CHUYÊN ĐỀ TOÁN 12

CHUYÊN ĐỀ 1. KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

(Phần này có 101 bài tập cho các nội dung theo dạng toán liên quan tới hàm số đã được khảo sát)

CHỦ ĐỀ 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(m-1)x^3+mx^2+(3m-2)x$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi $m=2$.
2) Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó.

• *Tập xác định: D = R.* $y'=(m-1)x^2+2mx+3m-2$.

(1) đồng biến trên R $\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x \Leftrightarrow m\ge 2$

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=0$.
2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

• $m\le -3$

Câu 3. Cho hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có đồ thị (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.
2) Tìm *m* để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

• $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$ *có* $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1>0$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+1\end{array}\right.$. *Hàm số đồng biến trên các khoảng* $(-\infty;m),\ (m+1;+\infty)$

Do đó: hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)\Leftrightarrow m+1\le 2\Leftrightarrow m\le 1$

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi *m* = 1.
2) Tìm *m* để hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

• Hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow y'=3x^2+2(1-2m)x+(2-m)\ge 0$ với $\forall x\in(0;+\infty)$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{3x^2+2x+2}{4x+1}\ge m \text{ với } \forall x\in(0;+\infty)$$

Ta có: $f'(x)=\frac{2(6x^2+x-3)}{(4x+1)^2}=0\Leftrightarrow 6x^2+x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{73}}{12}$

Lập bảng biến thiên của hàm $f(x)$ trên $(0;+\infty)$, từ đó ta đi đến kết luận:

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{73}}{12}\right)\ge m\Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{73}}{8}\ge m$$

Câu 5. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-3m+1$ (1), (*m* là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi *m* = 1.
2) Tìm *m* để hàm số (1) đồng biến trên khoảng (1; 2).

• *Ta có* $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$

+ $m\le 0$, $y'\ge 0,\forall x \Rightarrow m\le 0$ *thoả mãn.*

+ $m>0$, $y'=0$ *có 3 nghiệm phân biệt:* $-\sqrt{m},\ 0,\ \sqrt{m}$.

Hàm số (1) đồng biến trên (1; 2) khi chỉ khi $\sqrt{m} \le 1 \Leftrightarrow 0 < m \le 1$. *Vậy* $m \in (-\infty; 1]$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -1$.
2) Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

• *Tập xác định: D = R \ {–m}.* $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ *(1)*

Để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ *thì ta phải có* $-m \ge 1 \Leftrightarrow m \le -1$ *(2)*

Kết hợp (1) và (2) ta được: $-2 < m \le -1$.

CHỦ ĐỀ 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 3.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành:*

$$x^3 + 3x^2 + mx + m - 2 = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ g(x) = x^2 + 2x + m - 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

(C_m) có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía đối với trục 0x $\Leftrightarrow$ *PT (1) có 3 nghiệm phân biệt*

$\Leftrightarrow$ *(2) có 2 nghiệm phân biệt khác –1* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - m > 0 \\ g(-1) = m - 3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$

Câu 8. Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

• $y' = -3x^2 + 2(2m+1)x - (m^2 - 3m + 2)$.

(C_m) có các điểm CĐ và CT nằm về hai phía của trục tung $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 2 nghiệm trái dấu* $\Leftrightarrow$ $3(m^2 - 3m + 2) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 2.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía đối với trục tung.

• *TXĐ: D = R ;* $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$.

Đồ thị (C_m) có 2 điểm CĐ, CT nằm cùng phía đối với trục tung $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x - m = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $x_1; x_2$

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$ *(*)*

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

Thực hiện phép chia y cho y′ ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow \quad y_1 = y(x_1) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_1 + \left(2 - \frac{m}{3}\right);\ y_2 = y(x_2) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_2 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là Δ:* $y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

Các điểm cực trị cách đều đường thẳng $y = x - 1 \Leftrightarrow$ *xảy ra 1 trong 2 trường hợp:*

TH1: Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị song song hoặc trùng với đường thẳng $y = x - 1$

$\Leftrightarrow -\left(\frac{2m}{3} + 2\right) = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ *(thỏa mãn)*

TH2: Trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng $y = x - 1$

$\Leftrightarrow y_I = x_I - 1 \Leftrightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} - 1 \Leftrightarrow -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)(x_1 + x_2) + 2\left(2 - \frac{m}{3}\right) = (x_1 + x_2) - 2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3} + 3\right).2 = 6 - \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m = 0$

Vậy các giá trị cần tìm của m là: $m = \left\{0; -\frac{3}{2}\right\}$

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.

2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng *y* = *x*.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$. *Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì m ≠ 0.*

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là: A(0; 4m³), B(2m; 0) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là I(m; 2m³)

A, B đối xứng nhau qua đường thẳng d: y = x $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ 2m^3 = m \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 12. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Với giá trị nào của *m* thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $x + 8y - 74 = 0$.

• $y' = -3x^2 + 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0; -3m - 1), B(2m; 4m^3 - 3m - 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2m; 4m^3)$

Trung điểm I của AB có toạ độ: $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$

Đường thẳng d: $x + 8y - 74 = 0$ *có một VTCP* $\vec{u} = (8; -1)$.

A và B đối xứng với nhau qua d $\Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ AB \perp d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.
2) Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số (1) có các điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $x-2y-5=0$.

