 - 2. \end{cases}$

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm (x; y) mà tích P = xy đạt giá trị lớn nhất.

Bài 24. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m \ \ +1. \end{cases}$

a. Giải hệ khi m = -1.
b. Tìm m để hệ có vô số nghiệm, trong đó có nghiệm: x = 1, y = 1.

Bài 25. Giải và biện luận hệ phương trình sau đây theo tham số m: $\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 3. \end{cases}$

Bài 26. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - 2y = 1. \end{cases}$

a. Giải hệ khi m = 2.
b. Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) mà x > 0 và y < 0.

c. Tìm số nguyên n để có nghiệm duy nhất (x; y) mà x, y là các số nguyên.

Bài 27. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3. \end{cases}$

a. Giải hệ khi m = - 3.
b. Giải và biện luận hệ đã cho theo m.

Bài 28. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = m \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ (m là tham số nguyên).

Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) mà x > 0, y < 0.

Bài 29. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5. \end{cases}$

a. Giải và biện luận hệ đã cho.
b. Tìm điều kiện của m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) thỏa mãn hệ thức: $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$.

Bài 30. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 2my = m + 1 \\ x + (m+1)y = 2. \end{cases}$

a. Chứng minh rằng nếu hệ có nghiệm duy nhất (x; y) thì điểm M(x; y) luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi m thay đổi.
b. Xác định m để M thuộc góc vuông phần tư thứ nhất.
c. Xác định m để M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Bài 31. Với giá trị nào của số nguyên m, hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m. \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x; y) với x; y là các số nguyên.

Bài 32. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 2y = 1. \end{cases}$

a. Giải và biện luận theo m.
b. Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) với x; y là các số nguyên.
c. Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x; y), điểm M(x; y) luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.
d. Xác định m để M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 33. Giải và biện các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ m(x+y) - 2y = 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x - 2y = m + 1 \\ x + y = 2 - m. \end{cases}$ c. $\begin{cases} x - my = 1 \\ x - y = m. \end{cases}$

Bài 34. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1. \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình lúc m = 1.
b. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số.

Bài 35. Cho hệ phương trình (m là tham số): $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + y = -m. \end{cases}$

a. Chứng tỏ lúc m = 1, hệ phương trình có vô số nghiệm.
b. Giải hệ lúc m khác 1.

Bài 36. Với giá trị nào của x, y, z; ta có đẳng thức sau:

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0.$$

Bài 37. Với giá trị nào của m, hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ mx - y = 3m - 4 \end{cases}$ có nghiệm?

Bài 38. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ 2xy + 1 = 2a \end{cases}$. Xác định a để hệ có hai nghiệm phân biệt. Tìm các nghiệm đó.

Bài 39. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = m \\ x + y = 8 \end{cases}$. Xác định m để hệ phương trình có nghiệm kép.

Bài 40. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = m \\ y^2 + x^2 = 1 \end{cases}$. Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

Bài 41. Cho x, y là hai số nguyên dương sao cho: $\begin{cases} xy + x + y = 71 \\ x^2y + xy^2 = 880 \end{cases}$. Tìm giá trị của biểu thức: $M = x^2 + y^2$.

Bài 42. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 3m - 1 \end{cases}$

a. Giải và biện luận hệ phương trình trên.
b. Không giải hệ phương trình, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

Bài 43. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ (a là tham số).

a. Giải hệ phương trình với a = 2. b.Giải và biện luận hệ phương trình.
c.Tìm giá trị nguyên của a để hệ phương trình có nghiệm nguyên.
d.Tìm giá trị của a để nghiệm của hệ thỏa mãn điều kiện x + y nhỏ nhất.

Bài 44. Lập phương trình đường thẳng đi qua gốc O và song song với AB biết:
A(-1; 1), B(-1; 3). ; A(1; 2), B(3; 2). ; A(1; 5), B(4; 3).

Bài 45. Cho ba điểm A(-1; 6), B(-4; 4), C(1; 1). Tìm tọa độ đỉnh D của hình bình hành ABCD.

Bài 46. Cho bốn điểm: A(0; -5), B(1; -2), C(2; 1), D(2,5; 2,5). Chứng minh rằng A, B, C, D thẳng hàng.

Bài 47. Cho bốn điểm A(1; 4), B(3; 5), C(6; 4), D(2; 2). Hãy xác định tứ giác ABCD là hình gì?

Bài 48. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau vô nghiệm, vô số nghiệm: $\begin{cases} 2(m+1)x + (m+2)y = m - 3 \\ (m+1)x + my = 3m + 7 \end{cases}$

Bài 49. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x + 2my + 2 = 0 \\ 2mx + (m-1)y - (m-1) = 0 \end{cases}$ (m là tham số).

a. Giải hệ phương trình trên.
b. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn x < 0, y < 0.

Bài 50. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x + y = 3m - 4 \\ x + (m-1)y = m \end{cases}$ (m là tham số)

a. Giải hệ phương trình.
b. Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm nguyên.

c. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm dương duy nhất.

Bài 51. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 3m - 1 \end{cases}$ (m là tham số)

a. Giải hệ phương trình.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện xy nhỏ nhất.

Bài 52. Tìm giá trị của a để hệ sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a + 1 \\ x + y = 4a \end{cases}$

Bài 53.

a. Tìm các giá trị nguyên của tham số a hoặc m để hệ phương trình có nghiệm là số dương, số âm.

$\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x + 5y = m \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

b. Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x + y = m \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ có nghiệm x > 0 và y < 0.

c. Với giá trị khác 0 nào của m thì hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$ có nghiệm thỏa mãn $x + y = 1 - \dfrac{m^2}{m^2 + 3}$

Bài 54.

1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} -a.x + y = 3 \\ |x + 1| + y = 2 \end{cases}$

   a. Giải hệ phương trình với a = 2.

   b. Tìm giá trị của a để hệ có nghiệm duy nhất.

2. Tìm các giá trị của a để hệ phương trình sau vô nghiệm

VẤN ĐỀ 3: HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ BẬC NHẤT – BẬC 2 (KHUYẾT)

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

I. Hàm số bậc nhất

a. Khái niệm hàm số bậc nhất

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức y = ax + b. Trong đó a, b là các số cho trước và a $\neq 0$

b. **Tính chất**Hàm số bậc nhất y = ax + b xác định với mọi giá trị của x thuộc R và có tính chất sau:

- Đồng biến trên R khi a > 0
- Nghịch biến trên R khi a < 0

c. Đồ thị của hàm số y = ax + b (a $\neq$ 0)

Đồ thị của hàm số y = ax + b (a $\neq$ 0) là một đường thẳng

- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b
- Song song với đường thẳng y = ax, nếu b $\neq$ 0, trùng với đường thẳng y = ax, nếu b = 0

* Cách vẽ đồ thị hàm số y = ax + b (a $\neq$ 0)

Bước 1. Cho x = 0 thì y = b ta được điểm P(0; b) thuộc trục tung Oy.

Cho y = 0 thì x = -b/a ta được điểm Q(-b/a; 0) thuộc trục hoành

Bước 2. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm P và Q ta được đồ thị hàm số y = ax + b

d. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng (d): y = ax + b (a $\neq$ 0) và (d’): y = a’x + b’ (a’$\neq$ 0). Khi đó

+ $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$ + $d' \cap d' = \{A\} \Leftrightarrow a \neq a'$ + $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$ + $d \perp d' \Leftrightarrow a.a' = -1$

e. Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b (a $\neq$ 0)

- Góc tạo bởi đường thẳng y = ax + b và trục Ox.

- Góc tạo bởi đường thẳng y = ax + b và trục Ox là góc tạo bởi tia Ax và tia AT, trong đó A là giao điểm của đường thẳng y = ax + b với trục Ox, T là điểm thuộc đường thẳng y = ax + b và có tung độ dương

- Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b

-Hệ số a trong y = ax + b được gọi là hệ số góc của đường thẳng y = ax +b

II. Hàm số bậc hai

a. **Định nghĩa** Hàm số có dạng y = ax^2 (a $\neq$ 0)

b. **Tính chất** Hàm số y = ax^2 (a $\neq$ 0) xác đinh với mọi giá trị của c thuộc R và:

+ Nếu a > 0 thì hàm số nghịch biến khi x < 0, đồng biến khi x > 0

+ Nếu a < 0 thì hàm số đồng biến khi x < 0, nghịch biến khi x > 0

c. Đồ thị của hàm số y = ax^2 (a $\neq$ 0)

- Đồ thị hàm số y = ax^2 (a $\neq$ 0) là một Parabol đi qua gốc tọa độ nhận trục Oy làm trục đối xứng

+ Nếu a > 0 thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị

+ Nếu a < 0 thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị

Kiến thức bổ sung: Công thức tính toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và độ dài đoạn thẳng

Cho hai điểm phân biệt A với B với A(x_1, y_1) và B(x_2, y_2). Khi đó

- Độ dài đoạn thẳng AB được tính bởi công thức $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Tọa độ trung điểm M của AB được tính bởi công thức

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Quan hệ giữa Parabol y = ax^2 (a $\neq$ 0) và đường thẳng y = mx + n (m $\neq$ 0)

Cho Parabol (P): y = ax^2 (a $\neq$ 0) và đường thẳng (d): y = mx + n. Khi đó

- Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = mx + n \end{cases}$
- Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình ax^2= mx + n (*)
- Số giao điểm của (P) và (d) là số nghiệm của phương trình (*)

+ Nếu (*) vô nghiệm thì (P) và (d) không có điểm chung

+ Nếu (*) có nghiệm kép thì (P) và (d) tiếp xúc nhau

+ Nếu (*) có hai nghiệm phân biệt thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Một số phép biến đổi đồ thị

Cho hàm số y = f(x) có đồ thị là (C)

- Đồ thị (C_1): y = f(x) + b được suy ra bằng cách tịnh tiến (C) dọc theo trục tung b đơn vị
- Đồ thị (C_2): y = f(x + a) được suy ra bằng cách tịnh tiến (C) dọc theo trục hoành –a đơn vị
- Đồ thị (C_3): y = f(|x|) gồm hai phần
  + Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy, bỏ phần (C) nằm bên trái Oy
  + Lấy đối xứng phần (C) nằm bên phải Oy qua Oy
- Đồ thị (C_4): y = |f(x)| gồm hai phần
  + Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên trên Ox, bỏ phần (C) nằm bên dưới Ox
  + Lấy đối xứng phần (C) nằm bên trên Ox qua Oy.

III. Tương quan đồ thị Hàm số bậc nhất – Hàm số bậc hai.

Cho Parabol (P): y = ax^2 ($a \neq 0$) và đường thẳng (d): y = mx + n. Khi đó:

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình $ax^2 = mx + n$ (*)

- Số giao điểm của (P) và (d) là số nghiệm của phương trình (*)

+ Nếu (*) vô nghiệm thì (P) và (d) không có điểm chung
+ Nếu (*) có nghiệm kép thì (P) và (d) tiếp xúc nhau
+ Nếu (*) có hai nghiệm phân biệt thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

B. MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI:

Bài tập 1: Trên cùng mặt phẳng toạ độ cho Parabol (P) $y = 2x^2$ và đường thẳng (d) y=(m-2)x+1 và (d')y=-x+3 (m là tham số) . Xác định m để (P) ,(d) và (d') có điểm chung .

Giải: Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d'):

$2x^2=-x+3 \Leftrightarrow 2x^2+x-3=0$ (a+b+c=0) $\quad \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{-3}{2}$

+Khi x=1 thì y=2

+Khi $x = \frac{-3}{2}$ thì $y = \frac{9}{2}$

Vậy (d') cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(1;2)\,\&\,B\left(\frac{-3}{2};\frac{9}{2}\right)$

Để (P) ,(d) và (d') có điểm chung thì $\left[\begin{array}{l} A \in d \\ B \in d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 = (m-2).1+1 \\ \frac{9}{2} = (m-2)(-\frac{3}{2})+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy với m=3 hay m=$\frac{-1}{3}$ thì (P) ,(d) và (d') có 1 điểm chung

Bài tập 2: Trong cùng mặt phẳng toạ độ , cho (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng (d) : y=mx+1 (m là tham số).Xác định m để :

a) (d) tiếp xúc (P) **b)(d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt .**

c) (d) và (P) không có điểm chung .

Giải :

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là : $x^2+mx+1=0$ (*)

$\Delta = m^2 - 4$

a) (d) tiếp xúc (P)khi phương trình (*) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$

b) (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$

c) (d) và (P) không có điểm chung khi (*) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \quad \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Bài tập 3: Cho (P) : $y = \frac{x^2}{2}$ **và (d) :** $y = (m-1)x + \frac{m+3}{2} (m \in R)$

Xác định m để (d) cắt (P)tại 2 điểm A(x_A; y_A) ; B(x_B; y_B) sao cho : $x^2_A + x^2_B \geq 10$

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)là :

$$\frac{x^2}{2} = (m-2)x + \frac{3+m}{2} (*) \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$$

$$\Delta' = m^2 - m + \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$$

Vậy phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt là x_A ; x_B

Theo Viét ta có :

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2(m-1) \\ x_A.x_B = -3 - m \end{cases} \quad Do x^2_A + x^2_B \geq 0 \Rightarrow (x_A + x_B)^2 - 2x_A.x_B \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 6m \geq 0 \Leftrightarrow 2m(m-3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 0; m \geq 3 \\ m \leq 0; m \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq 0 \end{array}\right.$$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq 0 \end{array}\right.$ thì (P) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt A;B

Bài tập 4: **Trong cùng mặt phẳng toạ độ , cho (P) :** $y = \frac{x^2}{2}$**, điểm M(0;2).**

Đường thẳng (D) đi qua M và không trùng với Oy . Chứng minh rằng (d) cắt (P)tại 2 điểm phân biệt sao cho $AOB = 90^\circ$

Giải:

- Vì (D) đi qua M(0;2) và không trùng với Oy nên có dạng y=ax+b

- $M \in (D)$ nên: 2=a.0+b $\Rightarrow$b=2 và (D): y=ax+2

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là : $\frac{x^2}{2} = ax + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2ax - 4 = 0(*)$

Vì phương trình (*) có hệ số a=1 ; c—4 (a.c<0) nên (*) có 2 nghiệm phân biệt

A(x_A; y_A) ; B(x_B; y_B) Theo hệ thức Viét ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = 2a \\ x_A.x_B = -4 \end{cases}$

$$\text{Vì } A\in(P)\Leftrightarrow y_A=\frac{x_A^2}{2}; B\in(P)\Leftrightarrow y_B=\frac{x_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow OA^2=\left(x_A-0\right)^2+\left(y_A-0\right)^2=x_A^2+\frac{x_A^4}{4}; OB^2=\left(x_B-0\right)^2+\left(y_B-0\right)^2=x_B^2+\frac{x_B^4}{4}$$

$$AB^2=\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2=\left(x_A-x_B\right)^2+\left(\frac{x_A^2}{2}-\frac{x_B^2}{2}\right)^2=x_A^2+x_B^2+\frac{x_A^4+x_B^4}{4}$$

$$\text{Ta có } OA^2+OB^2=x_A^2+x_B^2+\frac{x_A^4+x_B^4}{4} \text{ Vậy}: OA^2+OB^2=AB^2\Rightarrow \Delta AOB \text{ vuông tại O}$$

C. MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1. Cho hai hàm số: y = x và y = 3x

a. Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy
b. Đường thẳng song song với trục Ox, cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 6, cắt các đường thẳng: y = x và y = 3x lần lượt ở A và B. Tìm tọa độ các điểm A và B, tính chu vi, diện tích tam giác OAB

Bài 2: Cho hàm số y = - 2x và $y=\frac{1}{2}x$.

a. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của hai hàm số trên;
b. Qua điểm (0; 2) vẽ đường thẳng song song với trục Ox cắt đường thẳng $y=\frac{1}{2}x$ và y = - 2x lần lượt tại A và B. Chứng minh tam giác AOB là tam giác vuông và tính diện tích của tam giác đó.

Bài 3: Cho hàm số: y = (m + 4)x - m + 6 (d).

a. Tìm các giá trị của m để hàm số đồng biến, nghịch biến.
b. Tìm các giá trị của m, biết rằng đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1; 2). Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị tìm được của m.
c. Chứng minh rằng khi m thay đổi thì các đường thẳng (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4: Cho ba đường thẳng y = -x + 1, y = x + 1 và y = -1.

a. Vẽ ba đường thẳng đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.
b. Gọi giao điểm của đường thẳng y = -x + 1 và y = x + 1 là A, giao điểm của đường thẳng y = -1 với hai đường thẳng y = -x + 1 và y = x + 1 theo thứ tự là B và C. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.
c. Tam giác ABC là tam giác gì? Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 5: Cho đường thẳng (d): ;y = - 2x + 3.

a. Xác định tọa độ giao điểm A và B của đường thẳng d với hai trục Ox, Oy, tính khoảng cách từ điểm O(0; 0) đến đường thẳng d.
b. Tính khoảng cách từ điểm C(0; -2) đến đường thẳng d.

Bài 6: Tìm giá trị của k để ba đường thẳng: y = 2x + 7 (d_1), $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ (d_2), $y=-\frac{2}{k}x-\frac{1}{k}$ (d_3) đồng quy trong mặt phẳng tọa độ, tìn tọa độ giao điểm.

Bài 7: Cho hai đường thẳng: y = (m + 1)x - 3 và y = (2m - 1)x + 4.

a. Chứng minh rằng khi $m=-\frac{1}{2}$ thì hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.
b. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.

Bài 8: Xác định hàm số y = ax + b trong mỗi trường hợp sau:

a. Khi $a=\sqrt{3}$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\sqrt{3}$.

b. Khi a = - 5, đồ thị hàm số đi qua điểm A(- 2; 3).

c. Đồ thị hàm số đi qua hai điểm M(1; 3) và N(- 2; 6).

d. Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y=\sqrt{7}x$ và đi qua điểm $\left(1;7+\sqrt{7}\right)$.

Bài 9: Cho đường thẳng: y = 4x (d).

a. Viết phương trình đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d) và có tung độ gốc bằng 10.

b. Viết phương trình đường thẳng (d_2) vuông góc với đường thẳng (d) và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng – 8.

c. Viết phương trình đường thẳng (d_3) song song với đường thẳng (d) cắt trục Ox tại A, cắt trục Oy tại B và diện tích tam giác AOB bằng 8.

Bài 10: Cho hàm số: y = 2x + 2 (d_1) $y=-\frac{1}{2}x-2$ (d_2).

a. Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b. Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) với trục Oy là A, giao điểm của đường thẳng (d_2) với trục Ox là B, còn giao điểm của đường thẳng (d_1) và (d_2) là C. Tam giác ABC là tam giác gì? Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

c. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 11: Cho các hàm số sau: y = - x - 5 (d_1) ; $y=\frac{1}{4}x$ (d_2) ; y = 4x (d_3)

a. Vẽ đồ thị của các hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b. Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) với đường thẳng (d_2) và (d_3) lần lượt là A và B. Tìm tọa độ các điểm A, B.

c. Tam giác AOB là tam giác gì? Vì sao?

d. Tính diện tích tam giác AOB.

Bài 12: Cho hai đường thẳng: y = (k - 3)x - 3k + 3 (d_1) và y = (2k + 1)x + k + 5 (d_2).

Tìm các giá trị của k để:

a. (d_1) và (d_2) cắt nhau. b.(d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

c.(d_1) và (d_2) song song với nhau. d.(d_1) và (d_2) vuông góc với nhau.

e.(d_1) và (d_2) trùng nhau.

Bài 13: Cho hàm số bậc nhất: y = (m + 3)x + n (d).

Tìm các giá trị của m, n để đường thẳng (d):

a. Đi qua điểm A(1; - 3) và B(- 2; 3).

b. Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1-\sqrt{3}$, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $3+\sqrt{3}$.

c. Cắt đường thẳng 3y - x - 4 = 0.

d. Song song với đường thẳng 2x + 5y = - 1.

e. Trùng với đường thẳng y - 3x - 7 = 0.

Bài 14: Cho hàm số: $y = (m^2 - 6m + 12)x^2$.

a. Chứng tỏ rằng hàm số nghịch biến trong khoảng (-2005; 0), đồng biến trong khoảng (0; 2005).

b. Khi m = 2, hãy tìm x để y = 8; y = 2 và y = - 2.

c. Khi m = 5, hãy tìm giá trị của y, biết $x=1+\sqrt{2}$, $x=1-\sqrt{2}$ và $x=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.

Bài 15. Cho đường thẳng (d): y = (k - 2)x + q. Tìm các giá trị của k và q biết rằng đường thẳng (d) thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a. Đi qua điểm A(-1; 2) và B(3; 4)
b. Cắt trục tung tại điểm có tung độ $1-\sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $2+\sqrt{2}$
c. Cắt đường thẳng -2y + x - 3 = 0
d. Song song với đường thẳng 3x + 2y = 1

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): y = x^2/4 và đường thẳng (d): y = mx + n. Tìm các giá trị của m và n biết đường thẳng (d) thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a. Song song với đường thẳng y = x và tiếp xúc với (P)
b. Đi qua điểm A(1,5; -1) và tiếp xúc với (P).

Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (d) trong mỗi trường hợp trên.

Bài 17. Cho hàm số: $y=-\frac{1}{2}x^2$.

1. Vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
2. Trên (P) lấy hai điểm M và N lần lượt có hoành độ là - 2; 1. Viết phương trình đường thẳng MN.
3. Xác định hàm số y = ax + b biết rằng đồ thị (D) của nó song song với đường thẳng MN và chỉ cắt (P) tại 1 điểm.

Bài 18. Cho hàm số: y = x^2 và y = x + m (m là tham số).

1. Tìm m sao cho đồ thị (P) của hàm số y = x^2 và đồ thị (D) của y = x + m có hai giao điểm phân biệt A và B.
2. Tìm phương trình của đường thẳng (d) vuông góc với (D) và (d) tiếp xúc với (P).
3. a). Thiết lập công thức tính khoảng cách giữa hai điểm theo tọa độ của hai điểm ấy.

   b). áp dụng: Tìm m sao cho khoảng cách giữa hai điểm A, B (ở câu 1) là $3\sqrt{3}$.

Bài 19. Trong cùng hệ trục tọa độ gọi (P) là đồ thị hàm số y = ax^2 và (D) là đồ thị hàm số y = - x + m.

1. Tìm a biết rằng (P) đi qua A(2; -1) và vẽ (P) với a tìm được.
2. Tìm m sao cho (D) tiếp xúc với (P) (ở câu 1) và tìm tọa độ tiếp điểm.
1. Gọi B là giao điểm của (D) (ở câu 2) với tung độ. C là điểm đối xứng của A

Bài 20. Cho parabol (P): $y=\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (D) qua 2 điểm A và B trên (P) có hoành độ lần lượt là - 2 và 4.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
2. Viết phương trình của (D).
3. Tìm điểm M trên cung AB của (P) (tương ứng hoành độ) $x\in[-2;4]$ sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

Bài 21. Trong cùng hệ trục vuông góc, cho parabol (P): $y=-\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (D):

$$y = mx - 2m - 1.$$

1. Vẽ (P).
2. Tìm m sao cho (D) tiếp xúc với (P).
3. Chứng tỏ rằng (D) luôn luôn đi qua một điểm cố định A thuộc (P).

Bài 22. Trong cùng hệ trục vuông góc có parabol (P): $y=\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (D) qua điểm $I(\frac{3}{2};-1)$ có hệ số góc m.

1. Vẽ (P) và viết phương trình của (D).
2. Tìm m sao cho (D) tiếp xúc với (P).
3. Tìm m sao cho (D) và (P) có hai điểm chung phân biệt.

Bài 23. Trong cùng hệ trục tọa độ cho parabol (P): $y=\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (D): $y=-\frac{1}{2}x+2$.

1. Vẽ (P) và (D).
2. Bằng phép toán, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (D).
3. Tìm tọa độ của điểm thuộc (P) sao cho tại đó đường tiếp tuyến của (P) song song với (D).

Bài 24. Cho họ đường thẳng có phương trình: mx + (2m - 1)y + 3 = 0 (1).

1. Viết phương trình đường thẳng đi qua A(2; 1).
2. Chứng minh rằng các đường thẳng trên luôn đi qua một điểm cố định M với mọi m. Tìm tọa độ của M.

Bài 25. Cho parabol (P): y = x^2 - 4x + 3.

1. Chứng minh đường thẳng y = 2x - 6 tiếp xúc với (P).
2. Giải bằng đồ thị bất phương trình: x^2 - 4x + 3 > 2x - 4.

Bài 26. Cho parabol $y=\frac{1}{2}x^2$ (P), điểm I(0; 2) và điểm M(m; 0) với m khác 0.

1. Vẽ (P).
2. Viết phương trình đường thẳng (D) đi qua hai điểm M, I.
3. Chứng minh rằng đường thẳng (D) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m khác 0.
4. Gọi H và K là hình chiếu của A và B lên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK là t. giác vuông.
5. Chứng minh rằng độ dài đoạn AB > 4 với mọi m khác 0.

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho parbol (P): $y=-\frac{1}{4}x^2$ và điểm I(0; -2). Gọi (D) là đường thẳng đi qua I và có hệ số góc m.

1. Vẽ đồ thị (P).
2. Chứng tỏ rằng với mọi m, (D) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm quỹ tích trung điểm M của AB.
3. Với giá trị nào của m thì AB ngắn nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 28. Cho hàm số y = x^2 có đồ thị (P) trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

1. Vẽ (P).
2. Gọi A và B là hai điểm nằm trên (P) lần lượt có hoành độ -1 và 2. Chứng minh rằng; tam giác OAB vuông.
3. Viết phương trình đường thẳng (D) song song với AB và tiếp xúc với (P).
4. Cho đường thẳng (d): y = mx + 1 (với m là tham số).
   a. Chứng minh rằng; (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.
   b. Tìm m sao cho (d) cắt đồ thị (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=11$. Vẽ (d) với m tìm được.

Bài 29. Cho hàm số: y = $2x^2$ (P).

1. Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

2. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho qua M có thể kẻ được hai đường thẳng vuông góc và cùng tiếp xúc với (P).

Bài 30. Trong cùng mặt phẳng tọa độ cho parabol (P): y = - x^2 + 4x - 3 và đường thẳng (D); 2y + 4x - 17 = 0.
1. Vẽ (P) và (D).
2. Tìm vị trí của A thuộc (P) và B thuộc (D) sao cho độ dài đoạn AB ngắn nhất.

Bài 31. Cho parabol (P): y = - x^2 + 6x - 5. Gọi (d) là đường thẳng đi qua A(3; 2) và có hệ số góc m.
1. Chứng tỏ rằng với mọi m, đường thẳng (d) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt B, C.
2. Xác định đường thẳng (d) sao cho độ dài đoạn BC đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 32. Cho parabol (P): $y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y=mx+\frac{1}{2}$.
1. Chứng minh rằng với mọi m, (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định.
2. Chứng minh rằng với mọi m, (d) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng MN.

Bài 33. Cho hai đường thẳng (d_1): y = (m^2 + 2m)x và (d_2): y = ax (a $\neq$ 0).
1. Định a để (d_2) đi qua A(3; -1).
2. Tìm các giá trị m để cho (d_1) vuông góc với (d_2) ở câu 1).