• *Ta có* $y=x^3-3x^2+mx \Rightarrow y'=3x^2-6x+m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ *có hai nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \Delta'=9-3m>0 \Leftrightarrow m<3$

Ta có: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'+\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m$

Tại các điểm cực trị thì $y'=0$, *do đó tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn phương trình:*

$$y=\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m$$

Như vậy đường thẳng Δ đi qua các điểm cực trị có phương trình $y=\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m$

nên Δ có hệ số góc $k_1=\frac{2}{3}m-2$.

d: $x-2y-5=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \Rightarrow$ *d có hệ số góc* $k_2=\frac{1}{2}$

Để hai điểm cực trị đối xứng qua d thì ta phải có d ⊥ Δ

$$\Rightarrow k_1k_2=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m-2\right)=-1 \Leftrightarrow m=0$$

Với m = 0 thì đồ thị có hai điểm cực trị là (0; 0) và (2; –4), nên trung điểm của chúng là I(1; –2). Ta thấy I ∈ d, do đó hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua d.
Vậy: m = 0

Câu 14. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x+m-2$ (1) có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.
2) Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $y=\frac{1}{2}x$.

• $y'=3x^2-6(m+1)x+9$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow \Delta'=9(m+1)^2-3.9>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3};+\infty)$

Ta có $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{m+1}{3}\right)y'-2(m^2+2m-2)x+4m+1$

Giả sử các điểm cực đại và cực tiểu là $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, *I là trung điểm của AB.*

$\Rightarrow y_1=-2(m^2+2m-2)x_1+4m+1;\ \ y_2=-2(m^2+2m-2)x_2+4m+1$

và: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1.x_2=3 \end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y=-2(m^2+2m-2)x+4m+1$

A, B đối xứng qua (d): $y=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} AB\perp d \\ I\in d \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Câu 15. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$, với m là tham số thực.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m=1$.
2) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1-x_2|\le 2$.

• *Ta có* $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9.$

+ *Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại* $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ *PT* $x^2 - 2(m+1)x + 3 = 0$ *có hai nghiệm phân biệt là* x_1, x_2.

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -1+\sqrt{3} \\ m < -1-\sqrt{3} \end{array}\right. \qquad (1)$$

+ *Theo định lý Viet ta có* $x_1 + x_2 = 2(m+1);\ x_1x_2 = 3.$ *Khi đó:*

$$|x_1 - x_2| \le 2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 12 \le 4$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 \le 4 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1 \qquad (2)$$

+ *Từ (1) và (2) suy ra giá trị của m cần tìm là* $-3 \le m < -1-\sqrt{3}$ *và* $-1+\sqrt{3} < m \le 1.$

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$, với m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 1$.

2) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| > \frac{1}{3}$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m)$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *(giả sử* $x_1 < x_2$*)*

$$\Leftrightarrow \Delta' = (1-2m)^2 - 3(2-m) = 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{5}{4} \\ m < -1 \end{array}\right. \qquad (*)$$

Hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2. *Khi đó ta có:* $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2(1-2m)}{3} \\ x_1x_2 = \dfrac{2-m}{3} \end{cases}$

$$|x_1 - x_2| > \frac{1}{3} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 > \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 4(1-2m)^2 - 4(2-m) > 1 \Leftrightarrow 16m^2 - 12m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3+\sqrt{29}}{8} \vee m < \frac{3-\sqrt{29}}{8}$$

Kết hợp (*), ta suy ra $m > \dfrac{3+\sqrt{29}}{8} \vee m < -1$

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$, với m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 2$.

2) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 1$.

• *Ta có:* $y' = x^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 7 > 0 \text{ (luôn đúng với } \forall m)$$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 3(m-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 - 2m \\ x_2(1 - 2x_2) = 3(m-2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 8m^2 + 16m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-4 \pm \sqrt{34}}{4}.$$

Câu 18. Cho hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.
2) Tìm *m* để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 = -4x_2$.

• $y' = 12x^2 + 2mx - 3$. *Ta có:* $\Delta' = m^2 + 36 > 0, \forall m \Rightarrow$ *hàm số luôn có 2 cực trị* x_1, x_2.

Khi đó: $\begin{cases} x_1 = -4x_2 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{6} \\ x_1x_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow m = \pm\dfrac{9}{2}$

Câu hỏi tương tự:

a) $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1;\ x_1 + 2x_2 = 3$ *ĐS:* $m = -105$.

Câu 19. Cho hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$, *m* là tham số.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi *m* = 0.
2) Tìm các giá trị của *m* để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương.

• *Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương*

$\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m = 0$ *có 2 nghiệm dương phân biệt*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = (m+2) \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 3m(m+2) > 0 \\ P = \dfrac{m}{3(m+2)} > 0 \\ S = \dfrac{-3}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -m^2 - 2m + 3 > 0 \\ m < 0 \\ m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m < 0 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -2.$$

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (1)
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2) Tìm điểm M thuộc đường thẳng d: $y = 3x - 2$ sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

• *Các điểm cực trị là: A(0; 2), B(2; –2).*
Xét biểu thức $g(x,y) = 3x - y - 2$ *ta có:*

$$g(x_A, y_A) = 3x_A - y_A - 2 = -4 < 0;\ g(x_B, y_B) = 3x_B - y_B - 2 = 6 > 0$$

$\Rightarrow$ *2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng d:* $y = 3x - 2$.
Do đó MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ *3 điểm A, M, B thẳng hàng* $\Leftrightarrow$ *M là giao điểm của d và AB.*
Phương trình đường thẳng AB: $y = -2x + 2$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (*m* là tham số) (1).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi *m* = 2.
2) Tìm các giá trị của *m* để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

• $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = g(x)$

YCBT $\Leftrightarrow$ *phương trình* $y' = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *thỏa mãn:* $x_1 < x_2 < 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ g(1) = -5m + 7 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{2m-1}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}.$$

Câu 22. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2) Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

• *Ta có* $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Hàm số (1) có cực trị thì PT $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt*

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ *có 2 nhiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \Delta = 1 > 0, \forall m$

Khi đó: điểm cực đại $A(m-1; 2-2m)$ *và điểm cực tiểu* $B(m+1; -2-2m)$

Ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 23. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2) Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

• $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2)$.