Bài 34. Cho hàm số: y = ax + b.
1. Tìm a và b cho biết đồ thị hàm số đi qua hai điểm M(- 1; 1) và N(2; 4). Vẽ đồ thị (d_1) của hàm số với a, b tìm được.
2. Xác định m để đồ thị hàm số y = (2m^2 – m)x + m^2 + m là một đường thẳng song song với (d_1). Vẽ (d_2) vừa tìm được.
3. Gọi A là điểm trên đường thẳng (d_1) có hoành độ x = 2. Tìm phương trình đường thẳng (d_3) đi qua A vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2). Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

Bài 35. Cho hàm số: y = mx - 2m - 1 (1) (m $\neq$ 0).
1. Xác định m để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O. Vẽ đồ thị (d_1) vừa tìm được.
2. Tính theo m tọa độ các giao điểm A, B của đồ thị hàm số (1) lần lượt với các trục Ox và Oy. Xác định m để tam giác AOB có diện tích bằng 2 (đ.v.d.t).
3. Chứng minh rằng đồ thị hàm số (1) luôn luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

Bài 36. Cho parabol (P): y = ax^2 và hai điểm A(2; 3), B(- 1; 0).
1. Tìm a biết rằng (P) đi qua điểm M(1; 2). Khảo sát và vẽ (P) với a tìm được.
2. Tìm phương trình đường thẳng AB rồi tìm giao điểm của đường thẳng này với (P) (ở câu 1).
3. Gọi C là giao điểm có hoành độ dương. Viết phương trình đường thẳng qua C và có với (P) một điểm chung duy nhất.

Bài 37:
1. Cho parabol (P): y = ax^2; cho biết A(1; -1) $\in$(P). Xác định a và vẽ (P) với a tìm được.
2. Biện luận số giao điểm của (P) với đường thẳng (d): y = 2mx - m + 2.
3. Chứng tỏ rằng, $I\left(\frac{1}{2};2\right)$ thuộc (d) với mọi m. Tìm phương trình các đường thẳng đi qua I và có với (P) điểm chung duy nhất.

Bài 38.
1. Khảo sát và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y=\frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (d): $y=x-\frac{1}{2}$.
2. Chứng minh rằng (d) là một tiếp tuyến của (P).

3. Biện luận số giao điểm của (P) và (d'): y = x - m bằng hai cách (đồ thị và phép toán).

Bài 39. Cho parabol (P): $y = ax^2$ và hai điểm A(- 2; - 5) và B(3; 5).

1. Viết phương trình đường thẳng AB. Xác định a để đường thẳng AB tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.
2. Khảo sát và vẽ đồ thị (P) với a vừa tìm được.
3. Một đường thẳng (D) di động luôn luôn vuông góc với AB và cắt (P) tại hai điểm M và N. Xác định vị trí của (D) để $MN = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài 40. Cho hàm số: $y = x^2 - 2x + m - 1$ có đồ thị (P).

1. Vẽ đồ thị (P) khi m = 1.
2. Xác định m để đồ thị (P) của hàm số tiếp xúc với trục hoành.
3. Xác định m để đồ thị (P) của hàm số cắt đường thẳng (d) có phương trình:

y = x + 1 tại hai điểm phân biệt.

Bài 41. Cho đường thẳng (D_1): y = mx - 3.
(D_2): y = 2mx + 1 - m.

1. Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy các đường thẳng (D_1) và (D_2) ứng với
m = 1. Tìm tọa độ giao điểm B của chúng. Qua O viết phương trình đường thẳng vuông góc với (D_1) tại A. Xác định A và tính diện tích tam giác AOB.
2. Chứng tỏ rằng các đường thẳng (D_1) và (D_2) đều đi qua những điểm cố định. Tìm tọa độ của điểm cố định.

Bài 42. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

(d_1): $y = \frac{3-m}{2}x + 2m - 3$ và (d_2): $y = -(m+2)x + \frac{1-2m}{3}$.

1. Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) đi qua các điểm cố định. Tìm tọa độ điểm cố định.
2. Viết phương trình các đường thẳng (d_1) và (d_2); cho biết (d_1) thẳng góc với (d_2).
3. Viết phương trình các đường thẳng (d_1) và (d_2); cho biết (d_1) song song với (d_2).

Bài 43. Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$.

1. Viết phương trình đường thẳng có hệ số góc m và đi qua điểm A trên trục hoành có hoành độ là 1, đường thẳng này gọi là (D).
2. Biện luận theo m số giao điểm của (P) và (D).
3. Viết phương trình đường thẳng (D) tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.
4. Trong trường hợp (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB.
5. Tìm trên (P) các điểm mà đường thẳng (D) không đi qua với mọi m.

Bài 44.

Cho parabol (P): $y = x^2 - 4x + 3$ và điểm A(2; 1). Gọi (D) là đường thẳng đi qua A và có hệ số góc m.

1. Chứng minh rằng (d) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M và N.
2. Xác định m để MN ngắn nhất.

VẤN ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

I. Định nghĩa : Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0$$

trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$

II. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai :

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

*) Nếu $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

*) Nếu $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

*) Nếu $\Delta < 0$ phương trình vô nghiệm.

III. Công thức nghiệm thu gọn : Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và $b = 2b'$

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

*) Nếu $\Delta' > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

*) Nếu $\Delta' = 0$ phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

*) Nếu $\Delta' < 0$ phương trình vô nghiệm.

IV. Hệ thức Vi - Et và ứng dụng :

1. Nếu x_1; x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

2. Muốn tìm hai số u và v, biết u + v = S, uv = P, ta giải phương trình :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

(Điều kiện để có u và v là $S^2-4P\ge 0$)

3. Nếu a + b + c = 0 thì phương trình $ax^2+bx+c=0(a\ne 0)$ có hai nghiệm :

$$x_1=1; x_2=\frac{c}{a}$$

Nếu a - b + c = 0 thì phương trình $ax^2+bx+c=0(a\ne 0)$ có hai nghiệm :

$$x_1=-1; x_2=-\frac{c}{a}$$

IV: Các bộ điều kiện để phương trình có nghiệm thỏa mãn đặc điểm cho trước:

Tìm điều kiện tổng quát để phương trình $ax^2+bx+c = 0$ ($a \ne 0$) có:

1. Có nghiệm (có hai nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta \ge 0$
2. Vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$
3. Nghiệm duy nhất (nghiệm kép, hai nghiệm bằng nhau) $\Leftrightarrow \Delta = 0$
4. Có hai nghiệm phân biệt (khác nhau) $\Leftrightarrow \Delta > 0$
5. Hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$ và $P > 0$
6. Hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \Delta > 0$ và $P < 0 \Leftrightarrow a.c < 0$
7. Hai nghiệm dương(lớn hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$; $S > 0$ và $P > 0$
8. Hai nghiệm âm(nhỏ hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$; $S < 0$ và $P > 0$
9. Hai nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$ và $S = 0$
10. Hai nghiệm nghịch đảo nhau $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$ và $P = 1$
11. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow a.c < 0$ và $S < 0$
12. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow a.c < 0$ và $S > 0$

B. MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI:

Bài 1. Giải các phương trình sau :

$a/\ 2x^2-8=0$

$b/\ 3x^2-5x=0$

$e/\ x^3+3x^2-2x-6=0$

$c/\ -2x^2+3x+5=0$

$d/\ x^4+3x^2-4=0$

$f/\ \dfrac{x+2}{x-5}+3=\dfrac{6}{2-x}$

<u>Giải</u>

$a/\ 2x^2-8=0 \Leftrightarrow 2x^2=8 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ Vậy phương trình có nghiệm $x=\pm 2$

$b/\ 3x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(3x-5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$ Vậy phương trình có nghiệm $x=0; x=\dfrac{5}{3}$

$c/\ -2x^2+3x+5=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-5=0$

Nhẩm nghiệm :

Ta có : a - b + c = 2 + 3 - 5 = 0 => phương trình có nghiệm : $x_1=-1; x_2=-\dfrac{5}{-2}=\dfrac{5}{2}$

$d/\ x^4+3x^2-4=0$

Đặt $t=x^2 (t\ge 0)$. Ta có phương trình : $t^2+3t-4=0$

a + b + c = 1 + 3 - 4 = 0

=> phương trình có nghiệm : $t_1 = 1 > 0$ (thỏa mãn); $t_2 = -\frac{4}{1} = -4 < 0$ (loại)

Với: $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm 1$

$e/\ x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 3x^2) - (2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+3) - 2(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$ Vậy phương trình có nghiệm $x = -3; x = \pm\sqrt{2}$

$f/\ \frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$ (ĐKXĐ : $x \neq 2; x \neq 5$)

Phương trình : $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$

$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(2-x)}{(x-5)(2-x)} + \frac{3(x-5)(2-x)}{(x-5)(2-x)} = \frac{6(x-5)}{(x-5)(2-x)}$

$\Rightarrow (x+2)(2-x) + 3(x-5)(2-x) = 6(x-5)$

$\Leftrightarrow 4 - x^2 + 6x - 3x^2 - 30 + 15x = 6x - 30$

$\Leftrightarrow -4x^2 + 15x + 4 = 0$

$\Delta = 15^2 - 4.(-4).4 = 225 + 64 = 289 > 0; \sqrt{\Delta} = 17$

=> phương trình có hai nghiệm : $x_1 = \frac{-15+17}{2.(-4)} = -\frac{1}{4}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

$x_2 = \frac{-15-17}{2.(-4)} = 4$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Bài 2. Cho phương trình bậc hai ẩn x, tham số m : $x^2 + mx + m + 3 = 0$ **(1)**

a/ Giải phương trình với m = - 2.

b/ Gọi x_1; x_2 là các nghiệm của phương trình. Tính $x_1^2 + x_2^2; x_1^3 + x_2^3$ **theo m.**

c/ Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn : $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

d/ Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn : $2x_1 + 3x_2 = 5$.

e/ Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1 = -3$. Tính nghiệm còn lại.

f/ Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

g/ Lập hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào giá trị của m.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a/ Thay m = - 2 vào phương trình (1) ta có phương trình :

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy với m = - 2 phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

b/ Phương trình : $x^2 + mx + m + 3 = 0$ (1) Ta có: $\Delta = m^2 - 4(m+3) = m^2 - 4m - 12$

Phương trình có nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (a) \\ x_1x_2 = m+3 & (b) \end{cases}$

*) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-m)^2 - 2(m+3) = m^2 - 2m - 6$

*) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-m)^3 - 3(m+3)(-m) = -m^3 + 3m^2 + 9m$

c/ Theo phần b : Phương trình có nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2m - 6$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 6 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0$

$$\Delta'_{(m)} = (-1)^2 - 1.(-15) = 1 + 15 = 16 > 0; \sqrt{\Delta_{(m)}} = 4$$

=> phương trình có hai nghiệm : $m_1 = \dfrac{1+4}{1} = 5; m_2 = \dfrac{1-4}{1} = -3$

Thử lại : +) Với $m = 5 \Rightarrow \Delta = -7 < 0$ => loại.

+) Với $m = -3 \Rightarrow \Delta = 9 > 0$ => thỏa mãn.

Vậy với m = - 3 thì phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn : $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

d/ Theo phần b : Phương trình có nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (a) \\ x_1x_2 = m+3 & (b) \end{cases}$

Hệ thức : $2x_1 + 3x_2 = 5$ (c)

Từ (a) và (c) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -3m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = -m - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = 2m + 5 \end{cases}$$

Thay $\begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = 2m + 5 \end{cases}$ vào (b) ta có phương trình :

$$(-3m - 5)(2m + 5) = m + 3$$
$$\Leftrightarrow -6m^2 - 15m - 10m - 25 = m + 3$$
$$\Leftrightarrow -6m^2 - 26m - 28 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3m^2 + 13m + 14 = 0$$
$$\Delta_{(m)} = 13^2 - 4.3.14 = 1 > 0$$

=> phương trình có hai nghiệm phân biệt : $\begin{matrix} m_1 = \dfrac{-13+1}{2.3} = -2 \\ m_2 = \dfrac{-13-1}{2.3} = -\dfrac{7}{3} \end{matrix}$

Thử lại : +) Với $m = -2 \Rightarrow \Delta = 0$ => thỏa mãn.

+) Với $m = \dfrac{-7}{3} \Rightarrow \Delta = \dfrac{25}{9} > 0$ => thỏa mãn.

Vậy với $m = -2; m = -\dfrac{7}{3}$ phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn : $2x_1 + 3x_2 = 5$.

e/ Phương trình (1) có nghiệm $x_1 = -3 \Leftrightarrow (-3)^2 + m.(-3) + m + 3 = 0 \Leftrightarrow -2m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = 6$

Khi đó : $x_1 + x_2 = -m \Leftrightarrow x_2 = -m - x_1 \Leftrightarrow x_2 = -6 - (-3) \Leftrightarrow x_2 = -3$

Vậy với m = 6 thì phương trình có nghiệm $x_1 = x_2 = -3$.

f/ Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow 1.(m+3) < 0 \Leftrightarrow m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -3$

Vậy với m < - 3 thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.

g/ Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1; x_2. Khi đó theo định lí Vi-et, ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x_1 - x_2 \\ m = x_1x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = x_1x_2 - 3$$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1; x_2 không phụ thuộc vào m là: $x_1.x_2 + (x_1 + x_2) - 3 = 0$

Bài 3: **Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2x - 3 = 0$ (1) (tham số m)**

a) Tìm m để (1) có nghiệm

b) Tìm m để (1) có nghiệm duy nhất? tìm nghiệm duy nhất đó?

c) Tìm m để (1) có 1 nghiệm bằng 2? khi đó hãy tìm nghiệm còn lại(nếu có)?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) + Nếu m-1 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 1 thì (1) có dạng 2x - 3 = 0 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (là nghiệm)

+ Nếu m ≠ 1. Khi đó (1) là phương trình bậc hai có: $\Delta' = 1^2 - (-3)(m-1) = 3m-2$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 3m-2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$

+ Kết hợp hai trường hợp trên ta có: Với $m \geq \frac{2}{3}$ thì phương trình có nghiệm

b) + Nếu m-1 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 1 thì (1) có dạng 2x - 3 = 0 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (là nghiệm)

+ Nếu m ≠ 1. Khi đó (1) là phương trình bậc hai có: $\Delta' = 1 - (-3)(m-1) = 3m-2$

(1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 3m-2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$ (thoả mãn m ≠ 1)

Khi đó $x = -\frac{1}{m-1} = -\frac{1}{\frac{2}{3}-1} = 3$

+Vậy với m = 1 thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$

với $m = \frac{2}{3}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất x = 3

c) Do phương trình có nghiệm $x_1 = 2$ nên ta có:

$(m-1)2^2 + 2.2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$ Khi đó (1) là phương trình bậc hai (do $m - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} \neq 0$)

Theo đinh lí Viet ta có: $x_1.x_2 = \frac{-3}{m-1} = \frac{-3}{-\frac{1}{4}} = 12 \Rightarrow x_2 = 6$ Vậy m = $\frac{3}{4}$ và nghiệm còn lại là $x_2 = 6$

Bài 4: Cho phương trình: x^2 -2(m-1)x - 3 - m = 0

a) Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm

d) Tìm m sao cho nghiệm số x_1, x_2 của phương trình thoả mãn $x_1^2+x_2^2 \geq 10$.

e) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m

f) Hãy biểu thị x_1 qua x_2

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 - (-3-m) = \left(m-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$

Do $\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi m; $\frac{15}{4} > 0 \Rightarrow \Delta > 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt Hay phương trình luôn có hai nghiệm (đpcm)

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ a.c < 0 $\Leftrightarrow$ – 3 – m < 0 $\Leftrightarrow$ m > -3 Vậy m > -3

c) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm

Khi đó theo định lí Viet ta có: S = $x_1 + x_2$ = 2(m-1) và P = $x_1.x_2$ = - (m+3)

Khi đó phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow$ S < 0 và P > 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-1) < 0 \\ -(m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$$

Vậy m < -3

d) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm

Theo định lí Viet ta có: S = $x_1 + x_2$ = 2(m-1) và P = $x_1.x_2$ = - (m+3)

Khi đó A = $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m-1)^2+2(m+3) = 4m^2 - 6m + 10$

Theo bài A ≥ 10 $\Leftrightarrow 4m^2 - 6m \geq 0 \Leftrightarrow 2m(2m-3) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \geq 0 \\ 2m-3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq 0 \\ 2m-3 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq \frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \frac{3}{2} \\ m \leq 0 \end{array}\right.$$ Vậy m ≥ $\frac{3}{2}$ hoặc m ≤ 0

e) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm Theo định lí Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = -(m+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ 2x_1.x_2 = -2m-6 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$$

Vậy $x_1+x_2+2x_1x_2+8=0$ là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc m

f) Từ ý e) ta có: $x_1 + x_2+2x_1x_2 = -8 \Leftrightarrow x_1(1+2x_2) = -(8+x_2) \Leftrightarrow x_1 = -\dfrac{8+x_2}{1+2x_2}$ Vậy $x_1 = -\dfrac{8+x_2}{1+2x_2}$ $\left(x_2 \neq -\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 5: **Cho phương trình: $x^2 + 2x + m-1 = 0$ (m là tham số)**

a) Phương trình có hai nghiệm là nghịch đảo của nhau

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thoả mãn $3x_1+2x_2 = 1$

c) Lập phương trình ẩn y thoả mãn $y_1 = x_1 + \dfrac{1}{x_2}$; $y_2 = x_2 + \dfrac{1}{x_1}$ với x_1; x_2 là nghiệm của phương trình ở trên

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) Ta có $\Delta' = 1^2 - (m-1) = 2 - m$

Phương trình có hai nghiệm là nghịch đảo của nhau $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' \geq 0 \\ P = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-m \geq 0 \\ m-1 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \leq 2 \\ m = 2\end{cases} \Leftrightarrow m = 2$ Vậy m = 2

b) Ta có $\Delta' = 1^2 - (m-1) = 2 - m$ Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$ (*)

Khi đó theo định lí Viet ta có: $x_1+x_2 = -2$ (1); $x_1x_2 = m-1$ (2) Theo bài: $3x_1+2x_2 = 1$ (3)

Từ (1) và (3) ta có: $\begin{cases}x_1+x_2 = -2 \\ 3x_1+2x_2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1+2x_2 = -4 \\ 3x_1+2x_2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 5 \\ x_1+x_2 = -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 5 \\ x_2 = -7\end{cases}$

Thế vào (2) ta có: $5(-7) = m-1 \Leftrightarrow m = -34$ (thoả mãn (*)) Vậy m = -34 là giá trị cần tìm

d) Với $m \leq 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm

Theo định lí Viet ta có: $x_1+x_2 = -2$ (1) ; $x_1x_2 = m-1$ (2)

Khi đó: $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = x_1 + x_2 + \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} = -2 + \dfrac{-2}{m-1} = \dfrac{2m}{1-m}$ $(m\neq 1)$

$$y_1y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2} + 2 = m - 1 + \frac{1}{m-1} + 2 = \frac{m^2}{m-1} \quad (m\neq 1)$$

$\Rightarrow y_1$; y_2 là nghiệm của phương trình: $y^2 - \dfrac{2m}{1-m}.y + \dfrac{m^2}{m-1} = 0$ $(m\neq 1)$

Phương trình ẩn y cần lập là: $(m-1)y^2 + 2my + m^2 = 0$

C. MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1 Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ (1). Tìm tất cả các số nguyên m để phương trình (1) có nghiệm nguyên. *HDẫn : * m = 1 : -2x + 2 = 0* $\Leftrightarrow x = 1$

* $m \neq 1$: $m - 1 + (-2m) + m + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{m+1}{m-1} = 1 + \dfrac{2}{m-1}$

$\Rightarrow m - 1 = \pm 1; \pm 2 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 2; 3\}$

Bài 2: Cho phương trình $x^2 + (2m-5)x - 3n = 0$. Xác định m và n để phương trình có 2 nghiệm là 3 và -2.

HDẫn : $\begin{cases}6m - 3n = 6 \\ 4m + 3n = 14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = 2 \\ n = 2\end{cases}$

Bài 3: Tìm m, n để phương trình bậc hai sau đây có nghiệm duy nhất là $\frac{1}{2}$:$mx^2 + (mn + 1)x + n = 0$

HDẫn : $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 0 \\ \frac{m}{4} + (mn+1).\frac{1}{2} + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Bài 4: Cho hai phương trình : $x^2 - 3x + 2m + 6 = 0$ (1) và $x^2 + x - 2m - 10 = 0$ (2)

CMR : Với mọi *m*, ít nhất 1 trong 2 phương trình trên có nghiệm .

HDẫn : $\Delta_1 + \Delta_2 = 26 > 0 \Rightarrow$ *có 1 biệt số không âm .*

Bài 5: Cho hai phương trình : $x^2 + (m - 2)x + \frac{m}{4} = 0$ (1) và $4x^2 - 4(m - 3)x + 2m^2 - 11m + 13 = 0$ (2)

CMR với mọi *m*, ít nhất 1 trong 2 phương trình trên có nghiệm .

HDẫn : $\Delta_1 = (m-1)(m-4)$; $\Delta_2 = 16(1-m)(m-4)$

$\Delta_1.\Delta_2 = -16(m-1)^2(m-4)^2 \leq 0 \Rightarrow$ *có 1 biệt số không âm .*

Bài 6: Tìm giá trị của *m* để hai phương trình sau đây có ít nhất 1 nghiệm chung.

$x^2 + 2x + m = 0$ và $x^2 + mx + 2 = 0$

HDẫn : $(m - 2)x_0 = m - 2$: + *m* =2 : *hai phương trình có dạng :* $x^2 + 2x + 2 = 0$ *(vô nghiệm)*

$+ m \neq 2 : x_0 = 1 ; m = -3$

Bài 7: Tìm giá trị của *m* để hai phương trình sau đây có ít nhất 1 nghiệm chung.

$x^2 + (m - 2)x + 3 = 0$ và $2x^2 + mx + (m + 2) = 0$

HDẫn : $(m - 4)x_0 = m - 4$: + *m* = 4 : *hai phương trình có dạng :* $x^2 + 2x + 3 = 0$ *(vô nghiệm)*

$+ m \neq 4 : x_0 = 1 ; m = -2$

Bài 8 : Gọi x_1 và x_2 là những nghiệm của phương trình : $3x^2 - (3k - 2)x - (3k + 1) = 0$ (1)

Tìm những giá trị của k để các nghiệm của phương trình (1) thoả mãn : $3x_1 - 5x_2 = 6$

HDẫn : $*\Delta = (3k+4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow k \neq -\frac{4}{3}$ $\quad * \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = -\frac{32}{15} \end{array} \right.$ *(t/m)*

Bài 9 : Cho phương trình : $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0$. Xác định m để giữa hai nghiệm x_1, x_2 ta có hệ thức : $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$ *HDẫn :* $*\Delta = 4m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{4}$ $\quad * \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \frac{4}{3} \end{array} \right.$ *loại* $m = \frac{4}{3}$

Bài 10: Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m + 1 = 0$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của *m* để $x_1(1-2x_2) + x_2(1-2x_1) = m^2$

HDẫn : $*\Delta' = \left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

$* x_1(1-2x_2) + x_2(1-2x_1) = m^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 4x_1x_2 = m^2 \Leftrightarrow m(m+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \end{array} \right.$

Bài 11: Cho phương trình $x^2 - 2(m-3)x + 2m - 7 = 0$ (1)

Gọi hai nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2 . hãy tìm m để $\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}=m$

HDẫn : $*\Delta=(m-4)^2\geq 0$

$*\ \dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}=m \Leftrightarrow 2m^2-7m+2=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{7\pm\sqrt{33}}{4}$

<u>Bài 11</u>: Cho phương trình x^2 - ($2m$ + 1)x + m^2 + m = 0. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm thoả mãn: $-2<x_1<x_2<4$

HDẫn : $*\Delta=1>0$ $*\ x_1=m,\ x_2=m+1 \Rightarrow x_1<x_2$ *Do đó*: $\begin{cases}x_1>-2\\x_2<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\m<3\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<3$

<u>Bài 12</u>: Tìm các giá trị của tham số a sao cho phương trình: $x^2 + 2ax + 4 = 0$ (1) có các nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2\geq 3$

HDẫn : $*\Delta' = a^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a\leq -2\\a\geq 2\end{array}\right.$ $*\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2=\left(\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2-2\geq 3\Leftrightarrow\left[\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}\right]^2\geq 5$

$\Leftrightarrow\dfrac{4a^2-8}{4}\geq\sqrt{5}$ (*vì* $\left[\begin{array}{l}a\leq -2\\a\geq 2\end{array}\right.$ *nên* $4a^2 - 8 > 0$) $\Leftrightarrow a^2\geq 2+\sqrt{5}\Leftrightarrow |a|\geq\sqrt{2+\sqrt{5}}\,(t/m)$

<u>Bài 13</u>: Cho phương trình bậc hai $mx^2-(5m-2)x+6m-5=0$

1-Tìm m để phương trình có 2 nghiệm đối nhau. $m=\dfrac{2}{5}$)

2-Tìm m để phương trình có 2 nghiệm nghịch đảo nhau. $(m=1)$

<u>Bài 14</u>: Tìm giá trị m để phương trình:a) $2x^2 + mx + m - 3 = 0$ Có 2 nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương. ($0<m<3$)

b) $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$ Có 2 nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối. ($m = 1$)

<u>Bài 15</u>: Xác định m để phương trình $x^2 - (m + 1)x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5.

$$\left(\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\\x_1^2+x_2^2=5^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<3-\sqrt{8};m>3+\sqrt{8}\\m>-1\\m>0\\m=6;m=-4\end{cases}\Leftrightarrow m=6\right)$$

<u>Bài 16</u>: Số đo hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông là nghiệm của phương trình bậc hai :

$(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0$ .Hãy xác định giá trị của m để số đo đường cao ứngvới cạnh huyền là $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

HD GIẢI* $\left(\begin{cases}m\neq 2\\\Delta'\geq 0\\P>0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\m>2\end{array}\right.\right)$ $*\ \dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\Leftrightarrow m=4(t/m)$ *khi đó* $x_1 = 1; x_2 = 2$

<u>Bài 17</u>: Cho hai phương trình $x^2-(2m+n)x-3m=0$ (1) và $x^2-(m+3n)x-6=0$ (2)

Tìm m và n để các phương trình (1) và (2) tương đương.

H.DẪN *Phương trình (2) có ac = - 6<0 $\Rightarrow$(2) có 2 nghiệm phân biệt.*

$*\begin{cases}2m+n=m+3n\\3m=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$ ** Thử lại, rút kết luận.*

Bài 18: Tìm các giá trị của m và n để hai phương trình sau tương đương :

$x^2+(4m+3n)x-9=0$ (1) và $x^2+(3m+4n)x+3n=0$ (2)

H.DẪN *Phương trình (1) có ac = - 9<0 $\Rightarrow$(1) có 2 nghiệm phân biệt.*

$*\begin{cases}-(4m+3n)=-(3m+4n)\\-9=3n\end{cases}\Leftrightarrow m=n=-3$ ** Thử lại, rút kết luận.*

Bài 19: Cho phương trình $x^2-2mx+2m-1=0$. Tìm m sao cho A = $2(x^2_1+x^2_2)-5x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$*\Delta'=(m-1)^2\ge 0\quad *A=8m^2-18m+9=2\left(2m-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\ge-\frac{9}{8}\Rightarrow A_{\min}=-\frac{9}{8}\Leftrightarrow m=\frac{9}{8}$$

Bài 20: Cho phương trình $x^2-2(m-2)x-6m=0$ (1). Gọi x_1,x_2 là các nghiệm của phương trình (1) . Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^2_1+x^2_2$.HD* $\Delta'=(m+1)^2+3>0$ * $x^2_1+x^2_2=(2m-1)^2+15\ge 15\Rightarrow(x^2_1+x^2_2)_{\min}=15\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

Bài 21: Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m-4=0$ có hai nghiệm x_1,x_2.

Chứng minh rằng biểu thức H = $x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)$ không phụ thuộc vào m.

HƯỚNG DẪN: $*\Delta'=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0$ $*\ H=(x_1+x_2)-2x_1x_2=2(m+1)-2(m-4=10)$

Bài 22: Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m-3=0$ có hai nghiệm x_1,x_2.

Chứng minh rằng biểu thức Q = $x_1(2007-2006x_2)+x_2(2007-2008x_1)$ không phụ thuộc vào giá trị của m.

HƯỚNG DẪN: $*\Delta'=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$ $*\ Q=2007(x_1+x_2)-4014x_1x_2=2007(2m+2)-4014(m-3)=16056$

VẤN ĐỀ 5: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH , HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Phương pháp chung:

Bước 1: Gọi ẩn phù hợp, đơn vị tính, điều kiện cho ẩn nếu có.
Bước 2: Biểu đạt các đại lượng chưa biết thông qua ẩn và các đại lượng đã biết.
Bước 3: Lập phương trình hoặc hệ phương trình.
Bước 4: Giải phương trình, hệ phương trình lập được ở bước 3.
Bước 5: Đối chiếu điều kiện và kết luận.

B. MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN GIẢI:

Bài 1: Tìm vận tốc và chiều dài của 1 đoàn tàu hoả biết đoàn tàu ấy chạy ngang qua văn phòng ga từ đầu máy đến hết toa cuối cùng mất 7 giây . Cho biết sân ga dài 378m và thời gian kể từ khi đầu máy bắt đầu vào sân ga cho đến khi toa cuối cùng rời khỏi sân ga là 25 giây.

HD Giải:

+/ Gọi x (m/s)là vận tốc của đoàn tàu khi vào sân ga (x>0), Gọi y (m) là chiều dài của đoàn tàu (y>0)

+/ Tàu chạy ngang ga mất 7 giây nghĩa là với vận tốc x (m/s) tàu chạy quãng đường y(m) mất 7 giây.
Ta có phương trình : y=7x (1)
+/ Khi đầu máy bắt đầu vào sân ga dài 378m cho đến khi toa cuối cùng rời khỏi sân ga mất 25 giây nghĩa là với vận tốc x (m/s) tàu chạy quãng đường y+378(m) mất 25giây .
Ta có phương trình : y+378=25x (2)
+/ Kết hợp (1) và (2) ta được hệ phương trình : $\begin{cases} y = 7x \\ y+378=25x \end{cases}$
+/ Giải ra ta có : x=21 ; y= 147 (thoả ĐKBT)
Vậy vận tốc của đoàn tàu là 21m/s , Chiều dài của đoàn tàu là : 147m

Bài 2: Một chiếc thuyền xuôi, ngược dòng trên khúc sông dài 40km hết 4h30 phút . Biết thời gian thuyền xuôi dòng 5km bằng thời gian thuyền ngược dòng 4km . Tính vận tóc dòng nước ?

HD Giải:

+/ Gọi x (km/h)là vận tốc của thuyền khi nước yên lặng. Gọi y(km/h) là vật tốc dòng nước (x,y>0)
+/ Vì thời gian thuyền xuôi dòng 5km bằng thời gian thuyền ngược dòng 4km
nên ta có phương trình : $\frac{5}{x+y} = \frac{4}{x-y}$
+/ Vì chiếc thuyền xuôi, ngược dòng trên khúc sông dài 40km hết 4h30 phút (=$\frac{9}{2}$h)
nên ta có phương trình : $\frac{40}{x+y} + \frac{40}{x-y} = \frac{9}{2}$ Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{5}{x+y} = \frac{4}{x-y} \\ \frac{40}{x+y} + \frac{40}{x-y} = \frac{9}{2} \end{cases}$
+/ Giải ra ta có : x=18 ; y= 2, (TMĐK) Vậy vận tốc dòng nước là 2 km/h

Bài 3: Trên một đường tròn chu vi 1,2 m, ta lấy 1 điểm cố định A. Hai đim chuyển động M , N chạy trên đường tròn , cùng khởi hành từ A với vận tốc không đổi . Nếu chúng di chuyển trái chiều nhau thì chúng gặp nhau sau mỗi 15 giây. Nếu chúng di chuyển cùng chiều nhau thì điểm M sẽ vượt Nđúng 1 vòng sau 60 giây.Tìm vận tốc mỗi điểm M, N ?

HD Giải:

+/ Gọi x(m/s) là vận tốc của điểm M, Gọi y(m/s) là vận tốc của điểm N (x>y>0)
+/ Khi chúng di chuyển trái chiều nhau , chúng gặp nhau sau mỗi 15 giây nên ta có phương trình : 15x+15y=1,2 (1)
+/ Khi M,N di chuyển cùng chiều nhau thì điểm M sẽ vượt N đúng 1 vòng sau 60 giây
nên ta có phương trình : 60x-60y=1 (2)
Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 15x+15y=1,2 \\ 60x+60y=1 \end{cases}$ +/ Giải hệ phương trình ta có x=0,05 ;y= 0,03 (thoả ĐKBT)
Vậy vận tốc điểm M là : 0,05m/s và vận tốc điểm N là : 0,03m/s

Bài 4: ***Một chiếc môtô và ôtô cùng đi từ M đến K với vận tốc khác nhau .Vận tốc môtô là 62 km/h còn vận tốc ôtô là 55 km/h . Để 2 xe đến đích cùng 1 lúc người ta đã cho ôtô chạy trước 1 thời gian . Nhưng vì 1 lí do đặc biệt nên khi chạy được 2/3 quãng đường ôtô buộc phải chạy với vận tốc 27,5 km/h .Vì vậy khi còn cách K 124km thì môtô đuổi kịp ôtô . Tính khoảng cách từ M đến N .***

HD Giải:

+/ Gọi khoảng cách MK là x km , Gọi thời gian dự định ôtô đi trước môtô là y (giờ)

+/ Ta có : $\begin{cases} \dfrac{x}{62}+y=\dfrac{x}{55} \\ \dfrac{\frac{2}{3}x}{65}+\dfrac{\frac{x}{3}-124}{27,5}=y+\dfrac{x-124}{62} \end{cases}$ +/ Giải hệ này ta rút ra : x= 514km ; $y=1\frac{94}{1705}(h)$

Bài 5: Cho 3 vòi A,B,C cùng chảy vào 1 bể . Vòi A và B chảy đầy bể trong 71 phút Vòi A và C chảy đầy bể trong 63 phút .Vòi C và B chảy đầy bể trong 56 phút .

a. Mỗi vòi làm đầy bể trong bao lâu ? Cả 3 vòi cùng mở 1 lúc thì đầy bể trong bao lâu ?

b. Biết vòi C chảy 10lít ít hơn mỗi phút so với vòi A và B cùng chảy 1 lúc . Tính sức chứa của bể và sức chảy của mỗi vòi ?

HD Giải:

a) Vòi A làm đầy bể trong x phút (mỗi phút làm đầy 1/x bể)

Vòi B làm đầy bể trong y phút (mỗi phút làm đầy 1/y bể)

Vòi C làm đầy bể trong z phút (mỗi phút làm đầy 1/z bể)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 72\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1 \\ 63\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)=1 \\ 56\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}\right)=1 \end{cases}$ +/ Giải hệ phương trình ta được : x=168 ; y=126 ; z=504/5

Nếu 3 vòi cùng mở 1 lúc thì sau mỗi phút đầy $\frac{5+4+3}{504}=\frac{12}{504}$ bể, 3 vòi cùng làm đầy bể sau : $\frac{504}{12}=42$ phút

b)Gọi dung tích của bể là t phút thì mỗi phút vòi C chảy 5/504.t lít , vòi A và B chảy $(\frac{3}{504}+\frac{4}{504}).t$ lít .Theo đề bài ta có phương trình : $\frac{5}{504}t+10=\left(\frac{3}{504}+\frac{4}{504}\right)t \Rightarrow t=\frac{5040}{2}=2520(l)$

Sức chảy vòi A : $\frac{3.2520}{504}=15l/p$

Tương tự sức chảy vòi B : $\frac{4.2520}{504}=20l/p$ sức chảy vòi C : $\frac{5.2520}{504}=25l/p$

Bài 6: Nhân ngày 1/6 một phân đội thiếu niên được tặng một số kẹo .Số kẹo này được chia hết va chia đều cho các đội viên .Để đảm bảo nguyên tắc chia ấy , phân đội trưởng đề xuất cách nhận quà như sau:

Bạn thứ nhất nhận 1 cái kẹo và 1/11 số kẹo còn lại .Cứ tiếp tục như thế đến bạn cuối cùng thứ n nhận nhận n cái kẹo và .

Hỏi phân đội thiếu niên nói trên có bao nhiêu đội viên ? Mỗi đội viên nhận được bao nhiêu cái kẹo ?

HD Giải:

+/ Gọi số người trong phân đội là a Số kẹo trong phân đội được tặng là x (a,x>0)

+/ Người thứ nhất nhận được : $1+\frac{x-1}{11}$ (kẹo) Người thứ hai nhận được : $2+\frac{x-\left(2+1+\frac{x-1}{11}\right)}{11}$ (kẹo)

+/ Vì hai số kẹo bằng nhau và có a người nên ta có : $\begin{cases} 1+\dfrac{x-1}{11}=2+\dfrac{x-\left(2+1+\dfrac{x-1}{00}\right)}{11} \\ a(1+\dfrac{x-1}{11})=x \end{cases}$

+/ Giải hệ này ta được x=100 ; a=10

Bài 7: 12 người ăn 12 cái bánh .Mỗi người đàn ông ăn 2 chiếc , mỗi người đàn bà ăn 1/2 chiếc và mỗi em bé ăn 1/4 chiếc.Hỏi có bao nhiêu người đàn ông , đàn bà và trẻ em ?

HD Giải:

+/ Gọi số đàn ông , đàn bà và trẻ em lần lượt là x,y,z.(Đơn vị: Người, x,y,z là số nguyên dương và nhỏ hơn 12)

+/ Số bánh họ lần lượt ăn hết là : 2x ; y/2 ; z/4 (Bánh)

+/ Theo đề bài ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+2z=24(1) \\ 8x+2y+z=48(2) \end{cases}$

+/ Lấy (2) trừ (1) ta được : 6x-z=24 (3)

Vì x, z $\in Z^+$, 6x và 24 chia hết cho 6 , $\Rightarrow$z cũng chia hết cho 6 .Kết hợp với điều kiện 0<z<12 $\Rightarrow$z=6.

Thay z=6 vào (3) ta được x=5 , từ đó y=1

Vậy có 5 đàn ông , 1 đàn bà và 6 trẻ em

Bài 8: Một dung dịch chứa 30% axit nitơric (tính theo thể tích) và một dung dịch khác chứa 55% axit nitơric .Cần phải trộn thêm bao nhiêu lít dung dịch loại 1 và loại 2 để được 100lít dung dịch 50% axit nitơric?

HD Giải:

+/ Gọi x,y theo thứ tự là số lít dung dịch loại 1 và 2 (Đơn vị: Lít, x,y>0)

Lượng axit nitơric chứa trong dung dịch loại 1 là $\dfrac{30}{100}x$ và loại 2 là $\dfrac{55}{100}y$

+/ Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x+y=100 \\ \dfrac{30}{100}x+\dfrac{55}{100}y=50 \end{cases}$ +/ Giải hệ này ta được : x=20 ;y=80

Bài 9:**Hai người cùng làm chung một công việc trong $\dfrac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?**

HD Giải:

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành một mình xong công việc là x (giờ), ĐK $x>\dfrac{12}{5}$

Thì thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là x + 2 (giờ)

Mỗi giờ người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$(cv), người thứ hai làm được $\dfrac{1}{x+2}$(cv)

Vì cả hai người cùng làm xong công việc trong $\dfrac{12}{5}$ giờ nên mỗi giờ cả hai đội làm được $1:\dfrac{12}{5}=\dfrac{5}{12}$(cv)

Do đó ta có phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)}=\frac{5}{12} \Leftrightarrow 5x^2-14x-24=0 \qquad \Delta' = 49+120=169,\ \sqrt{\Delta'}=13$$

=> $x=\frac{7-13}{5}=\frac{-6}{5}$ (loại) và $x=\frac{7+13}{5}=\frac{20}{5}=4$ (TMĐK)Vậy người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ, người thứ hai làm xong công việc trong 4+2 = 6 giờ.

C. MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

DẠNG 1: LẬP PHƯƠNG TRÌNH:

Bài 1: Hai người đi xe đạp xuất phát cùng một lúc đi từ A đến B. Vận tốc của họ hơn kém nhau 3 km/h nên họ đến B sớm muộn hơn nhau 30phút. Tính vận tốc của mỗi người, biết quãng đường AB dài 30 km.

Bài 2: Một chiếc thuyền khởi hành từ một bến sông A. Sau 5h30p một ca nô đuổi theo và đuổi kịp thuyền tại một địa điểm cách bến sông A 20 km. Hỏi vận tốc của thuyền biết vận tốc của ca nô chạy nhanh hơn thuyền là 12km/h.

Bài 3: Hai người đi xe đạp khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A, B cách nhau 54 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2h. Tính vận tốc của hai người đó biết rằng vận tốc của người đi từ A bằng $\frac{4}{5}$ vận tốc của người đi từ B.

Bài 4: Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 50 km. Sau đó 1h30p, một người đi xe máy cũng đi từ A đến B và đến B trước người đi xe đạp 1h. Tính vận tốc của mỗi xe biết vận tốc của xe máy gấp 2,5 lần vận tốc xe đạp.

Bài 5: Một ôtô chuyển động đều với vận tốc đã định để đi hết quãng đường 120km. Đi được nửa quãng đường, xe nghỉ 3p nên để đến nơi đúng giờ xe đã phải tăng vận tốc thêm 6km/h trên nửa quãng đường còn lại. Tính thời gian xe lăn bánh trên đường.

Bài 6: Một người đi xe đạp từ A đến B trong một thời gian đã định. Khi còn cách B 30 km, người đó nhận thấy rằng sẽ đến B muộn nửa giờ nếu giữ nguyên vận tốc đạng đi, nhưng nếu tăng vận tốc thêm 5km/h thì sẽ đến B sớm nửa giờ. Tính vận tốc của xe trên quãng đường đi lúc đầu.

Bài 7: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 33 km với vận tốc xác định. Khi từ B trở về A người ấy đi bằng con đường khác dài hơn trước 29 km nhưng với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi 3km/h. Tính vận tốc lúc đi, biết thời gian về nhiều hơn thời gian đi 1h30p.

Bài 8: Hai bến sông A, B cách nhau 40 km. Cùng một lúc với ca nô xuôi bến từ bến A có một chiếc bè trôi từ bến A với vận tốc 3km/h. Sau khi đến bến B, ca nô trở về bến A ngay và gặp bè khi đã trôi được 8km. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng vận tốc riêng của ca nô không đổi.

Bài 9: Một ca nô chạy xuôi dòng từ bến A đến bến B, rồi lại chạy ngược dòng từ bến B trở về bến A mất tất cả 4h. tính vận tốc của canô khi nước yên lặng, biết quãng sông AB dài 30km và vận tốc của dòng nước là 4km/h.

Bài 10: Một hình chữ nhật có chu vi là 134m. nếu giảm mỗi kích thước của vườn đi 1m thì diện tích của vườn bằng diện tích của hình vuông có cạnh bằng 28m. Tính các kích thước của hình chữ nhật đó.

Bài 11: Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi là 48 cm. Người ta cắt bỏ mỗi góc một hình vuông có cạnh 2cm rồi gấp lên thành một hình hộp chữ nhật không có nắp có thể tích 96 cm^3. Tính các kích thước của hình chữ nhật ban đầu.

Bài 12: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34m, nếu tăng chiều dài 3m và tăng chiều rộng 2m thì diện tích tăng thêm 45m^2. Hãy tính chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lúc đầu.

Bài 13: Một tam giác vuông có chu vi là 30m, cạnh huyền 13 cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Bài 14: Một sân hình chữ nhật có diện tích là 240 m^2. Nếu tăng chiều rộng thêm 3m, giảm chiều dài 4m thì diện tích không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng.

Bài 15: Hai máy cày cùng cày một đám ruộng. Nếu cả hai máy cùng làm thì sẽ cày song trong 4 ngày. Nếu cày riêng thì máy 1 sẽ cày song nhanh hơn máy 2 là 6 ngày. Hỏi nếu cày riêng thì mỗi máy cày song đám ruộng sau bao nhiêu ngày.

Bài 16: Một tổ may mặc định may 600 áo trong thời gian đã định. Nhưng do cải tiến kỹ thuật nên năng suất tăng lên, mỗi ngày làm thêm 4 áo, nên thời gian sản xuất giảm 5 ngày. Hỏi mỗi ngày tổ dự định may bao nhiêu áo.

Bài 17: Một tổ may mặc định may 150 bộ quần áo trong thời gian đã định. Nhưng do cải tiến kỹ thuật nên năng suất tăng lên, mỗi ngày làm thêm 5 bộ quần áo, nên thời gian sản xuất giảm 1 ngày so với dự định. Hỏi mỗi ngày tổ dự định may bao nhiêu áo.

Bài 18: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 4h đầy bể. Nếu cho chảy riêng đầy bể thì vòi 1 cần ít thời gian hơn vòi 2 là 6h. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy đầy bể sau bao lâu.

Bài 19: Một tổ may mặc cố kế hoạch may 720 bộ quần áo theo năng xuất dự kiến. Thời gian làm theo năng xuất tăng 10 sản phẩm mỗi ngày kém 4 ngày so với thời gian làm theo năng xuất giảm đi 20 sản phẩm mỗi ngày (tăng, giảm so với năng xuất dự kiến). Tính năng xuất dự kiến.

DẠNG 2: LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH:

Bài 1: Để đi đoạn đường từ A đến B, một xe máy đã đi hết 3h20 phút, còn một ôtô chỉ đi hết 2h30phút. Tính chiều dài quãng đường AB biết rằng vận tốc của ôtô lớn hơn vận tốc xe máy 20km/h.

Bài 2: Có hai vòi nước, vòi 1 chảy đầy bể trong 1,5 giờ, vòi 2 chảy đầy bể trong 2 giờ. Người ta đã cho vòi 1 chảy trong một thời gian, rồi khóa lại và cho vòi 2 chảy tiếp, tổng cộng trong 1,8 giờ thì đầy bể. Hỏi mỗi vòi đã chảy trong bao lâu?

Bài 3: Một đám đất hình chữ nhật có chu vi 124m. Nếu tăng chiều dài 5m và chiều rộng 3m thì diện tích tăng thêm 225 m2. Tính kích thước của hình chữ nhật đó.

Bài 5: Hai người ở hai địa điểm A và B cách nhau 3,6 km, khởi hành cùng một lúc ngược chiều nhau và gặp nhau ở một điểm cách A là 2km. Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc nhưng người đi chậm hơn xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Tính vận tốc của mỗi người.

Bài 6: Hai đội công nhân cùng làm một đoạn đường trong 24 ngày thì xong. Mỗi ngày phần việc của đội A làm được nhiều gấp rưỡi đội B. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong đoạn đường đó trong bao lâu?

Bài 7: Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A. Sau đó 5h20' một chiếc cano chạy từ bến sông A đuổi theo và gặp chiếc thuyền tại một điểm cách bến A 20km. Hỏi vận tốc của thuyền, biết rằng cano chạy nhanh hơn thuyền 12km.

Bài 8: Một người đi xe đạp đi từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 30km. Khi từ B trở về A, người đó chọn con đường khác dễ đi hơn nhưng dài hơn con đường cũ 6km. Vì thế, khi đi về với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Bài 9: Một xí nghiệp có kế hoạch sản xuất 180 tấn dụng cụ trong một thời gian đã định. Nhưng nhờ tinh thần thi đua, nên mỗi ngày xí nghiệp sản xuất nhiều hơn mức dự kiến 1 tấn; chẳng những rút ngắn thời gian dự định 1 ngày mà còn sản xuất thêm 10 tấn ngoài kế hoạch. Hỏi thời gian dự kiến bao nhiêu ngày ? Mỗi ngày dự kiến làm ra bao nhiêu tấn dụng cụ ?

Bài 10: Một hội đồng thi có 390 thí sinh phân đều các phòng. Nếu xếp mỗi phòng thi thêm 4 thí sinh thì số phòng thi sẽ giảm đi 2 phòng. Hỏi lúc đầu mỗi phòng thi dự định xếp bao nhiêu thí sinh ?

Bài 11: Một hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 1cm. Nếu tăng thêm chiều dài ¼ của nó thì diện tích hình chữ nhật đó tăng thêm 3cm2. Tính diện tích hình chữ nhật ban đầu?

Bài 12: Một hình chữ nhật có chu vi là 180m. Nếu bớt mỗi chiều đi 5 mét thì diện tích chỉ còn 1276m2. Tìm độ dài mỗi chiều?Vận tốc điểm A hơn điểm B là 2,5cm/phút. Tìm vận tốc của mỗi điểm?
Tính các chiều của công viên?

Bài 13: Hai người đi xe đạp cùng khởi hành tại một địa điểm về hai hướng vuông góc với nhau. Sau 2 giờ họ cách nhau 60km theo đường chim bay. Tìm vận tốc của mỗi người. Biết rằng vận tốc của người này hơn vận tốc người kia là 6km/h.

Bài 14: Một xe gắn máy đi từ A đến B cách nhau 150km. Nếu mỗi giờ xe tăng thêm 10km thì đến B sớm hơn thời gian dự định là 30 phút. Tìm vận tốc ban đầu?

Bài 15: Hai tỉnh A và B cách nhau 42km. Một chiếc tàu đi từ tỉnh nọ đến tỉnh kia. Khi đi ngược dòng sông từ A tới B thì vận tốc của nó nhỏ hơn vận tốc lúc xuôi dòng là 4km/h. Tính vận tốc của chiếc tàu khi xuôi dòng và khi ngược dòng, biết rằng thời gian ngược dòng nhiều hơn thời gian xuôi dòng là 1 giờ 12 phút.

Bài 16: Một tàu thuỷ chạy trên một khúc sông dài 80km, cả đi lẫn về mất 8h20’. Tính vận tốc của tàu khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4km/h.

Bài 17: Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A. Sau đó 5h20’ một chiếc cano chạy từ bến sông A đuổi theo và gặp chiếc thuyền tại một điểm cách bến A 20km. Hỏi vận tốc của thuyền, biết rằng cano chạy nhanh hơn thuyền 12km.

Bài 18: Một người đi xe đạp đi từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 30km. Khi từ B trở về A, người đó chọn con đường khác dễ đi hơn nhưng dài hơn con đường cũ 6km. Vì thế, khi đi về với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

VẤN ĐỀ 6:
BẤT ĐẲNG THỨC – TÌM GIÁ TRỊ MIN–MAX CỦA BIỂU THỨC

Bài 1: $\forall$ x, y, z chứng minh rằng : a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$
c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Giải:

a) **Ta xét hiệu** $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right]\geq 0$ đúng với mọi x;y;z$\in R$ Vì $(x-y)^2 \geq 0$ với$\forall$x ; y Dấu bằng xảy ra khi x=y

$(x-z)^2 \geq 0$ với$\forall$x ; z Dấu bằng xảy ra khi x=z, $(y-z)^2 \geq 0$ với$\forall$ z; y Dấu bằng xảy ra khi z=y

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ Dấu bằng xảy ra khi x = y =z

b)Ta xét hiệu $x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y + z)^2 \geq 0$ đúng với mọi x;y;z$\in R$ Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi x;y;z$\in R$ Dấu bằng xảy ra khi x+y=z

c) **Xét hiệu** $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0$

Dấu(=)xảy ra khi x=y=z=1

Bài 2: chứng minh rằng : a) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

Giải

a) Ta xét hiệu $\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2(a^2+b^2)}{4} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab)$

$=\frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$ Vậy $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi a=b

b)Ta xét hiệu $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$

Vậy $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi a = b =c

Bài 3: Cho a, b, c, d,e là các số thực chứng minh rằng

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Giải:

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2a-b)^2 \geq 0$ (bất đẳng thức này luôn đúng)

Vậy $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ (dấu bằng xảy ra khi 2a=b)

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) > 2(ab + a + b) \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$ Bất đẳng thức cuối đúng.Vậy $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

Dấu bằng xảy ra khi a=b=1

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e) \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 4a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2c)^2 \geq 0$ Bất đẳng thức đúng vậy ta có điều phải chứng minh

Bài 4: Chứng minh rằng: $(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2) \geq (a^8+b^8)(a^4+b^4)$

Giải:

$(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2) \geq (a^8+b^8)(a^4+b^4) \Leftrightarrow a^{12}+a^{10}b^2+a^2b^{10}+b^{12} \geq a^{12}+a^8b^4+a^4b^8+b^{12}$

$\Leftrightarrow a^8b^2(a^2-b^2)+a^2b^8(b^2-a^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)(a^6-b^6) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4) \geq 0$

Bất đẳng thứccuối đúng vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 5: Cho x.y =1 và x.y Chứng minh $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$

Giải:

$\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$ vì :x $\rangle$ y nên x- y $\rangle$ 0 $\Rightarrow x^2+y^2 \geq 2\sqrt{2}(x-y)$

$\Rightarrow x^2+y^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-2xy \geq 0$ vì x.y=1 nên 2.x.y=2

$\Rightarrow (x-y-\sqrt{2})^2 \geq 0$ Điều này luôn luôn đúng . Vậy ta có điều phải chứng minh

- **Sử dụng một số bất đẳng thức cổ điển thông dụng:**

a) $x^2+y^2 \geq 2xy$ b) $x^2+y^2 \geq |xy|$ dấu(=) khi x = y = 0

c) $(x+y)^2 \geq 4xy$ d) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

2)Bất đẳng thức Cauchy (Cosi): $\frac{a_1+a_2+a_3+....+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2a_3....a_n}$ Với $a_i > 0$

3)Bất đẳng thức Bunhiacopski (BCS) $(a_2^2+a_2^2+....+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+....+_n^2) \geq (a_1x_1+a_2x_2+....+a_nx_n)^2$

4) Bất đẳng thức Trê- Bư-Sép:

Nếu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \leq B \leq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA+bB+cC}{3} \geq \frac{a+b+c}{3}.\frac{A+B+C}{3}$

Nếu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \geq B \geq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA+bB+cC}{3} \leq \frac{a+b+c}{3}.\frac{A+B+C}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=b=c \\ A=B=C \end{cases}$

Bài 6: Cho a, b ,c là các số không âm chứng minh rằng (a+b)(b+c)(c+a)$\geq$8abc

Giải:

Cách 1:Dùng bất đẳng thức phụ: $(x+y)^2 \geq 4xy$

Tacó $(a+b)^2 \geq 4ab$; $(b+c)^2 \geq 4bc$; $(c+a)^2 \geq 4ac$

$\Rightarrow (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 64a^2b^2c^2 = (8abc)^2$

$\Rightarrow$(a+b)(b+c)(c+a)$\geq$8abc

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

VËy $a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a) \geq 10$

Bài 7: Cho a>b>c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$ **chứng minh rằng** $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$

Giải:

Do a,b,c đối xứng ,giả sử $a \ge b \ge c$ $\Rightarrow \begin{cases} a^2 \ge b^2 \ge c^2 \\ \dfrac{a}{b+c} \ge \dfrac{b}{a+c} \ge \dfrac{c}{a+b} \end{cases}$

áp dụng BĐT Trê- bư-sép ta có

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{a+c}+\dfrac{c^3}{a+b} \ge \dfrac{1}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 8: Cho a,b,c,d>0 và abcd =1 .Chứng minh rằng :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a) \ge 10$$

Giải:

Ta có $a^2+b^2 \ge 2ab$ $c^2+d^2 \ge 2cd$

Do abcd =1 nên cd =$\dfrac{1}{ab}$ Ta có $a^2+b^2+c^2 \ge 2(ab+cd)=2(ab+\dfrac{1}{ab}) \ge 4$ (1)

Mặt khác: $a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)$ =(ab+cd)+(ac+bd)+(bc+ad)

$=\left(ab+\dfrac{1}{ab}\right)+\left(ac+\dfrac{1}{ac}\right)+\left(bc+\dfrac{1}{bc}\right) \ge 2+2+2=6$ (2) Cộng (1), (2) ta được điều cần chứng minh.