PT $y' = 0$ *có* $\Delta = 1 > 0, \forall m \Rightarrow$ *Đồ thị hàm số (1) luôn có 2 điểm cực trị* $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.

Chia y cho y′ ta được: $y = \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{m}{3}\right)y' + 2x - m^2 + m$

Khi đó: $y_1 = 2x_1 - m^2 + m$; $y_2 = 2x_2 - m^2 + m$

PT đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là $y = 2x - m^2 + m$.

Câu 24. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với đường thẳng d: $y = -4x + 3$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x - m = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $x_1; x_2$

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$ *(*)*

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

Thực hiện phép chia y cho y′ ta được: $y = \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}\right)y' - \left(\dfrac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \dfrac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow y_1 = y(x_1) = -\left(\dfrac{2m}{3} + 2\right)x_1 + \left(2 - \dfrac{m}{3}\right)$; $y_2 = y(x_2) = -\left(\dfrac{2m}{3} + 2\right)x_2 + \left(2 - \dfrac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là d:* $y = -\left(\dfrac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \dfrac{m}{3}\right)$

Đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với d: $y = -4x + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(\dfrac{2m}{3}+2\right)=-4 \\ \left(2-\dfrac{m}{3}\right)\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 25. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Tìm *m* để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị tạo với đường thẳng d: $x+4y-5=0$ một góc 45^0.

• *Ta có:* $y'=3x^2-6x-m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y'=3x^2-6x-m=0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $x_1;x_2$

$\Leftrightarrow \Delta'=9+3m>0 \Leftrightarrow m>-3$ *(*)*

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$

Thực hiện phép chia y cho y′ ta được: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow\ y_1=y(x_1)=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x_1+\left(2-\frac{m}{3}\right);\ y_2=y(x_2)=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x_2+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là Δ:* $y=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

Đặt $k=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)$. *Đường thẳng d:* $x+4y-5=0$ *có hệ số góc bằng* $-\frac{1}{4}$.

Ta có: $\tan 45^\circ=\left|\dfrac{k+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}k}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}k \\ k+\frac{1}{4}=-1+\frac{1}{4}k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\frac{3}{5} \\ k=-\frac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\frac{39}{10} \\ m=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện (*), suy ra giá trị m cần tìm là: $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 26. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=-4$.

2) Xác định *m* để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị *A*, *B* sao cho $\widehat{AOB}=120^0$.

• *Ta có:* $y'=3x^2+6x;\ \ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=m+4 \\ x=0 \ \ \Rightarrow y=m \end{array}\right.$

Vậy hàm số có hai điểm cực trị A(0 ; m) và B(–2 ; m + 4)

$\overrightarrow{OA}=(0;m),\ \overrightarrow{OB}=(-2;m+4)$. *Để* $\widehat{AOB}=120^0$ *thì* $\cos AOB=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{m(m+4)}{\sqrt{m^2\left(4+(m+4)^2\right)}}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{m^2\left(4+(m+4)^2\right)}=-2m(m+4) \Leftrightarrow \begin{cases} -4<m<0 \\ 3m^2+24m+44=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4<m<0 \\ m=\dfrac{-12\pm 2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{-12+2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 27. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=-2$.

2) Chứng minh rằng (C_m) luôn có điểm cực đại và điểm cực tiểu lần lượt chạy trên mỗi đường thẳng

cố định.

• $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m+1 \\ x = m-1 \end{array}\right.$

Điểm cực đại $M(m-1; 2-3m)$ *chạy trên đường thẳng cố định:* $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

Điểm cực tiểu $N(m+1; -2-m)$ *chạy trên đường thẳng cố định:* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 3$.
2) Xác định *m* để đồ thị của hàm số (1) có cực tiểu mà không có cực đại.

• $y' = 2x^3 - 2mx = 2x(x^2 - m)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Đồ thị của hàm số (1) có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 1 nghiệm* $\Leftrightarrow m \le 0$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số khi $m = 1$.
2) Tìm các giá trị của *m* để đồ thị (C_m) của hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

• *Ta có* $f'(x) = 4x^3 + 4(m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ *PT* $f'(x) = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m < 2$ *(*)*

Khi đó toạ độ các điểm cực trị là: $A\left(0; m^2 - 5m + 5\right)$, $B\left(\sqrt{2-m}; 1-m\right)$, $C\left(-\sqrt{2-m}; 1-m\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$

Do ΔABC luôn cân tại A, nên bài toán thoả mãn khi ΔABC vuông tại A

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m-2)^3 = -1 \Leftrightarrow m = 1$ *(thoả (*))*

Câu 30. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều.