Bài 9: Cho 4 số a,b,c,d bất kỳ chứng minh rằng: $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

Giải:

Ta có: $(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+b^2+2(ac+bd)+c^2+d^2 \le (a^2+b^2)+2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2$

Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski Tacó ac+bd$\le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

Bài 10: Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$

Giải:

Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski Xét cặp số (1,1,1) và (a,b,c) ta có:

$$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \ge (1.a+1.b+1.c)^2$$

$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$$

Điều phải chứng minh Dấu bằng xảy ra khi a=b=c

Bài 11: Cho a,b,c,d > 0 .Chứng minh rằng $1<\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{b+c+d}+\dfrac{c}{c+d+a}+\dfrac{d}{d+a+b}<2$

Giải :

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có $\dfrac{a}{a+b+c}<1 \Rightarrow \dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a+d}{a+b+c+d}$ (1)

Mặt khác : $\dfrac{a}{a+b+c}>\dfrac{a}{a+b+c+d}$ (2) Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{a}{a+b+c+d}<\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a+d}{a+b+c+d}$ (3)

Tương tự ta có

$$\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{a+b+c+d} \quad (4)$$

$$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{b+c}{a+b+c+d} \qquad (5)$$

$$\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{a+b+c+d} \qquad (6)$$

cộng vế với vế của (3); (4); (5); (6) ta có

$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$ điều phải chứng minh

Bài 11: Cho a;b;clà số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng

a, $a^2+b^2+c^2< 2(ab+bc+ac)$

b, abc>(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)

Giải

a)Vì a,b,c là số đo 3 cạnh của một tam giác nên ta có

$$\begin{cases}0<a<b+c\\0<b<a+c\\0<c<a+b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2<a(b+c)\\b^2<b(a+c)\\c^2<c(a+b)\end{cases}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có

$$a^2+b^2+c^2< 2(ab+bc+ac)$$

b) Ta có a > | **b-c** | $\Rightarrow a^2>a^2-(b-c)^2>0$

b > | **a-c** | $\Rightarrow b^2>b^2-(c-a)^2>0$

c > | **a-b** | $\Rightarrow c^2>c^2-(a-b)^2>0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được

$$\Rightarrow a^2b^2c^2>\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]$$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2>(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$$

$$\Rightarrow abc>(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$$

Bài 12: Cho a,b,c > 0 Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ **(1)**

Giải :

Đặt x=b+c ; y=c+a ;z= a+b ta có a= $\frac{y+z-x}{2}$; b = $\frac{z+x-y}{2}$; c = $\frac{x+y-z}{2}$

ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\geq 3$$

$$\Leftrightarrow (\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})\geq 6$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì ($\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2$; $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2$; $\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geq 2$ nên ta có điều phải chứng minh

Bài 13: Cho a,b,c > 0 và a+b+c <1 Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9 \qquad \textbf{(1)}$$

Giải:

Đặt x = a^2+2bc ; y = b^2+2ac ; z = c^2+2ab

Ta có $x+y+z=(a+b+c)^2<1$ (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$ Với x+y+z < 1 và x ,y,z > 0

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $x+y+z\ge 3.\sqrt[3]{xyz}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3..\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

$\Rightarrow (x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$ Mà x+y+z < 1 Vậy $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$ (đpcm)

Bài 14: Cho x > y và xy =1 .Chứng minh rằng $\frac{(x^2+y^2)^2}{(x-y)^2}\ge 8$

Giải :

Ta có $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ (vì xy = 1) $\Rightarrow (x^2+y^2)^2=(x-y)^4+4.(x-y)^2+4$

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với $(x-y)^4+4(x-y)^2+4\ge 8.(x-y)^2$

$\Leftrightarrow (x-y)^4-4(x-y)^2+4\ge 0 \Leftrightarrow \left[(x-y)^2-2\right]^2\ge 0$ BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 15: Cho xy $\ge$ 1 .Chứng minh rằng $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy}$

Giải :

Ta có $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)+\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{xy-x^2}{(1+x^2).(1+xy)}+\frac{xy-y^2}{(1+y^2).(1+xy)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2).(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{(1+y^2).(1+xy)}\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2).(1+y^2).(1+xy)}\ge 0$ BĐT cuối này đúng do xy > 1 .Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 16: a. Cho a , b, c là các số thực và a + b +c =1 Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$

b. Cho a,b,c là các số dương Chứng minh rằng $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

Giải :

a. áp dụng BĐT BunhiaCôpski cho 3 số (1,1,1) và (a,b,c)

Ta có $(1.a+1.b+1.c)^2\le(1+1+1).(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow (a+b+c)^2\le 3.(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$ (vì a+b+c =1) (đpcm)

b. $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9 \Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1\geq 9 \Leftrightarrow 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 9$

áp dụng BĐT phụ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ Với x,y > 0 Ta có BĐT cuối cùng luôn đúng

Vậy $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ (đpcm)

Bài 17: Tìm giá trị nhỏ nhất của : T = |x-1| + |x-2| +|x-3| + |x-4|

Giải :

Ta có |x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| ≥ |x-1+4-x| = 3 (1)

Và $|x-2|+|x-3|=|x-2|+|3-x|\geq|x-2+3-x|=1$ (2)

Vậy T = |x-1| + |x-2| +|x-3| + |x-4| ≥ 1+3 = 4

Ta có từ (1) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $1\leq x\leq 4$

(2) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $2\leq x\leq 3$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4 khi $2\leq x\leq 3$

Bài 18: Tìm giá trị lớn nhất của S = xyz.(x+y).(y+z).(z+x) với x,y,z > 0 và x+y+z =1

Giải :

Vì x,y,z > 0 ,áp dụng BĐT Côsi ta có x+ y + z $\geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz}\leq\frac{1}{3}\Rightarrow xyz\leq\frac{1}{27}$

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho x+y ; y+z ; x+z ta có $(x+y).(y+z).(z+x)\geq 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(x+z)}$

$\Rightarrow 2\geq 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(z+x)}$ Dấu bằng xảy ra khi x=y=z=$\frac{1}{3}$

Vậy S ≤ $\frac{8}{27}.\frac{1}{27}=\frac{8}{729}$ Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi x=y=z=$\frac{1}{3}$

Bài 19:Cho xy+yz+zx = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4+y^4+z^4$

Giải :

áp dụng BĐTBunhiacốpski cho 6 số (x,y,z) ;(x,y,z)

Ta có $(xy+yz+zx)^2\leq(x^2+y^2+z^2)^2 \Rightarrow 1\leq(x^2+y^2+z^2)^2$ (1)

Ap dụng BĐT Bunhiacốpski cho (x^2,y^2,z^2) và (1,1,1)

Ta có $(x^2+y^2+z^2)^2\leq(1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4)\rightarrow(x^2+y^2+z^2)^2\leq 3(x^4+y^4+z^4)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1\leq 3(x^4+y^4+z^4) \Rightarrow x^4+y^4+z^4\leq\frac{1}{3}$

Vậy $x^4+y^4+z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi x=y=z=$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 20: Tìm các số nguyên x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+z^2\leq xy+3y+2z-3$

Giải :

Vì x,y,z là các số nguyên nên: $x^2+y^2+z^2 \le xy+3y+2z-3$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3\le 0 \Leftrightarrow \left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+\left(\frac{3y^2}{4}-3y+3\right)+\left(z^2-2z+1\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2\le 0 \qquad (*)$$

Mà $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2\ge 0 \quad \forall x,y\in R \quad \Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y}{2}-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Các số x,y,z phải tìm là $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

VẤN ĐỀ 7: HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

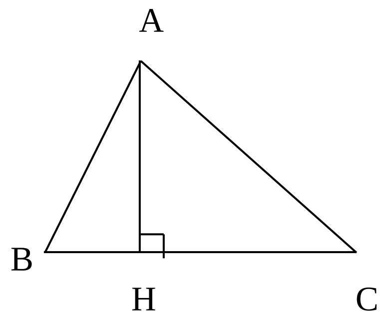
I. *HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG*

---***---

Phần I: Lý thuyết cần nhớ:

I. Một số hệ thức về **cạnh** và **đường cao** trong tam giác vuông.

Trong một tam giác vuông:



$a. AH^2 = BH.CH$

$\Rightarrow$**Bình phương đường cao** ứng với cạnh huyền **bằng tích hai hình chiếu** của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

$b. AH.BC = AB.AC$

$\Rightarrow$**Tích hai cạnh góc vuông bằng tích cạnh huyền với đường cao** tương ứng.

$c. AB^2 = BC.BH, AC^2 = BC.HC$

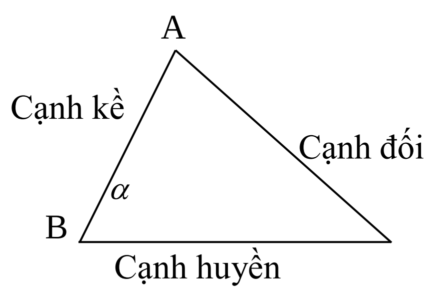
$\Rightarrow$**Bình phương mỗi cạnh góc vuông** bằng **tích của cạnh huyền với hình chiếu tương ứng** của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

$d. \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

$\Rightarrow$Nghịch đảo bình phương đường cao bằng tổng nghịch đảo bình phương hai cạnh góc vuông.

II. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông.

1. Các tỉ số lượng giác.



$Sin\alpha = \frac{AC}{BC}, Cos\alpha = \frac{AB}{BC}$

$\tan\alpha = \frac{AC}{AB}, Cot\alpha = \frac{AB}{AC}$

Mẹo nhớ: “Sin Đi – Học, Cos Không – Hư, tan Đoàn – Kết, Cot Kết – Đoàn”

2. Một số tính chất và đẳng thức lượng giác cần nhớ:

a. Với góc α nhọn ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) thì $0 < \sin\alpha, \cos\alpha < 1$

b. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ c. $\tan\alpha = \frac{1}{\cot g\alpha}, \cot\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow \tan\alpha.\cot\alpha = 1$

d. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ (Các bạn nhớ chỉ được lấy giá trị dương vì tuân theo tính chất a ở mục này)

e. Với góc α nhọn và $\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

f. $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ (Công thức này thầy đã chứng minh cho các bạn)

3. Mối quan hệ lượng giác của các góc phụ nhau.

Nếu $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì các giá trị lượng giác của α và β chéo nhau, tức là:

$$\sin\alpha = \cos\beta, \cos\alpha = \sin\beta, \tan\alpha = \cot\beta, \cot\alpha = \tan\beta$$

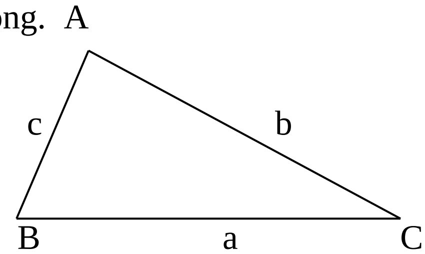
4. Hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông.

$b = a.\sin B = a.\cos C$

$c = a.\sin C = a.\cos B$

$b = c.\tan B = c.\cot C$

$c = b.\tan C = b.\cot B$



Vậy: Trong một tam giác vuông:

a. Độ dài một cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền với sin góc đối hoặc cos góc kề.

b. Độ dài một cạnh góc vuông bằng tích của cạnh góc vuông còn lại với tan góc đối hoặc cot góc kề.

Note: Giải tam giác là khái niệm của việc đi tính số đo của các góc nhọn, độ dài các cạnh của một tam giác vuông.

II. GÓC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Đường tròn:

1,*Định nghĩa:*

Tập hợp các điểm cách điểm 0 cho trước một khoảng cách R > 0 không đổi gọi là đường tròn tâm 0 bán kính R . Kí hiệu : (0 ; R)

2, *Vị trí tương đối:*

** Của một điểm với một đường tròn* :

xét (0 ; R) và điểm M bất kì

Vị trí tương đối	**Hệ thức**
M nằm ngoài (O ; R)	OM > R
M nằm trên(O ; R) hay M thuộc(O ; R)	OM = R
M nằm trong (O ; R)	OM < R

**** Vị trí của một đường thẳng với một đường tròn*** **:**

xét (O; R) và đường thẳng a bất kì (với d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a)

vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức
a cắt (O ; R)	2	d < R

a tiếp xúc (O ; R)	1	d = R
a và (O ; R) không giao nhau	0	d > R

** Của hai đường tròn :*

xét (O;R) và (O'; R') (với d = O O')

vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức
Hai đường tròn cắt nhau	2	R – r < d < R- r
Hai đường tròn tiếp xúc nhau : + tiếp xúc ngoài : + tiếp xúc trong :	1	d = R + r d = R – r
Haiđường tròn không giao nhau : +hai đường tròn ở ngoài nhau : +đường tròn lớn đựng đường tròn nhỏ :	0	d > R + r d < R -r

3 . *Tiếp tuyến của đường tròn* :

a. *Định nghĩa* :

đường thẳng d được gọi là tiếp tuyến của một đường tròn nếu nó chỉ có một điểm chung với đường đó .

b, *Tính chất* :

+ Tính chất 1 : Nếu một đường thẳng là một tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm .

+ Tính chất 2 : Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì giao điểm này cách đều hai tiếp điểm và tia kẻ từ giao điểm đó qua tâm đường tròn là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến .

c, *Cách chứng minh* :

- Cách 1 : chứng minh đường thẳng đó có một điểm chung với đường tròn đó .
- Cách 2 : chứng minh đường thẳng đó vuông góc với bán kính của đường tròn đó tại một điểm và điểm đó thuộc đường tròn .

4 . *Quan hệ giữa đường kính và dây cung* :

* Định lí 1 : Đường kính vuông góc với một dây cung thì chia dây cung ấy ra thành hai phần bằng nhau .

* Định lí 2 : Đường kính đI qua trung điểm của một dây cung không đi qua tâm thì vuông góc với dây cung ấy.

5 . *Quan hệ giữa dây cung và khoảng cách đến tâm* :

* Định lí 1 : Trong một đường tròn hai dây cung bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm .

* Định lí 2 : Trong hai dây cung không bằng nhau của một đường tròn, dây cung lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn .

Góc trong đường tròn:

1, *Các loại góc trong đường tròn*:

- Góc ở tâm
- Góc nội tiếp
- Góc có đỉnh ở bên trong hay bên ngoài đường tròn
- Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

2, *Mối quan hệ giữa cung và dây cung:*

* Định lí 1: Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn:

a, Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau

b, Đảo lại, hai dây bằng nhau trương hai cung bằng nhau.

* Định lí 2: Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn:

a, Cung lớn hơn căng dây lớn hơn

b, Dây lớn hơn trương cung lớn hơn.

3, *Tứ giác nội tiếp*: a, *Định nghĩa*:

Tứ giác nội tiếp một đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn . Đương tròn đó được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

b, *Cách chứng minh* :

* Cách 1: chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng thuộc một đường tròn

* Cách 2: chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180^0

* Cách 3: chứng minh tứ giác có hai đỉnh kề nhau nhìn cạnh đối diện dưới cùng một góc.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN.

1, *Các vị trí tương đối:*

a. *Vị trí tương đối của hai đường thẳng*:

* a // b $\Leftrightarrow$ a , b $\subset$ (P), a và b không có điểm chung.

* a cắt b $\Leftrightarrow$ a , b $\subset$ (P), a và b có một điểm chung.

* a và b chéo nhau $\Leftrightarrow$ a và b không cùng thuộc một mặt phẳng.

b. *Vị trí tương đối của đường thẳng a và mặt phẳng (*P):

* a // (P) $\Leftrightarrow$ a và (P) không có điểm chung.

* a cắt (P) $\Leftrightarrow$ a và (P) có một điểm chung.

* a $\subset$ (P) $\Leftrightarrow$ a và (P) có vô số điểm chung.

c. *Vị trí tương đối của hai mặt phẳng (P) và (Q):*

* (P) // (Q) $\Leftrightarrow$ không có điểm chung.

* (P) $\cap$ (Q) = a $\Leftrightarrow$ có một đường thẳng a chung (a gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng).

* (P) $\equiv$ (Q).

2. *Một số cách chứng minh*:

a. *Chứng minh hai đường thẳng song song*:

C_1: a và b cùng thuộc một mặt phẳng.

a và b không có điểm chung.

C_2: a // c và b // c.

C_3 : $\left.\begin{array}{r}(P)//(Q)\\(P)\cap(R)=a\\(Q)\cap(R)=b\end{array}\right\}\Rightarrow a//b$

b. *Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng*: $\left.\begin{array}{r}a//b\\b\subset(P)\end{array}\right\}\Rightarrow a//(P)$

c. *Chứng minh hai mặt phẳng song song*: $\left.\begin{array}{r}a,b\subset(Q),aXb\\a//(P),b//(P)\end{array}\right\}\Rightarrow(P)//(Q)$

d. *Chứng minh hai đường thẳng vuông góc:* $\left.\begin{array}{r}a\perp(P)\\b\subset(P)\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp b$

e. *Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:* $\left.\begin{array}{r}a\perp b,a\perp c\\bXc,b\subset(P),c\subset(P)\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(P)$

g. *Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc:* $\left.\begin{array}{r}a\perp(P)\\a\subset(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow(P)\perp(Q)$

Một số hình không gian:

1. *Hình lăng trụ*: S_{xq} = P . h với P: chu vi đáy h : chiều cao V = B h B: diện tích đáy	1. *Hình trụ:* S_{xq} = P.h = 2πR.h với R: bán kính đáy V = B.h = πR^2.h h: chiều cao.
2. *Hình chóp*: $S_{xq} = \frac{1}{2}P.d$ $V = \frac{1}{3}B.h$ với d: đường cao mặt bên	2. *Hình nón*: $S_{xq} = \frac{1}{2}P.d = \pi R.l$ $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}\pi R^2.h$ d: đường sinh; h: chiều cao.
3. *Hình chóp cụt*: $S_{xq} = \frac{1}{2}(P+P').d$ $V = \frac{1}{3}\left(B+B'+\sqrt{B.B'}\right)h$	3. *Hình nón cụt*: $S_{xq} = \frac{1}{2}(P+P').d = \pi(R+r)d$ $V = \frac{1}{3}\left(B+B'+\sqrt{B.B'}\right)h = \frac{\pi.h}{3}\left(R^2+r^2+R.r\right)$
4. *Hình cầu:* $S = 4\pi R^2, V = \frac{4}{3}\pi R^3$	

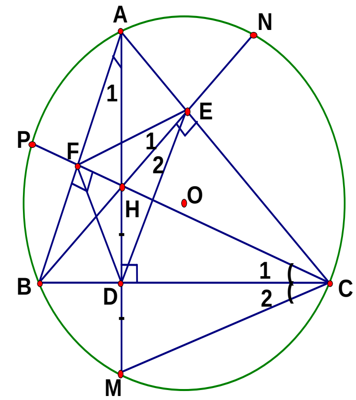
B. MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI.

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N,P.

Chứng minh rằng:

1. **Tứ giác CEHD, nội tiếp .**
2. **Bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.**
3. **AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.**
4. **H và M đối xứng nhau qua BC. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF**

HD GIẢI:



1. XÐt tø gi¸c CEHD ta cã:

∠ CEH = 90^0 ,∠ CDH = 90^0 (V× BE, AD lµ ®êng cao)

=> ∠ CEH + ∠ CDH = 180^0

Mµ ∠ CEH vµ ∠ CDH lµ hai gãc ®èi cña tø gi¸c CEHD , Do ®ã CEHD lµ tø gi¸c néi tiÕp

2. Theo gi¶ thiÕt: BE lµ ®êng cao => BE ⊥ AC

=> ∠BEC = 90^0.

CF lµ ®êng cao => CF ⊥ AB => ∠BFC = 90^0.

Nh vËy E vµ F cïng nh×n BC díi mét gãc 90^0 => E vµ F cïng n»m trªn ®êng trßn ®êng kÝnh BC.

VËy bèn ®iÓm B,C,E,F cïng n»m trªn mét ®êng trßn.

3. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: ∠ AEH = ∠ ADC = 90^0 ; Â là góc chung

=> Δ AEH ~ ΔADC => $\frac{AE}{AD}=\frac{AH}{AC}$ => AE.AC = AH.AD.

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: ∠ BEC = ∠ ADC = 90^0 ; ∠C là góc chung

=> Δ BEC ~ ΔADC => $\frac{BE}{AD}=\frac{BC}{AC}$ => AD.BC = BE.AC.

4. Ta có $\angle C_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ABC)

$\angle C_2 = \angle A_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

=> $\angle C_1 = \angle C_2$ => CB là tia phân giác của góc HCM; lại có CB ⊥ HM

=> Δ CHM cân tại C

=> CB cũng là đương trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn

=> $\angle C_1 = \angle E_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

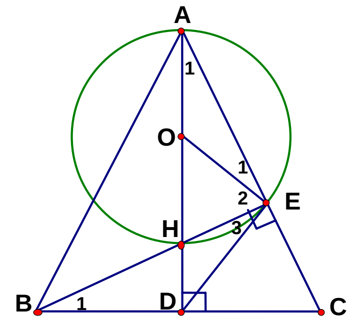
⇨ $\angle C_1 = \angle E_2$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

⇨ $\angle E_1 = \angle E_2$ => EB là tia phân giác của góc FED.

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

<u>Bài 2</u>. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1. **Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .**
2. **Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.**
3. **Chứng minh ED = $\frac{1}{2}$BC.**
4. **Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).**
5. **Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.**



HD GIẢI:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0

Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEA = 90^0.

AD là đường cao => AD $\perp$ BC => $\angle$BDA = 90^0.

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc 90^0 => E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

=> D là trung điểm của BC. Theo trên ta có $\angle$BEC = 90^0 .

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến => DE = $\frac{1}{2}$BC.

4. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => tam giác AOE cân tại O => $\angle E_1 = \angle A_1$ (1).

Theo trên DE = $\frac{1}{2}$BC => tam giác DBE cân tại D => $\angle E_3 = \angle B_1$ (2)

Mà $\angle B_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ACB) => $\angle E_1 = \angle E_3$ => $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

Mà $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^0$ => $\angle E_2 + \angle E_3 = 90^0 = \angle OED$ => DE $\perp$ OE tại E.

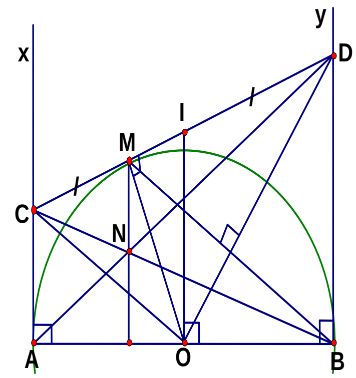
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết AH = 6 Cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm. áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow ED = 4$cm

<u>Bài 3</u> Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. **Chứng minh AC + BD = CD.**
2. **Chứng minh $\angle$COD = 90^0.**
3. **Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.**
4. **Chứng minh OC // BM**

5. **Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.**
6. **Chứng minh MN $\perp$ AB.**
7. **Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.**



HD GIẢI:

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM. Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle$AOM và $\angle$BOM là hai góc kề bù => $\angle$COD = 90^0.

3. Theo trên $\angle$COD = 90^0 nên tam giác COD vuông tại O có OM $\perp$ CD (OM là tiếp tuyến).
áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OM^2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R^2 => AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

4. Theo trên $\angle$COD = 90^0 nên OC $\perp$ OD .(1)
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM $\perp$ OD .(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

5. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC $\perp$ AB; BD $\perp$ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB
=> IO // AC , mà AC $\perp$ AB => IO $\perp$ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

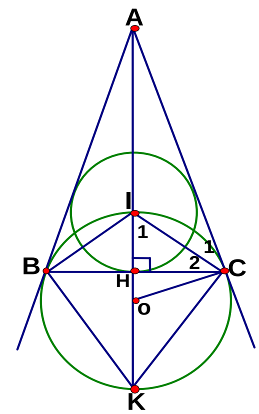
6. Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN}=\frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN}=\frac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD $\perp$ AB => MN $\perp$ AB.

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB.

Bài 4 **Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK.**

1. **Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.**
2. **Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).**
3. **Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.**



HD GIẢI:

1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B

Do đó BI ⊥ BK hay$\angle$IBK = 90^0 .

Tương tự ta cũng có $\angle$ICK = 90^0 như vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2. Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH.

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^0$ (2) (vì $\angle IHC = 90^0$).

$\angle I_1 = \angle ICO$ (3) (vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => $\angle C_1 + \angle ICO = 90^0$ hay AC ⊥ OC. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

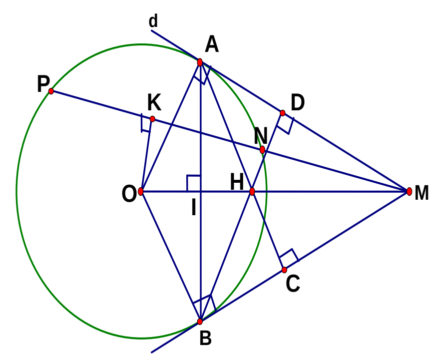
$AH^2 = AC^2 – HC^2$ => AH = $\sqrt{20^2 - 12^2}$ = 16 (cm)

CH^2 = AH.OH => OH = $\frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16}$ = 9 (cm)

OC = $\sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225}$ = 15 (cm)

Bài 5 **Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC ⊥ MB, BD ⊥ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.**

1. **Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.**
2. **Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .**
3. **Chứng minh OI.OM = R^2; OI. IM = IA^2.**
4. **Chứng minh OAHB là hình thoi.**
5. **Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.**
6. **Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d**



HD GIẢI:

1. (HS tự làm).

2. Vì K là trung điểm NP nên OK ⊥ NP (quan hệ đường kính
Và dây cung) => ∠OKM = 90^0. Theo tính chất tiếp tuyến ta có ∠OAM = 90^0; ∠OBM = 90^0. như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có MA = MB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R
=> OM là trung trực của AB => OM ⊥ AB tại I .
Theo tính chất tiếp tuyến ta có ∠OAM = 90^0 nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.
áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => OI.OM = OA^2 hay OI.OM = R^2; và OI. IM = IA^2.

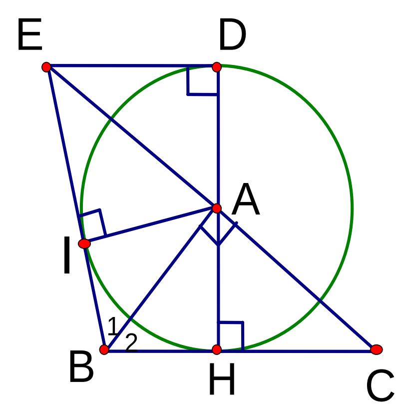
4. Ta có OB ⊥ MB (tính chất tiếp tuyến) ; AC ⊥ MB (gt) => OB // AC hay OB // AH.
OA ⊥ MA (tính chất tiếp tuyến) ; BD ⊥ MA (gt) => OA // BD hay OA // BH.
=> Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.

5. Theo trên OAHB là hình thoi. => OH ⊥ AB; cũng theo trên OM ⊥ AB => O, H, M thẳng hàng(Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

6. (HD) Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R

<u>Bài 6</u> Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1. **Chứng minh tam giác BEC cân.**
2. **Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.**
3. **Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).**
4. **Chứng minh BE = BH + DE.**



HD GIẢI:

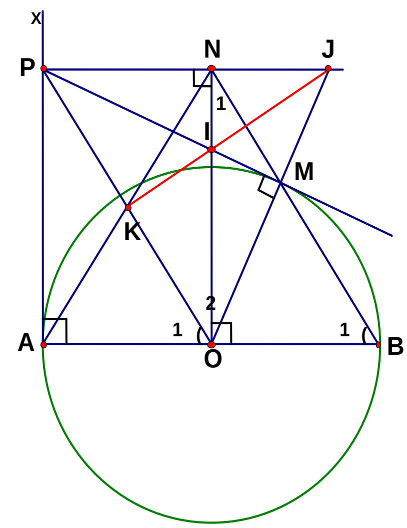
1. ∆ AHC = ∆ADE (g.c.g) => ED = HC (1) và AE = AC (2).
Vì AB ⊥CE (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ∆BEC => BEC là tam giác cân. => $\angle B_1 = \angle B_2$

2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2$ => ∆ AHB = ∆AIB
=> AI = AH.

3. AI = AH và BE ⊥ AI tại I => BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

4. DE = IE và BI = BH => BE = BI+IE = BH + ED

<u>Bài 7</u> Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.



1. **Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn.**
2. **Chứng minh BM // OP.**
3. **Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.**

Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

HD GIẢI:

1. (HS tự làm).
2. Ta có é ABM nội tiếp chắn cung AM; é AOM là góc ở tâm

chắn cung AM => é ABM = $\frac{\angle AOM}{2}$ (1) OP là tia phân giác é AOM (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) => é AOP = $\frac{\angle AOM}{2}$ (2)

Mà é ABM và é AOP là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

3. Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : éPAO=90^0 (vì PA là tiếp tuyến); éNOB = 90^0 (gt NO⊥AB).

=> éPAO = éNOB = 90^0; OA = OB = R; éAOP = éOBN (theo (3)) => ΔAOP = ΔOBN => OP = BN (5)

Từ (4) và (5) => OBNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Tứ giác OBNP là hình bình hành => PN // OB hay PJ // AB, mà ON ⊥ AB => ON ⊥ PJ

Ta cũng có PM ⊥ OJ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ. (6)

Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có éPAO = éAON = éONP = 90^0 => K là trung điểm của PO (t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

AONP là hình chữ nhật => éAPO = é NOP (so le) (7)

Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác éAPM => éAPO = éMPO (8).

Từ (7) và (8) => ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đường cao => IK ⊥ PO. (9)

Từ (6) và (9) => I, J, K thẳng hàng.

<u>Bài 8</u> Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.

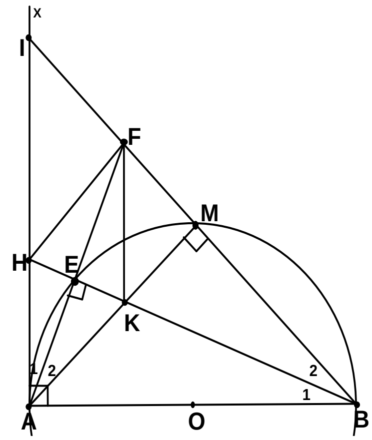
2) Chứng minh rằng: AI^2 = IM . IB.

3) Chứng minh BAF là tam giác cân.

4) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.

5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một

đường tròn.



HD GIẢI:

1. Ta có : éAMB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> éKMF = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

éAEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> éKEF = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

=> éKMF + éKEF = 180^0 . Mà éKMF và éKEF là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có éIAB = 90^0 (vì AI là tiếp tuyến) => ΔAIB vuông tại A có AM ⊥ IB (theo trên).

áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => AI^2 = IM **.** IB.

3. Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM => éIAE = éMAE => $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ME}$

=> éABE =éMBE (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => BE là tia phân giác góc ABF. (1)

Theo trên ta có éAEB = 90^0 => BE ⊥ AF hay BE là đường cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2) => BAF là tam giác cân. tại B .

4. BAF là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của AF. (3)

Từ BE ⊥ AF => AF ⊥ HK (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác éHAK (5)

Từ (4) và (5) => HAK là tam giác cân. tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của HK. (6).

Từ (3) , (4) và (6) => AKFH là hình thoi (vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

5. (HD). Theo trên AKFH là hình thoi => HA // FH hay IA // FK => tứ giác AKFI là hình thang.

Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân.

AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.

Thật vậy: M là trung điểm của cung AB => éABM = éMAI = 45^0 (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có éABI = 45^0 => éAIB = 45^0 .(8)

Từ (7) và (8) => éIAK = éAIF = 45^0 => AKFI là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau).

Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

<u>Bài 9</u> Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B

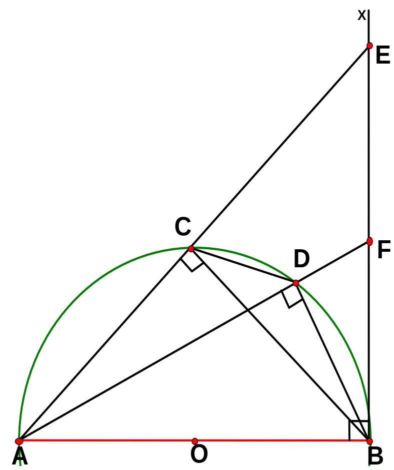
1. **Chứng minh AC. AE không đổi.**
2. **Chứng minh ∠ ABD = ∠ DFB.**
3. **Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.**

và E).

HD GIẢI:

1. C thuộc nửa đường tròn nên ∠ACB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => BC ⊥ AE.

∠ABE = 90^0 (Bx là tiếp tuyến) => tam giác ABE vuông tại B có BC là đường cao => AC. AE = AB^2 (hệ thức giữa cạnh và đường cao), mà AB là đường kính nên AB = 2R không đổi do đó AC. AE không đổi.



2. Δ ADB có ∠ADB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

=> ∠ABD + ∠BAD = 90^0 (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0)(1)

Δ ABF có ∠ABF = 90^0 (BF là tiếp tuyến).

=> ∠AFB + ∠BAF = 90^0 (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0) (2)

Từ (1) và (2) => ∠ABD = ∠DFB (cùng phụ với ∠BAD)

3. Tứ giác ACDB nội tiếp (O) => ∠ABD + ∠ACD = 180^0 .

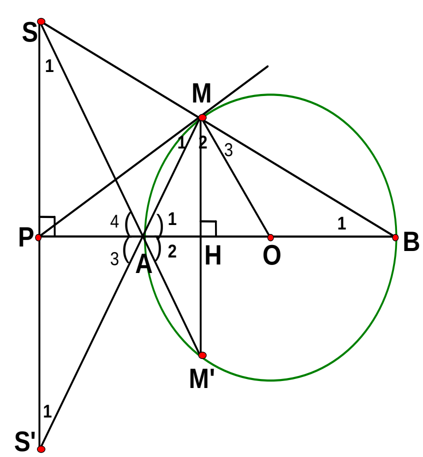
∠ECD + ∠ACD = 180^0 (Vì là hai góc kề bù) => ∠ECD = ∠ABD (cùng bù với ∠ACD).

Theo trên ∠ABD = ∠DFB => ∠ECD = ∠DFB. Mà ∠EFD + ∠DFB = 180^0 (Vì là hai góc kề bù) nên suy ra ∠ECD + ∠EFD = 180^0, mặt khác ∠ECD và ∠EFD là hai góc đối của tứ giác CDFE do đó tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp.

<u>Bài 10</u> Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho AM < MB. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M'A. Gọi P là chân đương vuông góc từ S đến AB.

1. **Chứng minh bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn**
2. **Gọi S' là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng tam giác PS'M cân.**
3. **Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn.**

HD GIẢI:



1. Ta có SP ⊥ AB (gt) => ∠SPA = 90^0 ; ∠AMB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠AMS = 90^0 . Như vậy P và M cùng nhìn AS dưới một góc bằng 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AS.

Vậy bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn.

2. Vì M'đối xứng M qua AB mà M nằm trên đường tròn nên M' cũng nằm trên đường tròn => hai cung AM và AM' có số đo bằng nhau

=> ∠AMM' = ∠AM'M (Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (1)

Cũng vì M'đối xứng M qua AB nên MM' ⊥ AB tại H =>MM'// SS'(cùng vuông góc với AB)

=> ∠AMM' = ∠AS'S; ∠AM'M = ∠ASS' (vì so le trong) (2).

=> Từ (1) và (2) => ∠AS'S = ∠ASS'.

Theo trên bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn => ∠ASP=∠AMP (nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$)

=> ∠AS'P = ∠AMP => tam giác PMS' cân tại P.

3. Tam giác SPB vuông tại P; tam giác SMS' vuông tại M => $\angle B_1 = \angle S'_1$ (cùng phụ với ∠S). (3)

Tam giác PMS' cân tại P => $\angle S'_1 = \angle M_1$ (4)

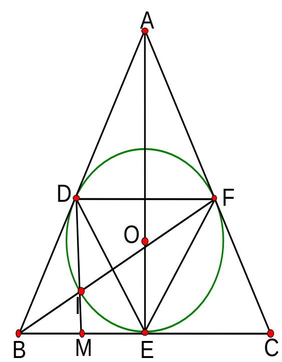
Tam giác OBM cân tại O (vì có OM = OB =R) => $\angle B_1 = \angle M_3$ (5).

Từ (3), (4) và (5) => $\angle M_1 = \angle M_3$ => $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle M_3 + \angle M_2$

mà $\angle M_3 + \angle M_2 = \angle AMB = 90^0$ nên suy ra $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle PMO = 90^0$ => PM ⊥ OM tại M => PM là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

<u>Bài 11.</u> Cho tam giác ABC (AB = AC). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F . BF cắt (O) tại I , DI cắt BC tại M. Chứng minh :

1. **Tam giác DEF có ba góc nhọn.**
2. **DF // BC.**
3. **Tứ giác BDFC nội tiếp.**
4. $\dfrac{BD}{CB} = \dfrac{BM}{CF}$



HD GIẢI:

1. (HD) Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AD = AF => tam giác ADF cân tại A => ∠ADF = ∠AFD < 90^0 => sđ cung DF < 180^0 => ∠DEF < 90^0 (vì góc DEF nội tiếp chắn cung DE).

Chứng minh tương tự ta có ∠DFE < 90^0; ∠EDF < 90^0. Như vậy tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. Ta có AB = AC (gt); AD = AF (theo trên) => $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ => DF // BC.

3. DF // BC => BDFC là hình thang lại có ∠ B = ∠C (vì tam giác ABC cân)

=> BDFC là hình thang cân do đó BDFC nội tiếp được một đường tròn .

4. Xét tam giác BDM và CBF Ta có ∠ DBM = ∠BCF (hai góc đáy của tam giác cân).

∠BDM = ∠BFD (nội tiếp cùng chắn cung DI); ∠ CBF = ∠BFD (vì so le)

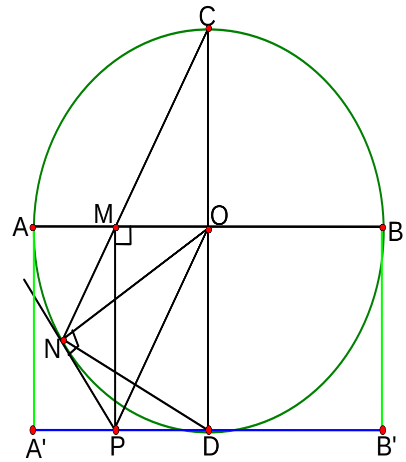
=> ∠BDM = ∠CBF .

⇨ ΔBDM ~ΔCBF => $\dfrac{BD}{CB} = \dfrac{BM}{CF}$

<u>Bài 12</u> Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh :

1. **Tứ giác OMNP nội tiếp.**
2. **Tứ giác CMPO là hình bình hành.**

3. **CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.**
4. **Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.**



HD GIẢI:

1. Ta có $\angle OMP = 90^0$ (vì $PM \perp AB$); $\angle ONP = 90^0$ (vì NP là tiếp tuyến).
Như vậy M và N cùng nhìn OP dưới một góc bằng 90^0 => M và N cùng nằm trên đường tròn đường kính OP => Tứ giác OMNP nội tiếp.

2. Tứ giác OMNP nội tiếp => $\angle OPM = \angle ONM$ (nội tiếp chắn cung OM)
Tam giác ONC cân tại O vì có ON = OC = R => $\angle ONC = \angle OCN$
=> $\angle OPM = \angle OCM$.
Xét hai tam giác OMC và MOP ta có $\angle MOC = \angle OMP = 90^0$; $\angle OPM = \angle OCM$ => $\angle CMO = \angle POM$ lại có MO là cạnh chung => $\Delta OMC = \Delta MOP$ => OC = MP. (1)
Theo giả thiết Ta có $CD \perp AB$; $PM \perp AB$ => CO//PM (2).
Từ (1) và (2) => Tứ giác CMPO là hình bình hành.

3. Xét hai tam giác OMC và NDC ta có $\angle MOC = 90^0$ (gt $CD \perp AB$); $\angle DNC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle MOC = \angle DNC = 90^0$ lại có $\angle C$ là góc chung
=> $\Delta OMC \sim \Delta NDC$
=> $\frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN}$ => CM. CN = CO.CD mà CO = R; CD = 2R nên CO.CD = $2R^2$ không đổi
=> CM.CN =$2R^2$ không đổi hay tích CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

4. (HD) Dễ thấy $\Delta OMC = \Delta DPO$ (c.g.c) => $\angle ODP = 90^0$ => P chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D.
Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên doạn thẳng A’ B’ song song và bằng AB.

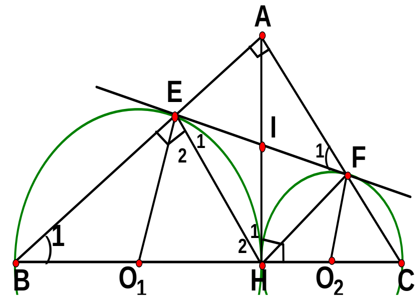
<u>Bài 13</u> Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A , Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, Nửa đường tròn

1. **Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.**
2. **BEFC là tứ giác nội tiếp.**
3. **AE. AB = AF. AC.**

Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai

đường kính HC cắt AC tại F. **nửa đường tròn**

HD GIẢI:



1. Ta có : éBEH = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> éAEH = 90^0 (vì là hai góc kề bù). (1)
éCFH = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> éAFH = 90^0 (vì là hai góc kề bù).(2)
éEAF = 90^0 (Vì tam giác ABC vuông tại A) (3)
Từ (1), (2), (3) => tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

2. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn =>éF_1=éH_1 (nội tiếp chắn cung AE) . Theo giả thiết AH ⊥BC nên AH là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) => éB_1 = éH_1 (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE)

=> éB_1= éF_1 => éEBC+éEFC = éAFE + éEFC mà éAFE + éEFC = 180^0 (vì là hai góc kề bù) => éEBC+éEFC = 180^0 mặt khác éEBC và éEFC là hai góc đối của tứ giác BEFC do đó BEFC là tứ giác nội tiếp.

3. Xét hai tam giác AEF và ACB ta có éA = 90^0 là góc chung; éAFE = éABC (theo Chứng minh trên) => ΔAEF ~ΔACB => $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$

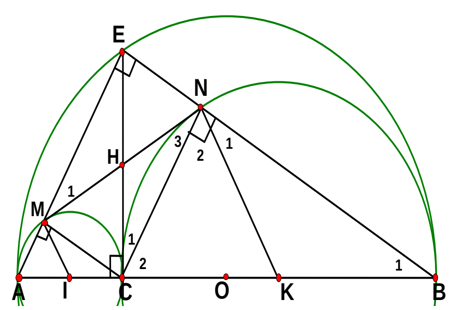
=> AE. AB = AF. AC.

* ***HD cách 2***: Tam giác AHB vuông tại H có HE ⊥ AB => AH^2 = AE.AB (*)
Tam giác AHC vuông tại H có HF ⊥ AC => AH^2 = AF.AC (**)
Từ (*) và (**) => AE. AB = AF. AC

4. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật => IE = EH => ΔIEH cân tại I => éE_1 = éH_1 .
ΔO_1EH cân tại O_1 (vì có O_1E vàO_1H cùng là bán kính) => éE_2 = éH_2.
=> éE_1 + éE_2 = éH_1 + éH_2 mà éH_1 + éH_2 = éAHB = 90^0 => éE_1 + éE_2 = éO_1EF = 90^0 => O_1E ⊥EF .
Chứng minh tương tự ta cũng có O_2F ⊥ EF. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

<u>Bài 14</u> Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 Cm, CB = 40 Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M. N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).

1. **Chứng minh EC = MN.**
2. **Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).**
3. **Tính MN.**
4. **Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn**



HD GIẢI:

1. Ta có: éBNC= 90^0(nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)
=> éENC = 90^0 (vì là hai góc kề bù). (1)
éAMC = 90^0 (nội tiếp chắn nức đường tròn tâm I) => éEMC = 90^0 (vì là hai góc kề bù).(2)
éAEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) hay éMEN = 90^0 (3)
Từ (1), (2), (3) => tứ giác CMEN là hình chữ nhật => EC = MN (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

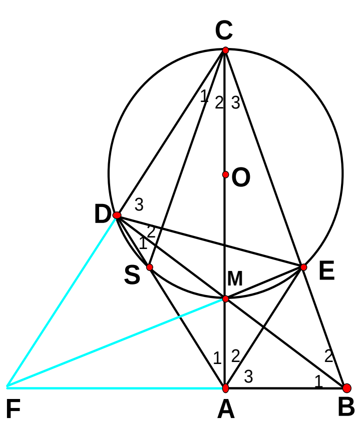
2. Theo giả thiết EC ⊥AB tại C nên EC là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (I) và (K)
=> éB_1 = éC_1 (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN). Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên => éC_1= éN_3 => éB_1 = éN_3.(4) Lại có KB = KN (cùng là bán kính) => tam giác KBN cân tại K => éB_1 = éN_1 (5)
Từ (4) và (5) => éN_1 = éN_3 mà éN_1 + éN_2 = ∠CNB = 90^0 => éN_3 + éN_2 = ∠MNK = 90^0 hay MN ⊥ KN tại N => MN là tiếp tuyến của (K) tại N.
Chứng minh tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (I) tại M,
Vậy MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).
3. Ta có éAEB = 90^0 (nội tiếp chắn nức đường tròn tâm O) => ΔAEB vuông tại A có EC ⊥ AB (gt)
=> EC^2 = AC. BC ⇔ EC^2 = 10.40 = 400 => EC = 20 cm. Theo trên EC = MN => MN = 20 cm.
4. Theo giả thiết AC = 10 Cm, CB = 40 Cm => AB = 50cm => OA = 25 cm
Ta có:
$S_{(o)} = \pi.OA^2 = \pi 25^2 = 625\pi$; $S_{(I)} = \pi.IA^2 = \pi.5^2 = 25\pi$; $S_{(k)} = \pi.KB^2 = \pi.20^2 = 400\pi$.
Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn là $S = \frac{1}{2}(S_{(o)} - S_{(I)} - S_{(k)})$

$$S = \frac{1}{2}(625\pi - 25\pi - 400\pi) = \frac{1}{2}.200\pi = 100\pi \approx 314\ (cm^2)$$

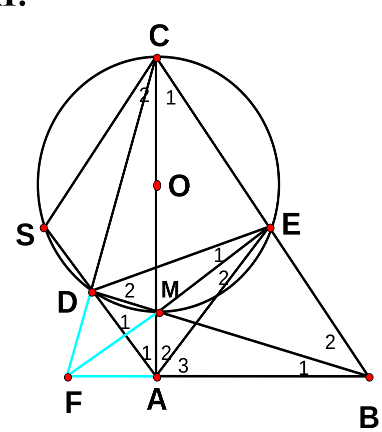
<u>Bài 15</u> Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. **Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp .**
2. **Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.**
3. **Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.**
4. **Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.**
5. **Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.**

HD GIẢI:



H×nh a



H×nh b

1. Ta có éCAB = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); éMDC = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠CDB = 90^0 như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle D_1 = \angle C_3$(nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\angle D_1 = \angle C_3$ => $SM = EM$ => $\angle C_2 = \angle C_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau) => CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB Ta có BA⊥CM; CD ⊥ BM; ME ⊥ BC như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có $SM = EM$ => $\angle D_1 = \angle D_2$ => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có ∠MEC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) => ∠MEB = 90^0.

Tứ giác AMEB có ∠MAB = 90^0 ; ∠MEB = 90^0 => ∠MAB + ∠MEB = 180^0 mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn => $\angle A_2 = \angle B_2$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle A_1 = \angle B_2$(nội tiếp cùng chắn cung CD)

=> $\angle A_1 = \angle A_2$ => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

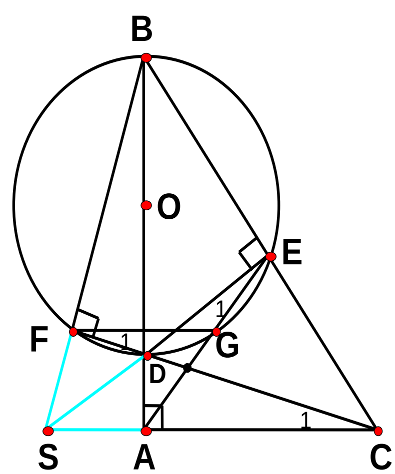
Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

<u>**TH2**</u> ***(Hình b)*** **Câu 2 :** ∠ABC = ∠CME (cùng phụ ∠ACB); ∠ABC = ∠CDS (cùng <u>**bù**</u> ∠ADC) => ∠CME = ∠CDS => $CE = CS \Rightarrow SM = EM$ => ∠SCM = ∠ECM => CA là tia phân giác của góc SCB.

<u>Bài 16</u> Cho tam giác ABC vuông ở A.và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.Chứng minh :

1. **Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.**
2. **Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp .**
3. **AC // FG.**
4. **Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.**

HD GIẢI:



1. Xét hai tam giác ABC và EDB Ta có ∠BAC = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); ∠DEB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠DEB = ∠BAC = 90^0 ; lại có ∠ABC là góc chung => ΔDEB ~ Δ CAB .

2. Theo trên ∠DEB = 90^0 => ∠DEC = 90^0 (vì hai góc kề bù); ∠BAC = 90^0 (vì ΔABC vuông tại A) hay ∠DAC = 90^0 => ∠DEC + ∠DAC = 180^0 mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp .

***** ∠BAC = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); ∠DFB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay ∠BFC = 90^0 như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => AFBC là tứ giác nội tiếp.

3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp => $\angle E_1 = \angle C_1$ lại có $\angle E_1 = \angle F_1$ => $\angle F_1 = \angle C_1$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra AC // FG.
4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

PHẦN II: MỘT SỐ ĐỀ THI CÓ LỜI GIẢI VÀ BIỂU ĐIỂM
KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT -ĐỀ THI MÔN : TOÁN
Thời gian làm bài 120 phút (không kể thời gian giao đề)
ĐỀ SỐ 1

Câu 1 ***(2,0 điểm).*** Cho biểu thức :P=$\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{6x-4}{x^2-1}$

1. Tìm điều kiện xác định của biểu thức P. 2. Rút gọn P

Câu 2 ***(2,0 điểm).*** Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 2x+ay=-4 \\ \text{ax}-3y=5 \end{cases}$

1. Giải hệ phương trình với a=1 2. Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 3 ***(2,0 điểm).*** Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng một nửa chiều dài. Biết rằng nếu giảm mỗi chiều đi 2m thì diện tích hình chữ nhật đã cho giảm đi một nửa. Tính chiều dài hình chữ nhật đã cho.

Câu 4 ***(3,0 điểm).*** Cho đường tròn (O;R) (điểm O cố định, giá trị R không đổi) và điểm M nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến MB, MC (B,C là các tiếp điểm) của (O) và tia Mx nằm giữa hai tia MO và MC. Qua B kẻ đường thẳng song song với Mx, đường thẳng này cắt (O) tại điểm thứ hai là A. Vẽ đường kính BB' của (O). Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BB',đường thẳng này cắt MC và B'C lần lượt tại K và E.

Chứng minh rằng:

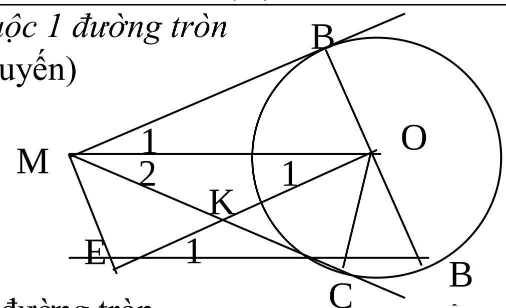
1.4 điểm M,B,O,C cùng nằm trên một đường tròn. 2.Đoạn thẳng ME = R.

3.Khi điểm M di động mà OM = 2R thì điểm K di động trên một đường tròn cố định, chỉ rõ tâm và bán kính của đường tròn đó.