• *Ta có* $f'(x) = 4x^3 + 4(m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ *PT* $f'(x) = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m < 2$ *(*)*

Khi đó toạ độ các điểm cực trị là: $A\left(0; m^2 - 5m + 5\right)$, $B\left(\sqrt{2-m}; 1-m\right)$, $C\left(-\sqrt{2-m}; 1-m\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$

Do ΔABC luôn cân tại A, nên bài toán thoả mãn khi $A = 60^0 \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt[3]{3}$.

Câu hỏi tương tự đối với hàm số: $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$

Câu 31. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có đồ thị (C_m) .
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = –2.
2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có một góc bằng 120^0.

• *Ta có* $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{array}\right.$ *(m < 0)*

Khi đó các điểm cực trị là: $A(0; m^2 + m)$, $B\left(\sqrt{-m}; m\right)$, $C\left(-\sqrt{-m}; m\right)$

$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{-m}; -m^2)$; $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{-m}; -m^2)$. *ΔABC cân tại A nên góc* 120^o *chính là* $\hat{A}$.

$$\hat{A} = 120^o \Leftrightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{-m}.\sqrt{-m} + m^4}{m^4 - m} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m + m^4}{m^4 - m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2m + 2m^4 = m - m^4 \Leftrightarrow 3m^4 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \quad (loại) \\ m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{array}\right.$$

Vậy $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có đồ thị (C_m) .
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.
2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

• *Ta có* $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có ba nghiệm phân biệt và* y' *đổi dấu khi* x *đi qua các nghiệm đó* $\Leftrightarrow m > 0$. *Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị (Cm) là:*

$$A(0; m-1), B\left(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right), C\left(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|y_B - y_A\right|.\left|x_C - x_B\right| = m^2\sqrt{m}$; $AB = AC = \sqrt{m^4 + m}, BC = 2\sqrt{m}$

$$R = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\triangle ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(m^4 + m)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{array}\right.$$

Câu hỏi tương tự:

a) $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ *ĐS:* $m = 1, m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Câu 33. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có đồ thị (C_m) .
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.
2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có diện tích bằng 4.

• *Ta có* $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = x^2 - m = 0 \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \Delta_g = m > 0 \Leftrightarrow m > 0$ *(*)*

Với điều kiện (*), phương trình $y'=0$ *có 3 nghiệm* $x_1=-\sqrt{m};\ x_2=0;\ x_3=\sqrt{m}$. *Hàm số đạt cực trị tại* $x_1;x_2;x_3$. *Gọi* $A(0;2m+m^4);B\left(\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right);C\left(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right)$ *là 3 điểm cực trị của* (C_m).

Ta có: $AB^2=AC^2=m^4+m;BC^2=4m\Rightarrow\Delta ABC$ *cân đỉnh A*

Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow M(0;m^4-m^2+2m)\Rightarrow AM=\left|m^2\right|=m^2$

Vì ΔABC *cân tại A nên AM cũng là đường cao, do đó:*

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AM.BC=\frac{1}{2}.m^2.\sqrt{4m}=4\Leftrightarrow m^{\frac{5}{2}}=4\Leftrightarrow m^5=16\Leftrightarrow m=\sqrt[5]{16}$$

Vậy $m=\sqrt[5]{16}$.

Câu hỏi tương tự:

a) $y=x^4-2m^2x^2+1$, *S = 32* *ĐS:* $m=\pm2$

CHỦ ĐỀ 3: SỰ TƯƠNG GIAO

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ (*m* là tham số) (1)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 3$.

2) Tìm *m* để đường thẳng d: $y = 1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt *A*(0; 1), *B*, *C* sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại *B* và *C* vuông góc với nhau.

• *PT hoành độ giao điểm của (1) và d:* $x^3+3x^2+mx+1=1\Leftrightarrow x(x^2+3x+m)=0$

d cắt (1) tại 3 điểm phân biệt A(0; 1), B, C $\Leftrightarrow m<\frac{9}{4},\ m\neq0$

Khi đó: x_B,x_C *là các nghiệm của PT:* $x^2+3x+m=0\Rightarrow x_B+x_C=-3;\ x_B.x_C=m$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại B là $k_1=3x_B^2+6x_B+m$ *và tại C là* $k_2=3x_C^2+6x_C+m$

Tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc với nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1\Leftrightarrow 4m^2-9m+1=0$

$$\Leftrightarrow m=\frac{9-\sqrt{65}}{8}\vee m=\frac{9+\sqrt{65}}{8}$$

Câu 35. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y=mx+m+3$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để (d) cắt (C) tại M(–1; 3), N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau.

• *Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):* $x^3-(m+3)x-m-2=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-m-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ (y=3)\\ g(x)=x^2-x-m-2=0\end{array}\right.$$

d cắt (1) tại 3 điểm phân biệt M(–1; 3), N, P $\Leftrightarrow m>-\frac{9}{4},\ m\neq0$

Khi đó: x_N,x_P *là các nghiệm của PT:* $x^2-x-m-2=0\Rightarrow x_N+x_P=1;\ x_N.x_P=-m-2$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại N là $k_1=3x_N^2-3$ *và tại P là* $k_2=3x_P^2-3$

Tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1\Leftrightarrow 9m^2+18m+1=0$

$$\Leftrightarrow m=\frac{-3+2\sqrt{2}}{3}\vee m=\frac{-3-2\sqrt{2}}{3}$$

Câu 36. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi (*d*) là đường thẳng đi qua điểm A(2; 0) có hệ số góc *k*. Tìm *k* để (*d*) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, M, N sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M và N vuông góc với nhau.

• *PT đường thẳng (d):* $y=k(x-2)$

+ *PT hoành độ giao điểm của (C) và (d):* $x^3-3x^2+4=k(x-2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-2-k)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2=x_A \\ g(x)=x^2-x-2-k=0 \end{array}\right.$$

+ *(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, M, N* $\Leftrightarrow$ *PT* $g(x)=0$ *có 2 nghiệm phân biệt, khác 2*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ f(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4}<k\neq 0 \qquad (*)$$

+ *Theo định lí Viet ta có:* $\begin{cases} x_M+x_N=1 \\ x_Mx_N=-k-2 \end{cases}$

+ *Các tiếp tuyến tại M và N vuông góc với nhau* $\Leftrightarrow y'(x_M).y'(x_N)=-1$

$$\Leftrightarrow (3x_M^2-6x_M)(3x_N^2-6x_N)=-1 \Leftrightarrow 9k^2+18k+1=0 \Leftrightarrow k=\frac{-3\pm 2\sqrt{2}}{3} \quad \textit{(thoả (*))}$$

Câu 37. Cho hàm số $y=x^3-3x$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Chứng minh rằng khi *m* thay đổi, đường thẳng (d): $y=m(x+1)+2$ luôn cắt đồ thị (C) tại một điểm M cố định và xác định các giá trị của *m* để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt M, N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau.

• *PT hoành độ giao điểm* $(x+1)(x^2-x-2-m)=0$ *(1)* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2-x-2-m=0 \end{array}\right. \quad (2)$

(1) luôn có 1 nghiệm $x=-1$ ($y=2$) $\Rightarrow$ *(d) luôn cắt (C) tại điểm M(–1; 2).*

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ *(2) có 2 nghiệm phân biệt, khác –1* $\Leftrightarrow \begin{cases} m>-\frac{9}{4} \\ m\neq 0 \end{cases}$ *(*)*

Tiếp tuyến tại N, P vuông góc $\Leftrightarrow y'(x_N).y'(x_P)=-1 \Leftrightarrow m=\frac{-3\pm 2\sqrt{2}}{3}$ *(thoả (*))*

Câu 38. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-(m^2-1)$ (m là tham số) (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=0$.

2) Tìm các giá trị của *m* để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

• *Để ĐTHS (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương, ta phải có:*

$$\begin{cases} (1) \text{ coù 2 cöïc trò} \\ y_{CÑ}.y_{CT}<0 \\ x_{CÑ}>0,\ x_{CT}>0 \\ a.y(0)<0 \end{cases} \quad (*)$$

Trong đó: + $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-(m^2-1) \Rightarrow y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

+ $\Delta_{y'}=m^2-m^2+1=0>0, \forall m$

+ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 = x_{CĐ} \\ x = m+1 = x_{CT} \end{array}\right.$

Suy ra: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ m+1>0 \\ (m^2-1)(m^2-3)(m^2-2m-1)<0 \\ -(m^2-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 1+\sqrt{2}$

Câu 39. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$ có đồ thị (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = –1.

2) Tìm *m* để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15.

• *YCBT* $\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3} = 0$ *(*) có 3 nghiệm phân biệt thỏa* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$.

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2+(1-3m)x-2-3m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ g(x) = x^2+(1-3m)x-2-3m = 0 \end{array}\right.$

Do đó: YCBT $\Leftrightarrow g(x) = 0$ *có 2 nghiệm* x_1, x_2 *phân biệt khác 1 và thỏa* $x_1^2 + x_2^2 > 14$.

$\Leftrightarrow |m| > 1$

Câu hỏi tương tự đối với hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2$

Câu 40. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$, trong đó m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $m = 0$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

• *Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng*

$\Leftrightarrow$ *Phương trình* $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng*

$\Leftrightarrow$ *Phương trình* $x^3 - 3x^2 - 9x = -m$ *có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng*

$\Leftrightarrow$ *Đường thẳng* $y = -m$ *đi qua điểm uốn của đồ thị (C)*

$\Leftrightarrow -m = -11 \Leftrightarrow m = 11.$

Câu 41. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - 7$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $m = 0$.

2) Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

• *Hoành độ các giao điểm là nghiệm của phương trình:* $x^3 - 3mx^2 + 9x - 7 = 0$ *(1)*

Gọi hoành độ các giao điểm lần lượt là $x_1; x_2; x_3$ *ta có:* $x_1 + x_2 + x_3 = 3m$

Để $x_1; x_2; x_3$ *lập thành cấp số cộng thì* $x_2 = m$ *là nghiệm của phương trình (1)*

$$\Rightarrow -2m^3 + 9m - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{-1+\sqrt{15}}{2} \\ m = \frac{-1-\sqrt{15}}{2} \end{array}\right.$$

Thử lại ta có $m = \frac{-1-\sqrt{15}}{2}$ *là giá trị cần tìm.*

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - mx$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $m=1$.

2) Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng d: $y = x+2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.