Câu 5 ***(1,0 điểm).*** Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn a+ b + c =4. CMR: $\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{c^3}>2\sqrt{2}$

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM SỐ 1

Câu	***Đáp án, gợi ý***	***Điểm***
C1.1 (0,75 điểm)	Biểu thức P xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\neq 0 \\ x+1\neq 0 \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{cases}$	0,5 0,25
C1.2 (1,25 điểm)	P= $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{6x-4}{(x+1)(x-1)}=\frac{x(x+1)+3(x-1)-(6x-4)}{(x+1)(x-1)}$ $=\frac{x^2+x+3x-3-6x+4}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)}$ $=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x+1}\quad (voi\ x\neq \pm 1)$	0,25 0,5 0,5
C2.1 (1,0 điểm)	Với a = 1, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} 2x+y=-4 \\ x-3y=5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3y=-12 \\ x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=-7 \\ x-3y=5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ -1-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ Vậy với a = 1, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$	0,25 0,25 0,25 0,25
C2.2 (1,0 điểm)	-Nếu a = 0, hệ có dạng: $\begin{cases} 2x=-4 \\ -3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases}$ => có nghiệm duy nhất -Nếu a $\neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\frac{2}{a}\neq\frac{a}{-3}$ $\Leftrightarrow a^2\neq -6$ (luôn đúng, vì $a^2\geq 0$ với mọi a) Do đó, với a $\neq 0$, hệ luôn có nghiệm duy nhất. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất với mọi a.	0,25 0,25 0,25 0,25
C3 (2,0 điểm)	Gọi chiều dài của hình chữ nhật đã cho là x (m), với x > 4. Vì chiều rộng bằng nửa chiều dài nên chiều rộng là: $\frac{x}{2}$ (m)	0,25 0,25

	=> diện tích hình chữ nhật đã cho là: $x.\frac{x}{2}=\frac{x^2}{2}$ (m^2) Nếu giảm mỗi chiều đi 2 m thì chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là: $x-2$ *va* $\frac{x}{2}-2$ (m)Khi đó, diện tích hình chữ nhật giảm đi một nửa nên ta có phương trình: $(x-2)(\frac{x}{2}-2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}-2x-x+4=\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2-12x+16=0$ …………=> $x_1=6+2\sqrt{5}$ (thoả mãn x>4); $x_2=6-2\sqrt{5}$ (loại vì không thoả mãn x>4) Vậy chiều dài của hình chữ nhật đã cho là $6+2\sqrt{5}$ (m).	0,25 0,25 0,25 0,5 0,25
C4.1 (1,0 điểm)	*1) Chứng minh M, B, O, C cùng thuộc 1 đường tròn* Ta có: $\angle MOB=90^0$ (vì MB là tiếp tuyến) $\angle MCO=90^0$ (vì MC là tiếp tuyến) => $\angle$MBO + $\angle$MCO = = 90^0 + 90^0 = 180^0 => Tứ giác MBOC nội tiếp (vì có tổng 2 góc đối =180^0) =>4 điểm M, B, O, C cùng thuộc 1 đường tròn  	0,25 0,25 0,25 0,25
C4.2 (1,0 điểm)	*2) Chứng minh ME = R:* Ta có MB//EO (vì cùng vuông góc với BB') => $\angle O_1$ = $\angle M_1$ (so le trong) Mà $\angle M_1$ = $\angle M_2$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) => $\angle M_2$ = $\angle O_1$ (1) C/m được MO//EB' (vì cùng vuông góc với BC) => $\angle O_1$ = $\angle E_1$ (so le trong) (2) Từ (1), (2) => $\angle M_2$ = $\angle E_1$ => MOCE nội tiếp => $\angle$MEO = $\angle$MCO = 90^0 => $\angle$MEO = $\angle$MBO = $\angle$BOE = 90^0 => MBOE là hình chữ nhật => ME = OB = R (điều phải chứng minh)	0,25 0,25 0,25 0,25
C4.3 (1,0 điểm)	*3) Chứng minh khi OM=2R thì K di động trên 1 đường tròn cố định:* Chứng minh được Tam giác MBC đều => $\angle$BMC = 60^0 => $\angle$BOC = 120^0 => $\angle$KOC = 60^0 - $\angle O_1$ = 60^0 - $\angle M_1$ = 60^0 – 30^0 = 30^0 Trong tam giác KOC vuông tại C, ta có: $CosKOC=\frac{OC}{OK} \Rightarrow OK=\frac{OC}{Cos30^0}=R:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ Mà O cố định, R không đổi => K di động trên đường tròn tâm O, bán kính = $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ (điều phải chứng minh)	0,25 0,25 0,25 0,25

C5 (1,0 điểm)	$\sqrt[4]{4a^3}+\sqrt[4]{4b^3}+\sqrt[4]{4c^3}$ $=\sqrt[4]{(a+b+c)a^3}+\sqrt[4]{(a+b+c)b^3}+\sqrt[4]{(a+b+c)c^3}$	0,25
	$>\sqrt[4]{a^4}+\sqrt[4]{b^4}+\sqrt[4]{c^4}$	0,25
	$=a+b+c$ $=4$	0,25
	Do đó, $\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{c^3}>\frac{4}{\sqrt[4]{4}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$	0,25

<u>Câu 5</u> Cách 2: Đặt x = $\sqrt[4]{a}; y=\sqrt[4]{b}; z=\sqrt[4]{c}$ => x, y , z > 0 và $x^4 + y^4 + z^4 = 4$.

BĐT cần CM tương đương: $x^3 + y^3 + z^3 > 2\sqrt{2}$

hay $\sqrt{2}(x^3 + y^3 + z^3) > 4 = x^4 + y^4 + z^4$

$\Leftrightarrow x^3(\sqrt{2}-x) + y^3(\sqrt{2}-y) + z^3(\sqrt{2}-z) > 0$ (*).

Ta xét 2 trường hợp:

- Nếu trong 3 sô x, y, z tồn tại it nhât một sô $\ge\sqrt{2}$, giả sử $x\ge\sqrt{2}$ thì $x^3\ge 2\sqrt{2}$.

Khi đo: $x^3 + y^3 + z^3 > 2\sqrt{2}$ (do y, z > 0).

- Nếu cả 3 sô x, y, z đều nhỏ $<\sqrt{2}$ thì BĐT(*) luôn đung.

Vậy $x^3 + y^3 + z^3 > 2\sqrt{2}$ được CM.

KỲ THI TUYỂN SINH THPT
MÔN THI: TOÁN
(Thời gian làm bài 120 phút – Không kể thời gian giao đề cho thí sinh)
ĐỀ SỐ 2
---*---**

Câu I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\frac{x-1}{3} = x+1$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$.

Câu II (1,0 điểm)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{2\sqrt{a} - a} + \frac{1}{2 - \sqrt{a}}\right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 4$.

Câu III (1,0 điểm)

Một tam giác vuông có chu vi là 30 cm, độ dài hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 7cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác vuông đó.

Câu IV (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d): $y = 2x - m + 1$ và parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$.

1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1; 3).

2) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ (x_1; y_1) và (x_2; y_2) sao cho $x_1x_2(y_1 + y_2) + 48 = 0$.

Câu V (3,0 điểm) Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm C sao cho AC < BC ($C \neq A$). Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau ở điểm D, AD cắt (O) tại E ($E \neq A$) .

1) Chứng minh $BE^2 = AE.DE$.

2) Qua C kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại H, DO cắt BC tại F. Chứng minh tứ giác CHOF nội tiếp .

3) Gọi I là giao điểm của AD và CH. Chứng minh I là trung điểm của CH.

Câu VI (1,0 điểm)

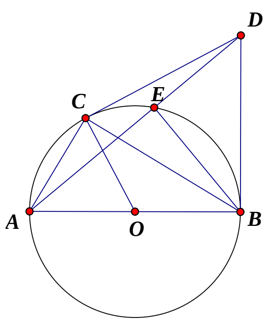
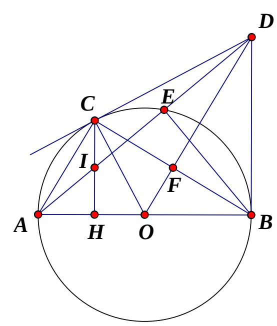
Cho 2 số dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2}.$$

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I		

(2,0đ)		
1) 1,0 điểm	$\frac{x-1}{3}=x+1 \Leftrightarrow x-1=3(x+1)$	0,25
	$\Leftrightarrow x-1=3x+3$	0,25
	$\Leftrightarrow -2x=4$	0,25
	$\Leftrightarrow \quad x=-2$.Vậy phương trình đã cho có một nghiệm x = -2	0,25
2) 1,0 điểm	$\begin{cases} x\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0\,(1) \\ 3x+2y=11 \quad (2) \end{cases}$ Từ (1)=> $x\sqrt{3}=3\sqrt{3}$	0,25
	<=>x=3	0,25
	Thay x=3 vào (2)=> $3.3+2y=11$ <=>2y=2	0,25
	<=>y=1 . Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x;y)=(3;1)	0,25
Câu II (1,0đ)	$P=\left[\frac{1}{\sqrt{a}\left(2-\sqrt{a}\right)}+\frac{1}{2-\sqrt{a}}\right]:\frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}}$	0,25
	$=\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(2-\sqrt{a})}\cdot\frac{a-2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$	0,25
	$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-2\right)}{\sqrt{a}\left(2-\sqrt{a}\right)}$	0,25
	$=\frac{\sqrt{a}-2}{2-\sqrt{a}}$ =-1	0,25
Câu III (1,0đ)	Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ là x (cm) (điều kiện 0< x < 15) => độ dài cạnh góc vuông còn lại là (x + 7)(cm) Vì chu vi của tam giác là 30cm nên độ dài cạnh huyền là: 30–(x + x +7)= 23–2x (cm)	0,25
	Theo định lí Py –ta- go ta có phương trình $x^2+(x+7)^2=(23-2x)^2$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2-53x+240=0$ (1) Giải phương trình (1) được nghiệm x = 5; x = 48	0,25
	Đối chiếu với điều kiện có x = 5 (TM đk); x = 48 (không TM đk) Vậy độ dài một cạnh góc vuông là 5cm, độ dài cạnh góc vuông còn lại là 12 cm, độ dài cạnh huyền là 30 – (5 + 12) = 13cm	0,25
Câu IV (2,0đ)		
1) 1,0 điểm	Vì (d) đi qua điểm A(-1; 3) nên thay x = -1 và y = 3 vào hàm số y = 2x – m + 1 ta có 2.(-1) – m +1 = 3	0,25
	$\Leftrightarrow$-1 – m = 3	0,25
	$\Leftrightarrow$ m = -4	0,25
	Vậy m = -4 thì (d) đi qua điểm A(-1; 3)	0,25
2) 1,0 điểm	Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x^2=2x-m+1$	0,25

	$\Leftrightarrow x^2-4x+2m-2=0$ (1); Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nên (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 6-2m>0 \Leftrightarrow m<3$	0,25
	Vì $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (P) nên x_1; x_2 là nghiệm của phương trình (1) và $y_1=2x_1-m+1, y_2=2x_2-m+1$ Theo hệ thức Vi-et ta có $x_1+x_2=4, x_1x_2=2m-2$ .Thay y_1,y_2 vào $x_1x_2(y_1+y_2)+48=0$ có $x_1x_2(2x_1+2x_2-2m+2)+48=0$ $\Rightarrow (2m-2)(10-2m)+48=0$	0,25
	$\Leftrightarrow m^2-6m-7=0 \Leftrightarrow m=-1$(thỏa mãn m<3) hoặc m=7(không thỏa mãn m<3) Vậy m = -1 thỏa mãn đề bài	0,25
Câu V (3,0đ)		
1) 1,0 điểm	 Vẽ đúng hình theo yêu cầu chung của đề bài	0,25
	VìBD là tiếp tuyến của (O) nên BD $\perp$ OB => ΔABD vuông tại B	0,25
	Vì AB là đường kính của (O) nên AE $\perp$ BE	0,25
	Áp dụng hệ thức lượng trong ΔABD ($ABD=90^0$;BE $\perp$ AD) ta có BE^2 = AE.DE	0,25
2) 1,0 điểm	Có DB= DC (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau), OB = OC (bán kính của (O)) => OD là đường trung trực của đoạn BC => $OFC=90^0$ (1) 	0,25
	Có CH // BD (gt), mà AB $\perp$ BD (vì BD là tiếp tuyến của (O))	0,25
	=> CH $\perp$ AB => $OHC=90^0$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta có $OFC+OHC=180^0$ => tứ giác CHOF nội tiếp	0,25
3)1,0 điểm	Có CH //BD=> HCB=CBD (hai góc ở vị trí so le trong) mà ΔBCD cân tại D => $CBD=DCB$ nên CB là tia phân giác của HCD	0,25
	do CA $\perp$ CB => CA là tia phân giác góc ngoài đỉnh C của $\Delta ICD \Rightarrow \frac{AI}{AD}=\frac{CI}{CD}$ (3)	0,25

	Trong ΔABD có HI // BD => $\frac{AI}{AD}=\frac{HI}{BD}$ (4)	0,25
	Từ (3) và (4) => $\frac{CI}{CD}=\frac{HI}{BD}$ mà $CD=BD \Rightarrow CI=HI \Rightarrow$ I là trung điểm của CH	0,25
Câu VI (1,0đ)	Với $a>0;b>0$ ta có: $(a^2-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^4-2a^2b+b^2 \ge 0 \Rightarrow a^4+b^2 \ge 2a^2b$ $\Leftrightarrow a^4+b^2+2ab^2 \ge 2a^2b+2ab^2 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{a^4+b^2+2ab^2} \le \frac{1}{2ab(a+b)}$ (1)	0,25
	Tương tự có $\frac{1}{b^4+a^2+2a^2b} \le \frac{1}{2ab(a+b)}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow Q \le \frac{1}{ab(a+b)}$	0,25
	Vì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2 \Leftrightarrow a+b=2ab$ mà $a+b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \ge 1 \Rightarrow Q \le \frac{1}{2(ab)^2} \le \frac{1}{2}$.	0,25
	Khi a = b = 1 thì $\Rightarrow Q=\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\frac{1}{2}$	0,25

KỲ THI TUYỂN SINH THPT
MÔN THI: TOÁN
(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)
ĐỀ SỐ 3
---*---**

Bài I *(2,5 điểm)*

1) Cho biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của A khi x = 36

2) Rút gọn biểu thức $B=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\frac{4}{\sqrt{x}-4}\right):\frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \ge 0; x \ne 16$)

3) Với các của biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị của x nguyên để giá trị của biểu thức B(A – 1) là số nguyên

Bài II *(2,0 điểm)*. Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

Bài III *(1,5 điểm)*

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=2 \\ \frac{6}{x}-\frac{2}{y}=1 \end{cases}$

2) Cho phương trình: x^2 – (4m – 1)x + $3m^2$ – 2m = 0 (ẩn x). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện : $x_1^2+x_2^2=7$

Bài IV *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A, C); BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

1) Chứng minh CBKH là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $ACM = ACK$

3) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho BE = AM. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C

4) Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại điểm A; cho P là điểm nằm trên d sao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\frac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK

Bài V *(0,5 điểm)*. Với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x \geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

GỢI Ý – ĐÁP ÁN

Bài I: (2,5 điểm)

1) Với x = 36, ta có : $A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

2) Với x ≥, $x \neq 16$ ta có :

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16}\right)\frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

3) Ta có: $B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.\left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} - 1\right) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.\frac{2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{x-16}$.

Để $B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà $Ư(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$x-16$	1	-1	2	-2
x	17	15	18	14

Kết hợp ĐK $x \geq 0, x \neq 16$, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14;\ 15;\ 17;\ 18\}$

Bài II: (2,0 điểm)

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành một mình xong công việc là x (giờ), ĐK $x > \frac{12}{5}$

Thì thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là x + 2 (giờ)

Mỗi giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (cv), người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$ (cv)

Vì cả hai người cùng làm xong công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ nên mỗi giờ cả hai đội làm được $1 : \frac{12}{5} = \frac{5}{12}$ (cv)

Do đó ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$$

$\Delta' = 49 + 120 = 169$, $\sqrt{\Delta'} = 13$ => $x = \frac{7-13}{5} = \frac{-6}{5}$ (loại) và $x = \frac{7+13}{5} = \frac{20}{5} = 4$ (TMĐK)

Vậy người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ, người thứ hai làm xong công việc trong 4+2 = 6 giờ.

Bài III: (1,5 điểm) 1)Giải hệ: $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$, (ĐK: $x, y \neq 0$).

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = 4 \\ \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{6}{x} = 4+1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{x} = 5 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{2}{2} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.(TMĐK)

Vậy hệ có nghiệm (x;y)=(2;1).

2) + Phương trình đã cho có $\Delta = (4m-1)^2 - 12m^2 + 8m = 4m^2 + 1 > 0, \ \forall m$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\forall m$

+ Theo ĐL Vi –ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m - 1 \\ x_1 x_2 = 3m^2 - 2m \end{cases}$.

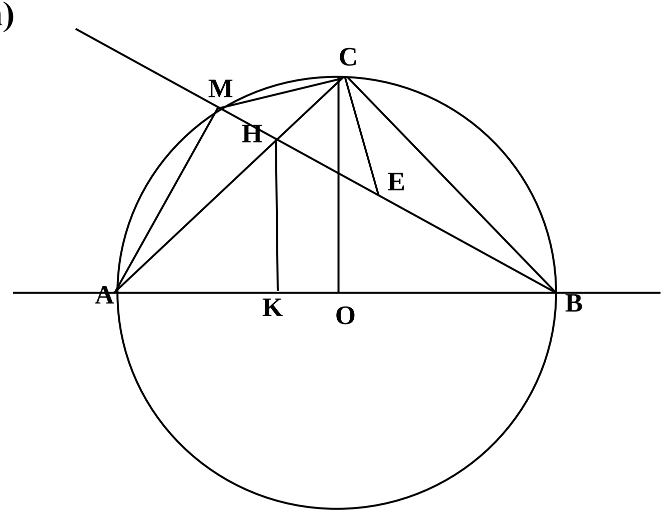
Khi đó: $x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7$

$\Leftrightarrow (4m-1)^2 - 2(3m^2 - 2m) = 7 \Leftrightarrow 10m^2 - 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 2m - 3 = 0$

Ta thấy tổng các hệ số: a + b + c = 0 => m = 1 hay m = $\frac{-3}{5}$.

Trả lời: Vậy....

Bài IV: (3,5 điểm)



1) Ta có $\widehat{HCB} = 90^0$ (do chắn nửa đường tròn đk AB)

$\widehat{HKB} = 90^0$ (do K là hình chiếu của H trên AB)

=> $\widehat{HCB} + \widehat{HKB} = 180^0$ nên tứ giác CBKH nội tiếp trong đường tròn đường kính HB.

2) Ta có $\widehat{ACM} = \widehat{ABM}$ (do cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$ của (O))

và $ACK = HCK = HBK$ (vì cùng chắn HK .của đtròn đk HB)

Vậy $ACM = ACK$

3) Vì OC ⊥ AB nên C là điểm chính giữa của cung AB ⇒ AC = BC và $sd\,AC = sd\,BC = 90^0$

Xét 2 tam giác MAC và EBC có

MA= EB(gt), AC = CB(cmt) và MAC = MBC vì cùng chắn cung MC của (O)

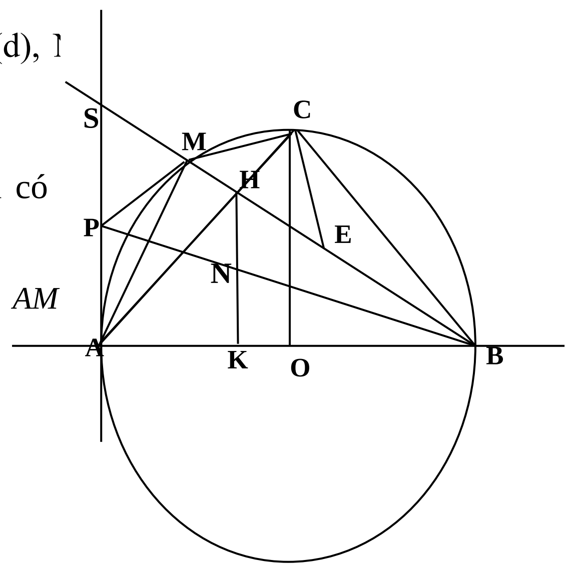
⇒MAC và EBC (cgc) ⇒ CM = CE ⇒ tam giác MCE cân tại C (1)

Ta lại có $CMB = 45^0$ (vì chắn cung $CB = 90^0$)

$\Rightarrow CEM = CMB = 45^0$ (tính chất tam giác MCE cân tại C)

Mà $CME + CEM + MCE = 180^0$ (Tính chất tổng ba góc trong tam giác)$\Rightarrow MCE = 90^0$ (2)

Từ (1), (2) ⇒tam giác MCE là tam giác vuông cân tại C (đpcm).



4) Gọi S là giao điểm của BM và đường thẳng (d), N giao điểm của BP với HK.

Xét ΔPAM và Δ OBM :

Theo giả thiết ta có $\frac{AP.MB}{MA} = R \Leftrightarrow \frac{AP}{MA} = \frac{OB}{MB}$ (vì có OB).

Mặt khác ta có $PAM = ABM$ (vì cùng chắn cung AM (O))

⇒ ΔPAM ∽ Δ OBM

$\Rightarrow \frac{AP}{PM} = \frac{OB}{OM} = 1 \Rightarrow PA = PM$.(do OB = OM = R) (3)

Vì $AMB = 90^0$ (do chắn nửa đtròn(O))$\Rightarrow AMS = 90^0$

⇒ tam giác AMS vuông tại M. ⇒ $PAM + PSM = 90^0$ và $PMA + PMS = 90^0$ } $\Rightarrow PMS = PSM \Rightarrow PS = PM$ (4)

Mà PM = PA(cmt) nên $PAM = PMA$

Từ (3) và (4) ⇒ PA = PS hay P là trung điểm của AS.

Vì HK//AS (cùng vuông góc AB) nên theo ĐL Ta-lét, ta có: $\frac{NK}{PA} = \frac{BN}{BP} = \frac{HN}{PS}$

hay $\frac{NK}{PA} = \frac{HN}{PS}$

Mà PA = PS(cmt) $\Rightarrow NK = NH$ hay BP đi qua trung điểm N của HK. (đpcm)

Bài V: (0,5 điểm) Đối với bài toán này, thầy gợi ý một số cách giải sau để các em có thể lựa chọn.

<u>Cách 1</u>*(không sử dụng BĐT Co Si)*

Ta có M = $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(x^2 - 4xy + 4y^2) + 4xy - 3y^2}{xy} = \frac{(x-2y)^2 + 4xy - 3y^2}{xy} = \frac{(x-2y)^2}{xy} + 4 - \frac{3y}{x}$

Vì $(x - 2y)^2 \geq 0$, dấu "=" xảy ra ⇔ x = 2y

$x \ge 2y \Rightarrow \frac{y}{x} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-3y}{x} \ge \frac{-3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Từ đó ta có $M \ge 0 + 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$, đạt được khi x = 2y

Cách 2: Ta có $M = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = (\frac{x}{4y} + \frac{y}{x}) + \frac{3x}{4y}$

Vì x, y > 0 , áp dụng bdt Co si cho 2 số dương $\frac{x}{4y};\frac{y}{x}$ ta có $\frac{x}{4y} + \frac{y}{x} \ge 2\sqrt{\frac{x}{4y}.\frac{y}{x}} = 1$,

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vì $x \ge 2y \Rightarrow \frac{x}{y} \ge 2 \Rightarrow \frac{3}{4}.\frac{x}{y} \ge \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Từ đó ta có $M \ge 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$, đạt được khi x = 2y

Cách 3: Ta có $M = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = (\frac{x}{y} + \frac{4y}{x}) - \frac{3y}{x}$

Vì x, y > 0 , áp dụng bdt Co si cho 2 số dương $\frac{x}{y};\frac{4y}{x}$ ta có $\frac{x}{y} + \frac{4y}{x} \ge 2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{4y}{x}} = 4$,

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vì $x \ge 2y \Rightarrow \frac{y}{x} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-3y}{x} \ge \frac{-3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Từ đó ta có $M \ge 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$, đạt được khi x = 2y

Cách 4: Ta có $M = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{\frac{4x^2}{4}+y^2}{xy} = \frac{\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{3x^2}{4}}{xy} = \frac{\frac{x^2}{4}+y^2}{xy} + \frac{3x^2}{4xy} = \frac{\frac{x^2}{4}+y^2}{xy} + \frac{3x}{4y}$

Vì x, y > 0 , áp dụng bdt Co si cho 2 số dương $\frac{x^2}{4};y^2$ ta có $\frac{x^2}{4} + y^2 \ge 2\sqrt{\frac{x^2}{4}.y^2} = xy$,

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vì $x \ge 2y \Rightarrow \frac{x}{y} \ge 2 \Rightarrow \frac{3}{4}.\frac{x}{y} \ge \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Từ đó ta có $M \ge \frac{xy}{xy} + \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2y

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$, đạt được khi x = 2y

KỲ THI TUYỂN SINH THPT
MÔN THI: TOÁN
(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)
ĐỀ SỐ 4
---*---**

Câu 1: (2.0 điểm) Cho biểu thức : $P=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\frac{1}{2a\sqrt{a}}$, (Với a > 0 , a ≠1)

1. Chứng minh rằng : $P=\frac{2}{a-1}$ 2. Tìm giá trị của a để P = a

Câu 2 (2,0 điểm) : Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : y = 2x + 3

1. Chứng minh rằng (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt
2. Gọi A và B là các điểm chung của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc toạ độ)

Câu 3 (2.0 điểm) : Cho phương trình : $x^2 + 2mx + m^2 – 2m + 4 = 0$

1. Giải phương trình khi m = 4
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt

Câu 4 (3.0 điểm) : Cho đường tròn (O) có đòng kính AB cố định, M là một điểm thuộc (O) (M khác A và B) . Các tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau ở C. Đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C. CD là đòng kính của (I). Chứng minh rằng:

1. Ba điểm O, M, D thẳng hàng
2. Tam giác COD là tam giác cân
3. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O)

Câu 5 (1.0 điểm) : Cho a,b,c là các số dương không âm thoả mãn : $a^2+b^2+c^2=3$

Chứng minh rằng : $\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3}\le\frac{1}{2}$

ĐÁP ÁN- GỢI Ý GIẢI ĐỀ SỐ 4

CÂU	NỘI DUNG
1	1. Chứng minh rằng : $P=\frac{2}{a-1}$ $P=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\frac{1}{2a\sqrt{a}}$

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>

$$P=\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2+4\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}.\frac{1}{2a\sqrt{a}}$$

$$P=\frac{a+2\sqrt{a}+1-a+2\sqrt{a}-1+4a\sqrt{a}-4\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}.\frac{1}{2a\sqrt{a}}$$

$$P=\frac{4a\sqrt{a}}{a-1}.\frac{1}{2a\sqrt{a}}=\frac{2}{a-1}\ \text{(ĐPCM)}$$

</td></tr>
<tr><td>

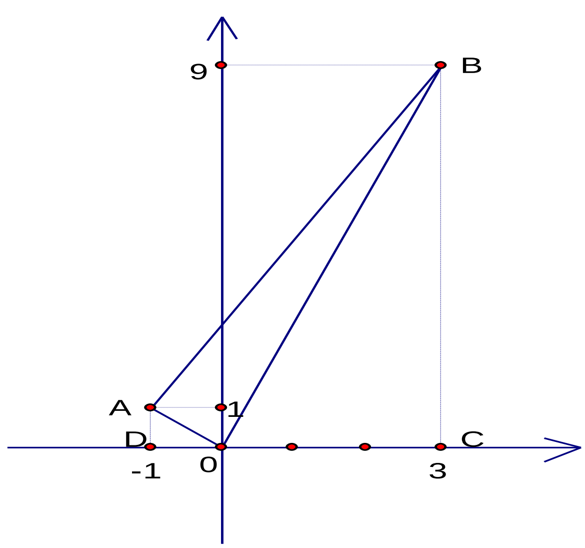
2. Tìm giá trị của a để P = a. P = a => $\frac{2}{a-1}=a \Rightarrow a^2-a-2=0$.
Ta có 1 + 1 + (-2) = 0, nên phương trình có 2 nghiệm $a_1 = -1 < 0$ (không thoả mãn) - Loại
$a_2 = \frac{-c}{a}=\frac{2}{1}=2$ (Thoả mãn điều kiện)Vậy a = 2 thì P = a

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>

1. Chứng minh rằng (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt
Hoành độ giao điểm đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình
$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ có a – b + c = 0
Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt
$x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{-c}{a}=\frac{3}{1}=3$ Với $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$
Với $x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3^2 = 9 \Rightarrow B(3; 9)$Vậy (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt A và B

</td></tr>
<tr><td>

2. Gọi A và B là các điểm chung của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc toạ độ)
Ta biểu diễn các điểm A và B trên mặt phẳng toạ độ Oxy như hình vẽ