• *Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d:*

$$x^3 - 3mx^2 - mx = x + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^3 - 3mx^2 - (m+1)x - 2 = 0$$

<u>Đk cần</u>: Giả sử (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3$ *lần lượt lập thành cấp số nhân.*

Khi đó ta có: $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Suy ra: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3m \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -m-1 \\ x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$

Vì $x_1x_3 = x_2^2 \Rightarrow x_2^3 = 2 \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{2}$ *nên ta có:* $-m-1 = 4 + \sqrt[3]{2}.3m \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$

<u>Đk đủ</u>: Với $m = -\dfrac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$, *thay vào tính nghiệm thấy thỏa mãn.*

Vậy $m = -\dfrac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$

Câu 43. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ có đồ thị là (C_m) (*m* là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số trên khi *m* = 1.

2) Cho đường thẳng (d): $y = x+4$ và điểm K(1; 3). Tìm các giá trị của *m* để (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A(0; 4), B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

• *Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:*

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ (y=4) \\ g(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \ \ (1) \end{array}\right.$$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A(0; 4), B, C $\Leftrightarrow$ *(2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ g(0) = m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \vee m \ge 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó: $x_B + x_C = -2m;\ x_B.x_C = m+2$.

Mặt khác: $d(K,d) = \dfrac{|1-3+4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. *Do đó:*

$$S_{\Delta KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}BC.d(K,d) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow BC = 16 \Leftrightarrow BC^2 = 256$$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = 256 \Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + ((x_B+4) - (x_C+4))^2 = 256$$

$$\Leftrightarrow 2(x_B - x_C)^2 = 256 \Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_Bx_C = 128$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m+2) = 128 \Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$$ *(thỏa (*)).*

Vậy $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$.

Câu 44. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi d_k là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0)$ với hệ số góc k $(k \in \mathbb{R})$. Tìm k để đường thẳng d_k cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C và 2 giao điểm B, C cùng với gốc toạ độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

• *Ta có:* $d_k : y = kx + k \Leftrightarrow kx - y + k = 0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (Cm) và d là:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx + k \Leftrightarrow (x+1)\left[(x-2)^2 - k\right] = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } (x-2)^2 = k$$

d_k *cắt (C) tại 3 điểm phân biệt* $\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}$

Khi đó các giao điểm là $A(-1;0), B\left(2-\sqrt{k}; 3k - k\sqrt{k}\right), C\left(2+\sqrt{k}; 3k + k\sqrt{k}\right)$.

$$BC = 2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2},\ d(O,BC) = d(O,d_k) = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}.\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.2\sqrt{k}.\sqrt{1+k^2} = 1 \Leftrightarrow k\sqrt{k} = 1 \Leftrightarrow k^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

Câu 45. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi E là tâm đối xứng của đồ thị (C). Viết phương trình đường thẳng qua E và cắt (C) tại ba điểm E, A, B phân biệt sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{2}$.

• *Ta có: E(1; 0). PT đường thẳng Δ qua E có dạng* $y = k(x-1)$.

PT hoành độ giao điểm của (C) và Δ: $(x-1)(x^2 - 2x - 2 - k) = 0$

Δ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ *PT* $x^2 - 2x - 2 - k = 0$ *có hai nghiệm phân biệt khác 1*
$\Leftrightarrow k > -3$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} d(O,\Delta).AB = |k|\sqrt{k+3} \Rightarrow |k|\sqrt{k+3} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = -1 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy có 3 đường thẳng thoả YCBT: $y = -x + 1;\ y = \left(-1 \pm \sqrt{3}\right)(x-1)$.

Câu 46. Cho hàm số $y = x^3 + mx + 2$ có đồ thị (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = –3.

2) Tìm *m* để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

• *Phương trình hoành độ giao điểm của* (C_m) *với trục hoành:*

$$x^3 + mx + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 - \frac{2}{x}\ (x \neq 0)$$

Xét hàm số: $f(x) = -x^2 - \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} = \frac{-2x^3 + 2}{x^2}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị (C$_m$) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m > -3$.

Câu 47. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 2$ có đồ thị (C$_m$)
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.
2) Tìm *m* để đồ thị (C$_m$) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

• $1 - \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{3}$

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ có đồ thị là (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Định *m* để đường thẳng $(d): y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và (d):* $x^3 - 6x^2 + 9x - 6 = mx - 2m - 4$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ g(x) = x^2 - 4x + 1 - m = 0 \end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ *PT* $g(x) = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt khác 2* $\Leftrightarrow m > -3$

Câu 49. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm *m* để đường thẳng (Δ): $y = (2m-1)x - 4m - 1$ cắt đồ thị (C) tại đúng hai điểm phân biệt.

• *Phương trình hoành độ giao của (C) và (Δ):* $x^3 - 3x^2 - (2m-1)x + 4m + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 2m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ f(x) = x^2 - x - 2m - 1 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

(Δ) cắt (C) tại đúng 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ *(1) phải có nghiệm* x_1, x_2 *thỏa mãn:* $\left[\begin{array}{l} 2 \neq x_1 = x_2 \\ x_1 = 2 \neq x_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \neq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8m + 5 = 0 \\ \dfrac{1}{2} \neq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 8m + 5 > 0 \\ -2m + 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{5}{8} \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy: $m = -\dfrac{5}{8}$; $m = \dfrac{1}{2}$.

Câu 50. Cho hàm số $y = x^3 - 3m^2x + 2m$ có đồ thị (C$_m$).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.
2) Tìm *m* để đồ thị (C$_m$) cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt.