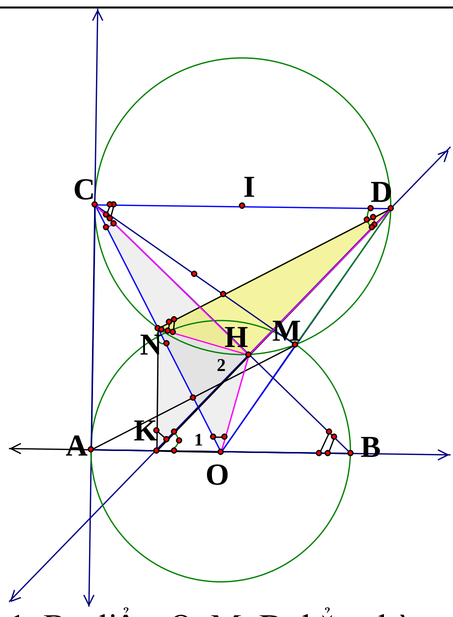


$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}.DC=\frac{1+9}{2}.4=20$$

$$S_{BOC}=\frac{BC.CO}{2}=\frac{9.3}{2}=13,5$$

$$S_{AOD}=\frac{AD.DO}{2}=\frac{1.1}{2}=0,5$$

</td></tr>
</table>

	Theo công thức cộng diện tích ta có: $S_{(ABC)} = S_{(ABCD)} - S_{(BCO)} - S_{(ADO)}$ $= 20 – 13,5 – 0,5 = 6$ (đvdt)
3	1. Khi m = 4, ta có phương trình $x^2 + 8x + 12 = 0$ có $\Delta' = 16 – 12 = 4 > 0$ Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = - 4 + 2 = - 2$ và $x_2 = - 4 - 2 = - 6$
	2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x^2 + 2mx + m^2 – 2m + 4 = 0$ Có $D' = m^2 – (m^2 – 2m + 4) = 2m – 4$ Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì D' > 0 => 2m – 4 > 0 => 2(m – 2) > 0 => m – 2 > 0 => m > 2 Vậy với m > 2 thì phương trình có hai nghiệm phân biệt
4	 1. Ba điểm O, M, D thẳng hàng: Ta có MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow$ MC $\perp$ MO (1) Xét đường tròn (I) : Ta có $CMD = 90^0$ $\Rightarrow$ MC $\perp$ MD (2) Từ (1) và (2) => MO // MD $\Rightarrow$ MO và MD trùng nhau $\Rightarrow$ O, M, D thẳng hàng www.VNMATH.com
	2. Tam giác COD là tam giác cân CA là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow$ CA $\perp$AB(3) Đờng tròn (I) tiếp xúc với AC tại C $\Rightarrow$ CA $\perp$ CD(4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ CD // AB => $DCO = COA$ (*) (Hai góc so le trong) CA, CM là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O) $\Rightarrow$ $COA = COD$ (**) Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ $DOC = DCO$ $\Rightarrow$ Tam giác COD cân tại D

	3. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đờng tròn (O) * Gọi chân đường vuông góc hạ từ D tới BC là H. $CHD = 90^0 \Rightarrow$ H $\in$ (I) (Bài toán quỹ tích) DH kéo dài cắt AB tại K. Gọi N là giao điểm của CO và đường tròn (I) $=> \begin{cases} CND = 90^0 \\ \Delta COD \text{ can tai D} \end{cases} \Rightarrow NC = NO$ Ta có tứ giác NHOK nội tiếp Vì có $H_2 = O_1 = DCO$ (Cùng bù với góc DHN) $\Rightarrow NHO + NKO = 180^0$ (5) * Ta có : $NDH = NCH$ (Cùng chắn cung NH của đường tròn (I)) $CBO = HND\left(= HCD\right) \Rightarrow \Delta DHN \backsim \Delta COB$ (g.g) $\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{HN}{HD} = \dfrac{OB}{OC} \\ ... \Rightarrow \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OA}{OC} \\ ... \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{CN}{CD} = \dfrac{ON}{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{HN}{HD} = \dfrac{ON}{CD}$ Mà $ONH = CDH$ $\Rightarrow \Delta NHO \backsim \Delta DHC$ (c.g.c) $\Rightarrow NHO = 90^0$ Mà $NHO + NKO = 180^0$ (5) $\Rightarrow NKO = 90^0$, $\Rightarrow$ NK $\perp$ AB $\Rightarrow$ NK // AC $\Rightarrow$ K là trung điểm của OA cố định $\Rightarrow$ (ĐPCM)
5	**<u>Câu 5</u>** (1.0 điểm) : Cho a,b,c là các số dơng không âm thoả mãn : $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{a^2+2b+3} + \dfrac{b}{b^2+2c+3} + \dfrac{c}{c^2+2a+3} \le \dfrac{1}{2}$ * C/M bổ đề: $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \ge \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$ và $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{x} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$. Thật vậy $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \ge \dfrac{(a+b)^2}{x+y} <=> \left(a^2y + b^2x\right)(x+y) \ge xy(a+b)^2 <=> (ay - bx)^2 \ge 0$ (Đúng) $\Rightarrow$ ĐPCM Áp dụng 2 lần , ta có: $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{x} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ * Ta có : $a^2 + 2b + 3 = a^2 + 2b + 1 + 2 \ge 2a + 2b + 2$, tương tự Ta có: … $\Rightarrow$ $A = \dfrac{a}{a^2+2b+3} + \dfrac{b}{b^2+2c+3} + \dfrac{c}{c^2+2a+3} \le \dfrac{a}{2a+2b+2} + \dfrac{b}{2b+2c+2} + \dfrac{c}{2c+2a+2}$ $\Leftrightarrow A \le \dfrac{1}{2}\underbrace{\left(\dfrac{a}{a+b+1} + \dfrac{b}{b+c+1} + \dfrac{c}{c+a+1}\right)}_{B}$ (1)

	Ta chứng minh $\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\le 1$ $\Leftrightarrow \frac{a}{a+b+1}-1+\frac{b}{b+c+1}-1+\frac{c}{c+a+1}-1\le -2$ $\Leftrightarrow \frac{-b-1}{a+b+1}+\frac{-c-1}{b+c+1}+\frac{-a-1}{c+a+1}\le -2$ $\Leftrightarrow \frac{b+1}{a+b+1}+\frac{c+1}{b+c+1}+\frac{a+1}{c+a+1}\ge 2$ $\Leftrightarrow \underbrace{\frac{(b+1)^2}{(a+b+1)(b+1)}+\frac{(c+1)^2}{(b+c+1)(c+1)}+\frac{(a+1)^2}{(c+a+1)(a+1)}}_{3-B}\ge 2 \quad (2)$ Áp dụng Bổ đề trên ta có: $\Rightarrow 3-B\ge \frac{(a+b+c+3)^2}{(a+b+1)(b+1)+(b+c+1)(c+1)+(c+a+1)(a+1)}$ $\Leftrightarrow 3-B\ge \frac{(a+b+c+3)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3(a+b+c)+3} \qquad (3)$ * Mà: $2\left[a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3(a+b+c)+3\right]$ $=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca+6a+6b+6c+6$ $=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca+6a+6b+6c+6\ (Do: a^2+b^2+c^2=3)$ $=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+6a+6b+6c+9$ $=(a+b+c+3)^2$ $\Rightarrow \frac{(a+b+c+3)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3(a+b+c)+3}=2 \qquad (4)$ Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ (2) Kết hợp (2) và (1) ta có điều phải chứng minh. Dấu = xảy ra khi a = b = c = 1

KỲ THI TUYỂN SINH THPT

MÔN THI: TOÁN

(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)

ĐỀ SỐ 5

---*---**

Câu 1: 2,5 điểm: Cho biểu thức A = $\left(\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right).\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện xác định và tú gọn A. b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A>\frac{1}{2}$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $B = \frac{7}{3}A$ đạt giá trị nguyên.

Câu 2: 1,5 điểm:Quảng đường AB dài 156 km. Một người đi xe máy tử A, một người đi xe đạp từ B. Hai xe xuất phát cùng một lúc và sau 3 giờ gặp nhau. Biết rằng vận tốc của người đI xe máy nhanh hơn vận tốc của người đI xe đạp là 28 km/h. Tính vận tốc của mỗi xe?

Câu 3: 2 điểm:Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ (m là tham số).

a) GiảI phương trình khi m = 3

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 16$

Câu 4: 4 điểmCho điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Vẽ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đI qua tâm O (C nằm giữa M và D), OM cắt AB và (O) lần lượt tại H và I. Chứng minh.

a) Tứ giác MAOB nội tiếp. b. MC.MD = MA^2 c. OH.OM + MC.MD = MO^2

d.CI là tia phân giác góc MCH.

GỢI Ý – ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 5

Câu 1: (2,5 điểm)a, Với x > 0 và x $\neq$ 4, ta có:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}\right).\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}.\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = ... = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$$

b, $A = \frac{2}{\sqrt{x}+2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x > 4.$

c, $B = \frac{7}{3}.\frac{2}{\sqrt{x}+2} = \frac{14}{3(\sqrt{x}+2)}$ là một số nguyên $\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$ $\sqrt{x}+2$ là ước của 14 hay $\sqrt{x}+2 = \pm 1$, $\sqrt{x}+2 = \pm 7$, $\sqrt{x}+2 = \pm 14$.(Giải các pt trên và tìm x)

Câu 2: (1,5 điểm)Gọi vân tốc của xe đạp là x (km/h), điều kiện x > 0

Thì vận tốc của xe máy là x + 28 (km/h)

Trong 3 giờ:

+ Xe đạp đi được quãng đường 3x (km),

+ Xe máy đi được quãng đường 3(x + 28) (km), theo bài ra ta có phương trình:

3x + 3(x + 28) = 156

Giải tìm x = 12 (TMĐK)

Trả lời: Vận tốc của xe đạp là 12 km/h và vận tốc của xe máy là 12 + 28 = 40 (km/h)

Câu 3: (2,0 điểm)

a, Thay x = 3 vào phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 6 = 0$ và giải phương trình:

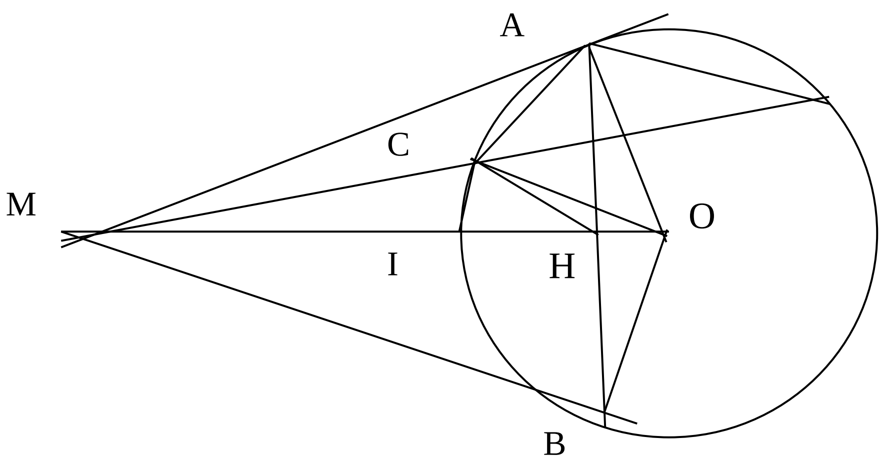
$x^2 - 4x + 3 = 0$ bằng nhiều cách và tìm được nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

b, Theo hệ thức Viét, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 6 = 0$, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = m^2 - 6 \end{cases}$

và $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 16$ Thay vào giải và tìm được m = 0, m = -4

CÂU 4



a, Vì MA, MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B nên các góc của tứ giác MAOB vuông tại A và B, nên nội tiếp được đường tròn.

b, ΔMAC và ΔMDA có chung M và $MAC = MDA$ (cùng chắn AC), nên đồng dạng. Từ đó suy ra $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA} \Rightarrow MC.MD = MA^2$ (đfcm)

c, ΔMAO và ΔAHO đồng dạng vì có chung góc O và $AMO = HAO$ (cùng chắn hai cung bằng nhau của đường tròn nội tiếp tứ giác MAOB). Suy ra $OH.OM = OA^2$

Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông MAO và các hệ thức $OH.OM = OA^2$ $MC.MD = MA^2$ để suy ra điều phải chứng minh.

d, Từ $MH.OM = MA^2$, $MC.MD = MA^2$ suy ra $MH.OM = MC.MD \Rightarrow \frac{MH}{MD} = \frac{MC}{MO}$ (*)

Trong ΔMHC và ΔMDO có (*) và DMO chung nên đồng dạng.

$\Rightarrow \frac{MC}{HC} = \frac{MO}{MD} = \frac{MO}{OA}$ hay $\frac{MC}{CH} = \frac{MO}{OA}$ (1)

Ta lại có $MAI = IAH$ (cùng chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow$ AI là phân giác của MAH.

Theo t/c đường phân giác của tam giác, ta có: $\frac{MI}{IH} = \frac{MA}{AH}$ (2)

ΔMHA và ΔMAO có OMA chung và $MHA = MAO = 90^0$ do đó đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \frac{MO}{OA} = \frac{MA}{AH}$ (3) Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{MC}{CH} = \frac{MI}{IH}$ suy ra CI là tia phân giác của góc MCH

KỲ THI TUYỂN SINH THPT
MÔN THI: TOÁN
(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)
ĐỀ SỐ 6
---*---**

Câu I: (2,5 điểm)

1. Thực hiện phép tính: a) $\sqrt[3]{2-10} - \sqrt{36+64}$ b) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-5\right)^3}$.

2. Cho biểu thức: P = $\frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{1}{1-\sqrt{a}}$

a) Tìm điều kiện của a để P xác định b) Rút gọn biểu thức P.

Câu II: (1,5 điểm)

1. Cho hai hàm số bậc nhất y = -x + 2 và y = (m+3)x + 4. Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho là:

   a) Hai đường thẳng cắt nhau

   b) Hai đường thẳng song song.

2. Tìm các giá trị của a để đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm M(-1; 2).

Câu III: (1,5 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 - 7x - 8 = 0$

2. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = -6$

Câu IV: (1,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$.

2. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases}$ có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện

x + y > 1.

Câu V: (3,0 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).
a) Chứng minh AMOC là tứ giác nội tiếp đường tròn.b) Chứng minh AMDE là tứ giác nội tiếp đường tròn.
c) Chứng mình ADE = ACO

ĐÁP ÁN – GỢI Ý GIẢI ĐỀ SỐ 6

Câu I: (2,5 điểm)1. Thực hiện phép tính:

$$a)\sqrt[3]{2-10}-\sqrt{36+64}=\sqrt[3]{-8}-\sqrt{100}=-2-10=-12$$

$$b)\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-5\right)^3}=\left|\sqrt{2}-3\right|+\sqrt{2}-5=3-\sqrt{2}+\sqrt{2}-5=-2$$

2. Cho biểu thức: P = $\dfrac{2a^2+4}{1-a^3}-\dfrac{1}{1+\sqrt{a}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{a}}$

a) Tìm điều kiện của a để P xác định: P xác định khi $a\ge 0$ và $a\ne 1$

b) Rút gọn biểu thức P.

$$P=\frac{2a^2+4}{1-a^3}-\frac{1}{1+\sqrt{a}}-\frac{1}{1-\sqrt{a}}=\frac{2a^2+4-\left(1-\sqrt{a}\right)\left(a^2+a+1\right)-\left(1+\sqrt{a}\right)\left(a^2+a+1\right)}{\left(1-a\right)\left(a^2+a+1\right)}$$

$$=\frac{2a^2+4-a^2-a-1+a^2\sqrt{a}+a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a-1-a^2\sqrt{a}-a\sqrt{a}-\sqrt{a}}{\left(1-a\right)\left(a^2+a+1\right)}$$

$$=\frac{2-2a}{\left(1-a\right)\left(a^2+a+1\right)}=\frac{2}{a^2+a+1}$$

Vậy với $a\ge 0$ và $a\ne 1$ thì P = $\dfrac{2}{a^2+a+1}$

Câu II: (1,5 điểm)

1. Cho hai hàm số bậc nhất y = -x + 2 và y = (m+3)x + 4. Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho là:

a) Để hàm số y = (m+3)x + 4 là hàm số bậc nhất thì m + 3 $\ne$ 0 suy ra m $\ne$ -3.
Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow$ a $\ne$ a’
$\Leftrightarrow$ -1 $\ne$ m+3 $\Leftrightarrow$ m $\ne$ -4
Vậy với m $\ne$ -3 và m $\ne$ -4 thì đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau.

b) Đồ thị của hàm số đã cho là Hai đường thẳng song song

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=a'\\ b\ne b'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=m+3\\ 2\ne 4\end{cases}\Leftrightarrow m=-4$ thỏa mãn điều kiện m $\ne$ -3

Vậy với m = -4 thì đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song.

2. Tìm các giá trị của a để đồ thị hàm số y = ax^2 (a $\ne$ 0) đi qua điểm M(-1; 2).

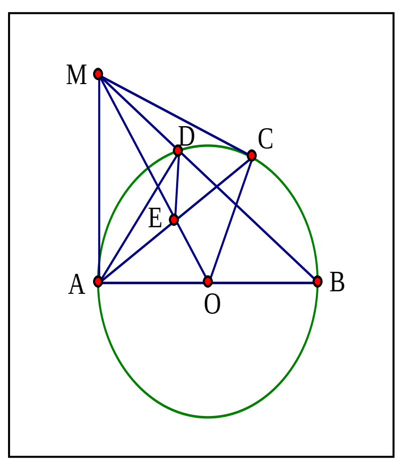
Vì đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm M(-1; 2) nên ta thay x = -1 và y = 2 vào hàm số ta có phương trình $2 = a.(-1)^2$ suy ra a = 2 (thỏa mãn điều kiện $a \neq 0$)
Vậy với a = 2 thì đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm M(-1; 2).

Câu III: (1,5 điểm)
1. Giải phương trình $x^2 - 7x - 8 = 0$ có a – b + c = 1 + 7 – 8 = 0 suy ra $x_1 = -1$ và $x_2 = 8$

2. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = -6$.
Để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$
Theo viet ta có: $x_1 + x_2 = 2$ (1) và $x_1 . x_2 = m - 3$ (2)
Theo đầu bài: $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = -6 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6$ (3)
Thế (1) và (2) vào (3) ta có: $(m - 3)(2)^2 - 2(m-3) = 6 \Leftrightarrow 2m = 12 \Leftrightarrow m = 6$ Không thỏa mãn điều kiện $m \leq 4$ vậy không có giá trị nào của m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = -6$.
Câu IV: (1,5 điểm)
1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3y-2) - 2y = 1 \\ x = 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 7 \\ x = 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$
2. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases}$ có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện x + y > 1.
$\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5m \\ 2x - y = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ 2m - y = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = m + 1 \end{cases}$
Mà x + y > 1 suy ra $m + m + 1 > 1 \Leftrightarrow 2m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.
Vậy với m > 0 thì hệ phương trình có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện x + y > 1.

Câu V: (3,0 điểm

HD Giải.



a) $MAO = MCO = 90^0$ nên tứ giác AMCO nội tiếp
b) $MEA = MDA = 90^0$. Tứ giác AMDE có
D, E cùng nhìn AM dưới cùng một góc 90^0
Nên AMDE nội tiếp
c) Vì AMDE nội tiếp nên $ADE = AME$ cùng chan cung AE
Vì AMCO nội tiếp nên $ACO = AME$ cùng chan cung AO
Suy ra $ADE = ACO$

MÔN THI: TOÁN
(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)
ĐỀ SỐ 7
---*---**

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $Q=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$, với $x>0, x\neq 1$

a. Rút gọn biểu thức Q

b. Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên.

Câu 2. *(1,5 điểm)*

Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m-2=0$, với x là ẩn số, $m\in R$

a. Giải phương trình đã cho khi m = – 2

b. Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 mà không phụ thuộc vào m.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\ x+(m-2)y=2\end{cases}$, với $m\in R$

a. Giải hệ đã cho khi m = –3

b. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Cho hàm số $y=-x^2$ có đồ thị (P). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M(0;1) và có hệ số góc k.

a. Viết phương trình của đường thẳng d

b. Tìm điều kiện của k để đt d cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt.

Câu 5. *(2,5 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC < BC) nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của tam giác ABC $(D\in AC, E\in AB)$

a. Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp trong một đường tròn

b. Gọi I là điểm đối xứng với A qua O và J là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, J, I thẳng hàng

c. Gọi K, M lần lượt là giao điểm của AI với ED và BD. Chứng minh rằng $\frac{1}{DK^2}=\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DM^2}$

ĐÁP ÁN – GỢI Ý GIẢI ĐỀ SỐ 7

Câu 1.	

a. $Q=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)$ $=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1+1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-1-1}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}$ $=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{x-1}.\sqrt{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}.\sqrt{x}=\dfrac{2x}{x-1}$ Vậy $Q=\dfrac{2x}{x-1}$	
b. Q nhận giá trị nguyên $Q=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2x-2+2}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$ $Q\in\mathbb{Z}$ khi $\dfrac{2}{x-1}\in\mathbb{Z}$ khi 2 chia hết cho $x-1$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=\pm1\\x-1=\pm2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-1\\x=3\end{array}\right.$ đối chiếu điều kiện thì $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$	
Câu 2. Cho pt $x^2-2(m+1)x+m-2=0$, với x là ẩn số, $m\in R$ **a.** Giải phương trình đã cho khi m = – 2 Ta có phương trình $x^2+2x-4=0$ $x^2+2x-4=0\Leftrightarrow x^2+2x+1=5\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2=5=\left(\sqrt{5}\right)^2$ $\Leftrightarrow\left\|x+1\right\|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=-\sqrt{5}\\x+1=\sqrt{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{5}\\x=-1+\sqrt{5}\end{array}\right.$ Vậy phương trinh có hai nghiệm $x=-1-\sqrt{5}$ và $x=-1+\sqrt{5}$	
b. Theo Vi-et, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m+2 & (1)\\x_1x_2=m-2 & (2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=2m+2\\m=x_1x_2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=2\left(x_1x_2+2\right)+2\\m=x_1x_2+2\end{cases}$ Suy ra $x_1+x_2=2\left(x_1x_2+2\right)+2\Leftrightarrow x_1+x_2-2x_1x_2-6=0$	
Câu 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\x+(m-2)y=2\end{cases}$, với $m\in R$ **a. Giải hệ đã cho khi m = –3** Ta được hệ phương trình $\begin{cases}-2x+2y=-12\\x-5y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=-6\\x-5y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=1\end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)$ với $\left(7;1\right)$	

b. Điều kiện có nghiệm của phương trình

$$\frac{m+1}{1} \neq \frac{-(m+1)}{m-2} \Leftrightarrow (m+1)(m-2) \neq -(m+1)$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-2)+(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \neq -1$ và $m \neq 1$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x-(m+1)y = 4m \\ x+(m-2)y = 2 \end{cases}$ khi $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} (m+1)x-(m+1)y = 4m \\ x+(m-2)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \dfrac{4m}{m+1} \\ x+(m-2)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+\dfrac{4m}{m+1} \\ y = \dfrac{-2}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4m-2}{m+1} \\ y = \dfrac{-2}{m+1} \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm (x; y) với $\left(\dfrac{4m-2}{m+1}; \dfrac{-2}{m+1}\right)$

Câu 4.

a. Viết phương trình của đường thẳng d

Đường thẳng d với hệ số góc k có dạng $y = kx+b$

Đường thẳng d đi qua điểm M(0; 1) nên $1 = k.0+b \Leftrightarrow b = 1$

Vậy $d: y = kx+1$

b.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d

$-x^2 = kx+1 \Leftrightarrow x^2+kx+1 = 0$, có $\Delta = k^2-4$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi $\Delta > 0$

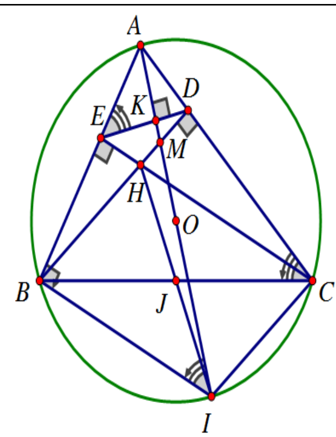
$$k^2-4 > 0 \Leftrightarrow k^2 > 4 \Leftrightarrow k^2 > 2^2 \Leftrightarrow |k| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k < -2 \\ k > 2 \end{array}\right.$$

Câu 5.

a. BCDE nội tiếp

$\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^0$

Suy ra BCDE nội tiếp đường tròn đường kính BC



b. H, J, I thẳng hàng

IB ⊥ AB; CE ⊥ AB (CH ⊥ AB)

Suy ra IB // CH

IC ⊥ AC; BD ⊥ AC (BH ⊥ AC)

Suy ra BH // IC

Như vậy tứ giác BHCI là hình bình hành

J trung điểm BC $\Rightarrow$ J trung điểm IH

Vậy H, J, I thẳng hàng

c. $ACB = AIB = \frac{1}{2}AB$ $ACB = DEA$ cùng bù với góc DEB của tứ giác nội tiếp BCDE $BAI + AIB = 90^0$ vì ΔABI vuông tại B Suy ra $BAI + AED = 90^0$, hay $EAK + AEK = 90^0$ Suy ra ΔAEK vuông tại K Xét ΔADM vuông tại M (suy từ giả thiết) $DK \perp AM$ (suy từ chứng minh trên) Như vậy $\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DM^2}$	

KỲ THI TUYỂN SINH THPT
MÔN THI: TOÁN
(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)
ĐỀ SỐ 8
---*---**

Bài 1: *(3, 0 điểm)* Học sinh không sử dụng máy tính bỏ túi

a) Giải phương trình: $2x – 5 = 0$ b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y - x = 2 \\ 5x - 3y = 10 \end{cases}$

b) Rút gọn biểu thức $A = \frac{5\sqrt{a} - 3}{\sqrt{a} - 2} + \frac{3\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} - \frac{a^2 + 2\sqrt{a} + 8}{a - 4}$ với $a \geq 0, a \neq 4$

c) Tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

Bài 2: *(2, 0 điểm)* Cho parabol (P) và đường thẳng (d) có phương trình lần lượt là $y = mx^2$ và $y = (m-2)x + m - 1$ (m là tham số, $m \neq 0$).

a) Với $m = -1$, tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 3: *(2, 0 điểm)*Quãng đường từ Quy Nhơn đến Bồng Sơn dài 100 km. Cùng một lúc, một xe máy khởi hành từ Quy Nhơn đi Bồng Sơn và một xe ô tô khởi hành từ Bồng Sơn đi Quy Nhơn. Sau khi hai xe gặp nhau, xe máy đi 1 giờ 30 phút nữa mới đến Bồng Sơn. Biết vận tốc hai xe không thay đổi trên suốt quãng đường đi và vận tốc của xe máy kém vận tốc xe ô tô là 20 km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

Bài 4: *(3, 0 điểm)* Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Gọi C là trung điểm của OA, qua C kẻ dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

a) Chứng minh tứ giác BCHK là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AK.AH = R^2$

Trên KN lấy điểm I sao cho KI = KM, chứng minh NI = KB.

ĐÁP ÁN – GỢI Ý GIẢI ĐỀ SỐ 8

Bài 1:

a) $2x – 5 = 0$ $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

b) $\begin{cases} y-x=2 \\ 5x-3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+5y=10 \\ 5x-3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=20 \\ y-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10 \\ x=8 \end{cases}$

c)

$$A=\frac{5\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}-2}+\frac{3\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}-\frac{a^2+2\sqrt{a}+8}{a-4}=\frac{\left(5\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+2\right)+\left(3\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-2\right)-\left(a^2+2\sqrt{a}+8\right)}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}$$

$$=\frac{5a+10\sqrt{a}-3\sqrt{a}-6+3a-6\sqrt{a}+\sqrt{a}-2-a^2-2\sqrt{a}-8}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}=\frac{-a^2+8a-16}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}=\frac{-\left(a^2-8a+16\right)}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}$$

$$=\frac{-(a-4)^2}{a-4}=-(a-4)=4-a$$

d) $B=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left|\sqrt{3}+1\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}=3$

Bài 2:

a) Với $m=-1$ (P) và (d) lần lượt trở thành $y=-x^2$; $y=x-2$.

Lúc đó phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $-x^2=x-2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$ có $a+b+c=1+1-2=0$ nên có hai nghiệm là $x_1=1$; $x_2=-2$.

Với $x_1=1 \Rightarrow y_1=-1$ Với $x_2=-2 \Rightarrow y_2=-4$ Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1;-1)$ và $(-2;-4)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$mx^2=(m-2)x+m-1 \Leftrightarrow mx^2-(m-2)x-m+1=0\ (*)$.

Với $m\neq 0$ thì $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn x có

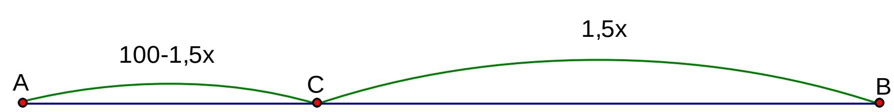
$\Delta=(m-2)^2-4m(-m+1)=m^2-4m+4+4m^2-4m=5m^2+4>0$ với mọi m. Suy ra $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Hay với mọi $m\neq 0$ đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 3:

Đổi $1h30'=1,5h$

Đặt địa điểm :

- Quy Nhơn là A
- Hai xe gặp nhau là C
- Bồng Sơn là B



Gọi vận tốc của xe máy là $x(km/h)$. ĐK : $x>0$.

Suy ra :

Vận tốc của ô tô là $x+20\ (km/h)$.

Quãng đường BC là : $1,5x(km)$

Quãng đường AC là : $100-1,5x\ (km)$

Thời gian xe máy đi từ A đến C là : $\dfrac{100-1,5x}{x}\,(h)$

Thời gian ô tô máy đi từ B đến C là : $\dfrac{1,5x}{x+20}\,(h)$

Vì hai xe khởi hành cùng lúc, nên ta có phương trình : $\dfrac{100-1,5x}{x}=\dfrac{1,5x}{x+20}$

Giải pt :

$$\frac{100-1,5x}{x}=\frac{1,5x}{x+20}\Rightarrow(100-1,5x)(x+20)=1,5x^2\Rightarrow 100x+2000-1,5x^2-30x=1,5x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2-70x-2000=0$$

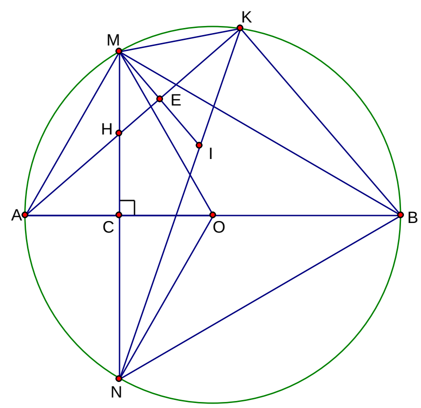
$\Delta'=35^2+3.2000=1225+6000=7225>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\sqrt{7225}=85$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1=\dfrac{35+85}{3}=40$ (thỏa mãn ĐK)

$x_2=\dfrac{35-85}{3}=-\dfrac{50}{3}$ (không thỏa mãn ĐK)

Vậy vận tốc của xe máy là $40\,km/h$.

Vận tốc của ô tô là $40+20=60\,(km/h)$.



Bài 4:

a) *Tứ giác BCHK là tứ giác nội tiếp*.

Ta có : $AKB=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

hay $HKB=90^0$; $HCB=90^0\,(gt)$

Tứ giác BCHK có $HKB+HCB=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác BCHK là tứ giác nội tiếp.

b) $AK.AH=R^2$

Dễ thấy $\Delta ACH \backsim \Delta AKB\,(g.g)\Rightarrow\dfrac{AC}{AK}=\dfrac{AH}{AB}\Rightarrow AK.AH=AC.AB=\dfrac{R}{2}\cdot 2R=R^2$

c) $NI=KB$

ΔOAM có $OA=OM=R\,(gt)\Rightarrow\Delta OAM$ cân tại O (1)

ΔOAM có MC là đường cao đồng thời là đường trung tuyến *(gt)* $\Rightarrow\Delta OAM$ cân tại M (2)

$(1)\&(2)\Rightarrow\Delta OAM$ là tam giác đều $\Rightarrow MOA=60^0\Rightarrow MON=120^0\Rightarrow MKI=60^0$

ΔKMI là tam giác cân *(KI = KM)* có $MKI=60^0$ nên là tam giác đều $\Rightarrow MI=MK$ (3).

Dễ thấy ΔBMK cân tại B có $MBN=\dfrac{1}{2}MON=\dfrac{1}{2}\cdot 120^0=60^0$ nên là tam giác đều $\Rightarrow MN=MB$ (4)

Gọi E là giao điểm của AK và MI.

Dễ thấy $\left.\begin{array}{l} NKB=NMB=60^0\\ MIK=60^0\end{array}\right\}\Rightarrow NKB=MIK\Rightarrow$ KB // MI (vì có cặp góc ở vị trí so le trong bằng nhau) mặt khác $AK\perp KB$ (cmt) nên $AK\perp MI$ tại E $\Rightarrow HME=90^0-MHE$.

$$\text{Ta có : }\left.\begin{array}{l} HAC = 90^0 - AHC \\ HME = 90^0 - MHE\ (cmt) \\ AHC = MHE\ (\text{dd}) \end{array}\right\} \Rightarrow HAC = HME \text{ mặt khác } HAC = KMB \text{ (cùng chắn } KB\text{)}$$

$\Rightarrow HME = KMB$ hay $NMI = KMB$ (5)

$(3),(4)\&(5) \Rightarrow \Delta IMN = \Delta KMB(c.g.c) \Rightarrow NI = KB$ *(đpcm)*

KỲ THI TUYỂN SINH THPT
MÔN THI: TOÁN
(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)
ĐỀ SỐ 9
---*---**

Câu 1. (2 điểm)

1.Tính $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}$

2 .Xác định giá trị của a,biết đồ thị hàm số y = ax - 1 đi qua điểm M(1;5)

Câu 2: (3 điểm)

1.Rút gọn biểu thức: $A=\left(\frac{1}{\sqrt{a}-2}-\frac{2}{a-2\sqrt{a}}\right).\left(\frac{a-3\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2}+1\right)$ với a>0,a $\neq$ 4

2.Giải hệ pt: $\begin{cases} 2x-5y=9 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

3. Chứng minh rằng pt: $x^2+mx+m-1=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.
Giả sử x_1,x_2 là 2 nghiệm của pt đã cho,tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$B=x_1^2+x_2^2-4.(x_1+x_2)$

Câu 3: (1,5 điểm)

Một ôtô tải đi từ A đến B với vận tốc 40km/h. Sau 2 giờ 30 phút thì một ôtô taxi cũng xuất phát đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h và đến B cùng lúc với xe ôtô tải.Tính độ dài quãng đường AB.

Câu 4: (3 điểm)

Cho đường tròn (O) và một điểm A sao cho OA=3R. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O),với P và Q là 2 tiếp điểm.Lấy M thuộc đường tròn (O) sao cho PM song song với AQ.Gọi N là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AM và đường tròn (O).Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1.Chứng minh APOQ là tứ giác nội tiếp.

2.Chứng minh KA^2=KN.KP

3.Kẻ đường kính QS của đường tròn (O).Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc PNM .

4. Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK .Tính độ dài đoạn thẳng AG theo bán kính R.

Câu 5: (0,5điểm)

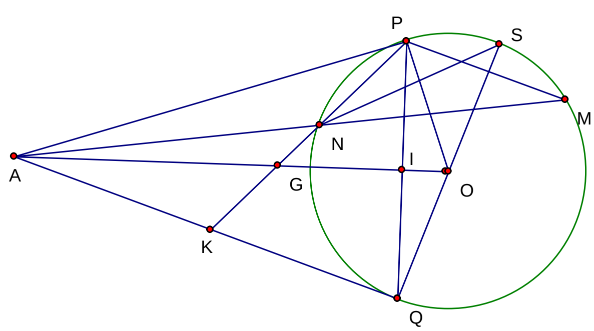
Cho a,b,c là 3 số thực khác không và thoả mãn:

$$\begin{cases} a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=0 \\ a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}=1 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{1}{a^{2013}}+\dfrac{1}{b^{2013}}+\dfrac{1}{c^{2013}}$

ĐÁP ÁN – GỢI Ý GIẢI ĐỀ SỐ 9

Câu	***Ý***	***Nội dung***	***Điểm***
1	*1*	$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}+1)}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1)}-\sqrt{2}=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1$ *KL:*	*1*
	2	*Do đồ thị hàm số y = ax-1 đi qua M(1;5) nên ta có a.1-1=5* $\Rightarrow$ *a=6* *KL:*	*1*
2	*1*	$A=(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}-\dfrac{2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}).(\dfrac{(\sqrt{a}-1).(\sqrt{a}-2)}{\sqrt{a}-2}+1)=$ $=(\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}).(\sqrt{a}-1+1)=\dfrac{1}{\sqrt{a}}.\sqrt{a}=1$ *KL:*	*0,5* *0,5*
	2	$\begin{cases}2x-5y=9\\3x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5y=9\\15x+5y=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5y=9\\17x=34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x=2\end{cases}$ *KL:*	*1*
	3	*Xét Pt:* $x^2+mx+m-1=0$ $\Delta=m^2-4(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2\geq 0$ *Vậy pt luôn có nghiệm với mọi m* *Theo hệ thức Viet ta có* $\begin{cases}x_1+x_2=-m\\x_1x_2=m-1\end{cases}$ *Theo đề bài* $B={x^2}_1+{x^2}_2-4.(x_1+x_2)=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-4.(x_1+x_2)$ $=m^2-2(m-1)-4(-m)=m^2-2m+2+4m=m^2+2m+1+1$ $=(m+1)^2+1\geq 1$ *Vậy minB=1 khi và chỉ khi m = -1* *KL:*	*0,25* 0,25 0,5
3		*Gọi độ dài quãng đường AB là x (km) x>0*	*0,25*

		Thời gian xe tải đi từ A đến B là $\frac{x}{40}$ *h* *Thời gian xe Taxi đi từ A đến B là :* $\frac{x}{60}$ *h* *Do xe tải xuất phát trước 2h30phút =* $\frac{5}{2}$ *nên ta có pt* $\frac{x}{40} - \frac{x}{60} = \frac{5}{2}$ $\Leftrightarrow 3x - 2x = 300$ $\Leftrightarrow x = 300$ *Giá trị x = 300 có thoả mãn ĐK* *Vậy độ dài quãng đường AB là 300 km.*	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
4	1	*Xét tứ giác APOQ có* $APO = 90^0$ *(Do AP là tiếp tuyến của (O) ở P)* $AQO = 90^0$ *(Do AQ là tiếp tuyến của (O) ở Q)* $\Rightarrow APO + AQO = 180^0$ *,mà hai góc này là 2 góc đối nên tứ giác APOQ là tứ giác nội tiếp*  	0,75
	2	*Xét* ΔAKN *và* ΔPAK *có* AKP *là góc chung* $APN = AMP$ *(Góc nt……cùng chắn cung NP)* *Mà* $NAK = AMP$ *(so le trong của PM //AQ* $\Delta AKN \sim \Delta PKA$ *(gg)* $\Rightarrow \frac{AK}{PK} = \frac{NK}{AK} \Rightarrow AK^2 = NK.KP$ *(đpcm)*	0,75
	3	*Kẻ đường kính QS của đường tròn (O)* *Ta có* $AQ \perp QS$ *(AQ là tt của (O) ở Q)* *Mà PM//AQ (gt) nên* $PM \perp QS$ *Đường kính* $QS \perp PM$ *nên QS đi qua điểm chính giữa của cung PM nhỏ* $sd\,PS = sd\,SM \Rightarrow PNS = SNM$ *(hai góc nt chắn 2 cung bằng nhau)* *Hay NS là tia phân giác của góc PNM*	0,75
	4	*Chứng minh được* ΔAQO *vuông ở Q, có* $QG \perp AO$ *(theo Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)*	

		Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OQ^2 = OI.OA \Rightarrow OI = \frac{OQ^2}{OA} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$ $\Rightarrow AI = OA - OI = 3R - \frac{1}{3}R = \frac{8}{3}R$ *Do* $\Delta KNQ \sim \Delta KQP\ (gg) \Rightarrow KQ^2 = KN.KP$ *mà* $AK^2 = NK.KP$ *nên AK=KQ* *Vậy* ΔAPQ *có các trung tuyến AI và PK cắt nhau ở G nên G là trọng tâm* $\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}.\frac{8}{3}R = \frac{16}{9}R$	0,75
5		*Ta có:* $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = 0$ $\Leftrightarrow a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 2abc = 0$ $\Leftrightarrow (a^2b + b^2a) + (c^2a + c^2b) + (2abc + b^2c + a^2c) = 0$ $\Leftrightarrow ab(a+b) + c^2(a+b) + c(a+b)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (a+b)(ab + c^2 + ac + bc) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b).(a+c).(b+c) = 0$ **TH1: nếu a+ b=0* *Ta có* $\begin{cases} a = -b \\ a^{2013} + b^{2013} + c^{2013} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 1 \end{cases}$ *ta có* $Q = \frac{1}{a^{2013}} + \frac{1}{b^{2013}} + \frac{1}{c^{2013}} = 1$ *Các trường hợp còn lại xét tương tự* *Vậy* $Q = \frac{1}{a^{2013}} + \frac{1}{b^{2013}} + \frac{1}{c^{2013}} = 1$	0,25 0,25

KỲ THI TUYỂN SINH THPT

MÔN THI: TOÁN

(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)

ĐỀ SỐ 10

---*---**

<u>Bài 1</u>: Cho biểu thức: P = $\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{2\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{x-1}\right)$

a,Rút gọn P b,Tìm x nguyên để P có giá trị nguyên.

<u>Bài 2</u>: Cho phương trình: $x^2-(2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (*)

a.Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm âm.

b.Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm x_1; x_2 thoả mãn $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 50$

Câu 3: Quảng đường AB dài 156 km. Một người đi xe máy tử A, một người đi xe đạp từ B. Hai xe xuất phát cùng một lúc và sau 3 giờ gặp nhau. Biết rằng vận tốc của người đi xe máy nhanh hơn vận tốc của người đi xe đạp là 28 km/h. Tính vận tốc của mỗi xe?

Bài 4: Cho tam giác có các góc nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O . H là trực tâm của tam giác. D là một điểm trên cung BC không chứa điểm A.

a, Xác định vị trí của điểm D để tứ giác BHCD là hình bình hành.

b, Gọi P và Q lần lượt là các điểm đối xứng của điểm D qua các đường thẳng AB và AC . Chứng minh rằng 3 điểm P; H; Q thẳng hàng.

c, Tìm vị trí của điểm D để PQ có độ dài lớn nhất.

ĐÁP ÁN – GỢI Ý GIẢI ĐỀ SỐ 10

Bài 1: **(2 điểm).** ĐK: x $\geq 0; x \neq 1$

a, Rút gọn: P = $\dfrac{2x(x-1)}{x(x-1)} : \dfrac{2(\sqrt{x}-1)^2}{x-1}$ <=> P = $\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

b. P = $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ Để P nguyên thì

$$\sqrt{x}-1=1 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$$
$$\sqrt{x}-1=-1 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$$
$$\sqrt{x}-1=2 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$$
$$\sqrt{x}-1=-2 \Rightarrow \sqrt{x}=-1 (Loai)$$

Vậy với x= $\{0;4;9\}$ thì P có giá trị nguyên.

Bài 2: Để phương trình có hai nghiệm âm thì:

$$\begin{cases} \Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+m-6) \geq 0 \\ x_1x_2 = m^2+m-6 > 0 \\ x_1+x_2 = 2m+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 25 > 0 \\ (m-2)(m+3) > 0 \Leftrightarrow m < -3 \\ m < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

b. Giải phương trình: $\left|(m-2)^3 - (m+3)^3\right| = 50$

$$\Leftrightarrow \left|5(3m^2+3m+7)\right| = 50 \Leftrightarrow m^2+m-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bài 3 Gọi vân tốc của xe đạp là x (km/h), điều kiện x > 0

Thì vận tốc của xe máy là x + 28 (km/h)

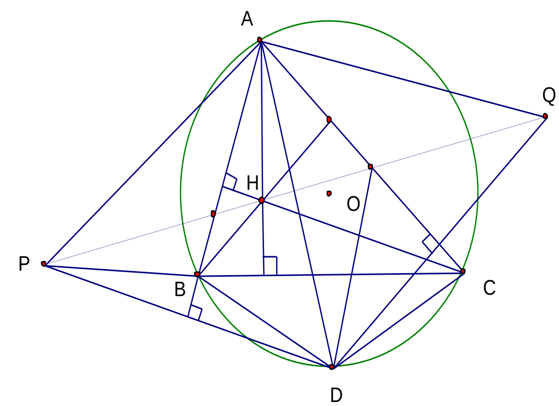
Trong 3 giờ: + Xe đạp đi được quãng đường 3x (km),

+ Xe máy đi được quãng đường 3(x + 28) (km), theo bài ra ta có phương trình:

3x + 3(x + 28) = 156 Giải tìm x = 12 (TMĐK)

Trả lời: Vận tốc của xe đạp là 12 km/h và vận tốc của xe máy là 12 + 28 = 40 (km/h)

Bài 4a. Giả sử đã tìm được điểm D trên cung BC sao cho tứ giác BHCD là hình bình hành . Khi đó: BD//HC; CD//HB vì H là trực tâm tam giác ABC nên



CH $\perp AB$ và BH$\perp AC$ => BD$\perp AB$ và CD$\perp AC$.

Do đó: $\angle$ABD = 90^0 và $\angle$ACD = 90^0.

Vậy AD là đường kính của đường tròn tâm O

Ngược lại nếu D là đầu đường kính AD

của đường tròn tâm O thì

tứ giác BHCD là hình bình hành.

b) Vì P đối xứng với D qua AB nên $\angle$APB = $\angle$ADB

nhưng $\angle$ADB =$\angle$ACB nhưng $\angle$ADB = $\angle$ACB

Do đó: $\angle$APB = $\angle$ACB Mặt khác:

$\angle$AHB + $\angle$ACB = 180^0 => $\angle$APB + $\angle$AHB = 180^0

Tứ giác APBH nội tiếp được đường tròn nên $\angle$PAB = $\angle$PHB

Mà $\angle$PAB = $\angle$DAB do đó: $\angle$PHB = $\angle$DAB

Chứng minh tương tự ta có: $\angle$CHQ = $\angle$DAC

Vậy $\angle$PHQ = $\angle$PHB + $\angle$BHC +$\angle$ CHQ = $\angle$BAC + $\angle$BHC = 180^0

Ba điểm P; H; Q thẳng hàng

c). Ta thấy Δ APQ là tam giác cân đỉnh A

Có AP = AQ = AD và $\angle$PAQ = $\angle$2BAC không đổi nên cạnh đáy PQ

đạt giá trị lớn nhất ⇔ AP và AQ là lớn nhất hay ⇔ AD là lớn nhất

⇔ D là đầu đường kính kẻ từ A của đường tròn tâm O

PHẦN III: MỘT SỐ ĐỀ TỰ LUYỆN
(THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI THƯỜNG GẶP)
MÔN THI: TOÁN
(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)
ĐỀ SỐ 1

Bài 1Cho biểu thức A = $\sqrt{\frac{(x^2-3)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x^2}$

a. Rút gọn biểu thức A b. Tìm những giá trị nguyên của x sao cho biểu thức A cũng có giá trị nguyên.

Bài 2: (2 điểm)Cho các đường thẳng: y = x-2 (d_1) y = 2x – 4 (d_2) y = mx + (m+2) (d_3)

a. Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d_3) luôn đi qua với mọi giá trị của m.

b. Tìm m để ba đường thẳng (d_1); (d_2); (d_3) đồng quy .

Bài 3: Cho phương trình x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0 (1)

a. Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b. Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình (1) mà không phụ thuộc vào m.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của P = $x^2_1 + x^2_2$ (với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1))

Bài 4: Cho đường tròn (o) với dây BC cố định và một điểm A thay đổi vị trí trên cung lớn BC sao cho AC>AB và AC > BC . Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Các tiếp tuyến của (O) tại D và C cắt nhau tại E. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB với CD; AD và CE.

a. Chứng minh rằng DE// BC

b. Chứng minh tứ giác PACQ nội tiếp

c. Gọi giao điểm của các dây AD và BC là F

Chứng minh hệ thức: $\frac{1}{CE}=\frac{1}{CQ}+\frac{1}{CE}$

Bài 5: Cho các số dương a, b, c Chứng minh rằng: $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$

KỲ THI TUYỂN SINH THPT - MÔN THI: TOÁN
(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)
ĐỀ SỐ 2
---*---**

Bài 1: (2đ) Cho biểu thức: P = $\left(\frac{x-1}{x+3\sqrt{x}-4}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}+1$

a) Rút gọn P. b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 2: (2đ) Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 20 km trong một thời gian đã định. Sau khi đi được 1 giờ với vận tốc dự định, do đường khó đi nên người đó giảm vận tốc đi 2km/h trên quãng đường còn lại, vì thế người đó đến B chậm hơn dự định 15 phút. Tính vận tốc dự định của người đi xe đạp.

Bài 3: (1,5đ) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ -2x + my = 1 - m \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với m = 3 b. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất thoả mãn x + y = 1

Bài 4: (3đ) Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Điểm M tuỳ ý trên nửa đường tròn.Gọi N và P lần lượt là điểm chính giữa của cung AM và cung MB. AP cắt BN tạiI.

a) Tính số đo góc NIP.

b) Gọi giao điểm của tia AN và tia BP là C; tia CI và AB là D.

Chứng minh tứ giác DOPN nội tiếp được.

c) Tìm quỹ tích trung điểm J của đoạn OC khi M di động trên nửa tròn tròn tâm O

Bài 5: (1,5đ) Cho hàm số y = -2x^2 (P) và đường thẳng y = 3x + 2m – 5 (d)

a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm toạ độ hai điểm đó.

b) Tìm quỹ tích chung điểm I của AB khi m thay đổi.

KỲ THI TUYỂN SINH THPT- MÔN THI: TOÁN

(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)

ĐỀ SỐ 3

Bài 1*(2 điểm):* Cho biểu thức $M = \dfrac{2}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{2(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} + \dfrac{x-10\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3}-1}$

1. Với giá trị nào của x thì biểu thức có nghĩa
2. Rút gọn biểu thức
3. Tìm x để biểu thức có giá trị lớn nhất

Bài 2*(2,5 điểm):* Cho hàm số y = 2x^2 (P) và y = 2(a-2)x - $\frac{1}{2}$a^2 (d)

1. Tìm a để (d) đi qua điểm A(0;-8)
2. Khi a thay đổi hãy xét số giao điểm của (P) và (d) tuỳ theo giá trị của a .
3. Tìm trên (P) những điểm có khoảng cách đến gốc toạ độ O(0;0) bằng $\sqrt{3}$

Bài 3*(2 điểm):* Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi là 48cm. Người ta cắt bỏ 4 hình vuông có cạnh là 2cm ở 4 góc rồi gấp lên thành một hình hộp chữ nhật(không có nắp). Tính kích thước của tấm tôn đó, biết rằng thể tích hình hộp bằng 96 cm^3.

Bài 4*(3 điểm):* Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Hạ các đường cao AD, BE của tam giác. Các tia AD, BE lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là M, N. Chứng minh rằng:

1. Bốn điểm A,E,D,B nằm trên một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

2. MN// DE
3. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên cung lớn AB. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCDE không đổi.

Bài 5(*0,5 điểm):* Tìm các cặp số (x;y) thoả mãn: $(x^2+1)(x^2+y^2) = 4x^2y$

KỲ THI TUYỂN SINH THPT MÔN THI: TOÁN

(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)

ĐỀ SỐ 4

Câu 1: (*2,0điểm*) Cho biểu thức A = $A = \frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a}+1)}{8+2\sqrt{a}-a} + \frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}+2}{4-\sqrt{a}}$

1) Rút gọn A 2) Tìm a để A nhận giá trị nguyên

Câu2: (*2,0điểm*) Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 2x+3y=3+a \\ x+2y=a \end{cases}$

1) Tìm a biết y=1 2. Tìm a để : $x^2+y^2=17$

Câu3: (*2,0điểm*) Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình : $y = 2x^2$, một đường thẳng (d) có hệ số góc bằng m và đi qua điểm I(0;2).

1) Viết phương trình đường thẳng (d)
2) CMR (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B
3) Gọi hoành độ giao điểm của A và B là x_1, x_2 . CMR : $|x_1 - x_2| \geq 2$

Câu4: (3,*5điểm*) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy D trên cung AB (D khác A,B), lấy điểm C nằm giữa O và B. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa D kẻ các tia Ax và By vuông góc với AB. Đường thẳng qua D vuông góc với DC cắt Ax và By lần lượt tại E và F .

1) CMR : Góc DFC bằng góc DBC
2) CMR : ΔECF vuông
3) Giả sử EC cắt AD tại M, BD cắt CF tại N. CMR : MN//AB
4) CMR: Đường tròn ngoại tiếp ΔEMD và đường tròn ngoại tiếp ΔDNF tiếp xúc nhau tại D.

Câu5: (0,*5điểm*) Tìm x, y thoả mãn : $\sqrt{4x-y^2} - \sqrt{y+2} = \sqrt{4x^2+y}$

KỲ THI TUYỂN SINH THPT

MÔN THI: TOÁN

(Thời gian làm bài 120 phút – không kể thời gian giao đề cho thí sinh)

ĐỀ SỐ 5

---*---**

Bài 1: *(2,5 điểm)* Cho biểu thức $P = \left[\frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{a-1}\right] : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right)$

1.Rút gọn biểu thức P. 2. Tìm a để $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a}+1}{8} \geq 1$

Bài 2: *(2,5 điểm)*

Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông từ bến A đến bến B dài 80 km, sau đó lại ngược dòng đến địa điểm C cách bến B 72 km. Thời gian ca nô xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 15 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài 3: *(1 điểm)*

Tìm toạ độ giao điểm A và B của đồ thị hai hàm số $y = 2x+3$ và $y = x^2$.

Gọi D và C lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành.

Tính S_{ABCD}

Bài 4: *(3 điểm)*Cho (O) đường kính AB = 2R, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tuỳ ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MM .

a) CMR: BCHK là tứ giác nội tiếp.

b) Tính AH.AK theo R.

c) Xác định vị trí của điểm K để (KM+KN+KB) đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó .

Bài 5: *(1 điểm)* Cho hai số dương x, y thoả mãn điều kiện: $x+y = 2$. Chứng minh: $x^2y^2(x^2+ y^2) \leq 2$

-Hết-