• *Để (C$_m$) cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt thì (C$_m$) phải có 2 điểm cực trị*
$\Rightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow 3x^2 - 3m^2 = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m \neq 0$
Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$.
(C$_m$) cắt Ox tại đúng 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CĐ} = 0$ *hoặc* $y_{CT} = 0$
Ta có: + $y(-m) = 0 \Leftrightarrow 2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ *(loại)*
+ $y(m) = 0 \Leftrightarrow -2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \pm 1$
Vậy: $m = \pm 1$

Câu 51. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ có đồ thị là (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m=8$.
2) Định m để đồ thị $\left(C_m\right)$ cắt trục trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

- $\begin{cases} m>1 \\ m\neq 2 \end{cases}$

Câu 52. Cho hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m=0$.
2) Định m để đồ thị $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- *Xét phương trình hoành độ giao điểm:* $x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1=0$ *(1)*

Đặt $t=x^2, t\geq 0$ *thì (1) trở thành:* $f(t)=t^2-2\left(m+1\right)t+2m+1=0$.

Để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì $f(t)=0$ *phải có 2 nghiệm dương phân biệt*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2>0 \\ S=2\left(m+1\right)>0 \\ P=2m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{2} \\ m\neq 0 \end{cases} (*)$$

Với (*), gọi $t_1<t_2$ *là 2 nghiệm của* $f(t)=0$, *khi đó hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox lần lượt là:*

$x_1=-\sqrt{t_2}; x_2=-\sqrt{t_1}; x_3=\sqrt{t_1}; x_4=\sqrt{t_2}$

x_1, x_2, x_3, x_4 *lập thành cấp số cộng* $\Leftrightarrow x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3 \Leftrightarrow t_2=9t_1$

$$\Leftrightarrow m+1+|m|=9\left(m+1-|m|\right) \Leftrightarrow 5|m|=4\left(m+1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5m=4m+4 \\ -5m=4m+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$$

Vậy $m=\left\{4;-\dfrac{4}{9}\right\}$

Câu hỏi tương tự đối với hàm số $y=-x^4+2(m+2)x^2-2m-3$ *ĐS:* $m=3, m=-\dfrac{13}{9}$.

Câu 53. Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị là (C_m), *m* là tham số.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.
2) Tìm *m* để đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

- *Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng* $y=-1$:

$$x^4-(3m+2)x^2+3m=-1 \Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^2=3m+1 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng $y=-1$ *cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ±1 và nhỏ hơn 2*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<3m+1<4 \\ 3m+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3}<m<1 \\ m\neq 0 \end{cases}$$

Câu 54. Cho hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1$ có đồ thị là (C_m), *m* là tham số.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.
2) Tìm *m* để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 3.

- *Xét phương trình hoành độ giao điểm:* $x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1=0$ *(1)*

Đặt $t = x^2, t \ge 0$ *thì (1) trở thành:* $f(t) = t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$.

(C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3

$\Leftrightarrow f(t)$ *có 2 nghiệm phân biệt* t_1, t_2 *sao cho:* $\left[\begin{array}{l} 0 = t_1 < t_2 < 3 \\ 0 < t_1 < 3 \le t_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ f(0) = 2m + 1 = 0 \\ S = 2(m+1) < 3 \end{cases} \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ f(3) = 4 - 4m \le 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \vee m \ge 1$$

Vậy: $m = -\frac{1}{2} \vee m \ge 1$.

Câu 55. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m$ (1), với m là tham số.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$..

2) Chứng minh đồ thị hàm số (1) luôn cắt trục Ox tại ít nhất hai điểm phân biệt, với mọi $m < 0$.

• *Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (1) và trục Ox:*

$x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m = 0 \quad (1)$

Đặt $t = x^2\ (t \ge 0)$, *(1) trở thành :* $t^2 - 2m^2t + m^4 + 2m = 0 \qquad (2)$

Ta có : $\Delta' = -2m > 0$ *và* $S = 2m^2 > 0$ *với mọi* $m > 0$. *Nên (2) có nghiệm dương*

$\Rightarrow$ *(1) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt* $\Rightarrow$ *đồ thị hàm số (1) luôn cắt trục Ox tại ít nhất hai điểm phân biệt.*

Câu 56. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Chứng minh rằng đường thẳng d: $y = -x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm m để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:* $\frac{2x+1}{x+2} = -x + m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -2 \\ f(x) = x^2 + (4-m)x + 1 - 2m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Do (1) có $\Delta = m^2 + 1 > 0$ *và* $f(-2) = (-2)^2 + (4-m).(-2) + 1 - 2m = -3 \ne 0, \forall m$

nên đường thẳng d luôn luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Ta có: $y_A = m - x_A;\ y_B = m - x_B$ *nên* $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 2(m^2 + 12)$

Suy ra AB ngắn nhất $\Leftrightarrow AB^2$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow m = 0$. *Khi đó:* $AB = \sqrt{24}$.

Câu hỏi tương tự đối với hàm số:

a) $y = \frac{x-2}{x-1}$ *ĐS: m = 2* *b)* $y = \frac{x-1}{2x}$ *ĐS:* $m = \frac{1}{2}$

Câu 57. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình đường thẳng d qua điểm $I(-1;1)$ và cắt đồ thị (C) tại hai điểm M, N sao cho I là trung điểm của đoạn MN.

• *Phương trình đường thẳng* $d: y = k(x+1) + 1$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N $\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x+1}=kx+k+1$ *có 2 nghiệm phân biệt khác* -1.

$\Leftrightarrow f(x)=kx^2+2kx+k+4=0$ *có 2 nghiệm phân biệt khác* -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta=-4k>0 \\ f(-1)=4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k<0$$

Mặt khác: $x_M+x_N=-2=2x_I \Leftrightarrow$ *I là trung điểm MN với* $\forall k<0$.

Kết luận: Phương trình đường thẳng cần tìm là $y=kx+k+1$ *với* $k<0$.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+4}{1-x}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi (d) là đường thẳng qua $A(1;\ 1)$ và có hệ số góc k. Tìm k để (d) cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho $MN=3\sqrt{10}$.

• *Phương trình đường thẳng* $(d): y=k(x-1)+1$.

Bài toán trở thành: Tìm k để hệ phương trình sau có hai nghiệm $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ *phân biệt sao cho* $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=90$ *(a)*

$$\begin{cases} \dfrac{2x+4}{-x+1}=k(x-1)+1 \\ y=k(x-1)+1 \end{cases} \text{ (I). Ta có: } (I)\Leftrightarrow \begin{cases} kx^2-(2k-3)x+k+3=0 \\ y=k(x-1)+1 \end{cases}$$

(I) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ *PT* $kx^2-(2k-3)x+k+3=0$ *(b) có hai nghiệm phân biệt.* $\Leftrightarrow$ $k\neq 0, k<\dfrac{3}{8}$.

Ta biến đổi (a) trở thành: $(1+k^2)(x_2-x_1)^2=90 \Leftrightarrow (1+k^2)\left[(x_2+x_1)^2-4x_2x_1\right]=90$ *(c)*

Theo định lí Viet cho (b) ta có: $x_1+x_2=\dfrac{2k-3}{k}, x_1x_2=\dfrac{k+3}{k}$, *thế vào (c) ta có phương trình:*

$$8k^3+27k^2+8k-3=0 \Leftrightarrow (k+3)(8k^2+3k-1)=0$$

$$\Leftrightarrow k=-3;\ k=\frac{-3+\sqrt{41}}{16};\ k=\frac{-3-\sqrt{41}}{16}.$$

Kết luận: Vậy có 3 giá trị của k thoả mãn như trên.

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm m để đường thẳng (d): $y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{5}$.

• *PT hoành độ giao điểm:* $\dfrac{2x-2}{x+1}=2x+m \Leftrightarrow 2x^2+mx+m+2=0\ (x\neq -1)$ *(1)*

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ *(1) có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *khác –1*

$\Leftrightarrow m^2-8m-16>0$ *(2)*

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{m}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{m+2}{2} \end{cases}$. *Gọi* $A(x_1;2x_1+m)$, $B(x_2;2x_2+m)$.

$AB^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 20 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = -2 \end{array}\right.$ *(thoả (2))*

Vậy: $m = 10$; $m = -2$.

Câu 60. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+m}$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2) Tìm các giá trị của tham số *m* sao cho đường thẳng (*d*): $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm *A* và *B* sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

• *PT hoành độ giao điểm:* $\dfrac{x-1}{x+m} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ x^2 + (m+1)x + 2m + 1 = 0 \end{cases}$ (*)

d cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A, B phân biệt $\Leftrightarrow$ *(*) có hai nghiệm phân biệt khác* $-m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 - 2\sqrt{3} \vee m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m \neq -1 \end{cases}$ *(**)*

Khi đó gọi x_1, x_2 *là các nghiệm của (*), ta có* $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1 . x_2 = 2m + 1 \end{cases}$

Các giao điểm của d và đồ thị hàm số (1) là $A(x_1; x_1 + 2), B(x_2; x_2 + 2)$.

Suy ra $AB^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 2(m^2 - 6m - 3)$

Theo giả thiết ta được $2(m^2 - 6m - 3) = 8 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 7 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (**) ta được $m = 7$ *là giá trị cần tìm.*

Câu 61. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm *m* để đường thẳng d: $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

• *Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:* $x^2 + (m-3)x + 1 - m = 0, \quad x \neq 1$ *(*)*

(*) có $\Delta = m^2 - 2m + 5 > 0, \forall m \in R$ *và (*) không có nghiệm x = 1.*

$\Rightarrow$ *(*) luôn có 2 nghiệm phân biệt là* x_A, x_B. *Theo định lí Viét:* $\begin{cases} x_A + x_B = 3 - m \\ x_A . x_B = 1 - m \end{cases}$

Khi đó: $A\left(x_A; x_A + m\right), B\left(x_B; x_B + m\right)$

ΔOAB *vuông tại O thì* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_Ax_B + \left(x_A + m\right)\left(x_B + m\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2x_Ax_B + m\left(x_A + x_B\right) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy: m = –2.

Câu 62. Cho hàm số: $y = \dfrac{x+2}{x-2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Chứng minh rằng với mọi giá trị *m* thì trên (C) luôn có cặp điểm A, B nằm về hai nhánh của (C)

và thỏa $\begin{cases} x_A - y_A + m = 0 \\ x_B - y_B + m = 0 \end{cases}$.

• *Ta có:* $\begin{cases} x_A - y_A + m = 0 \\ x_B - y_B + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = x_A + m \\ y_B = x_B + m \end{cases} \Rightarrow A, B \in (d): y = x + m$

$\Rightarrow$ *A, B là giao điểm của (C) và (d). Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):*

$$x + m = \frac{x+2}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = x^2 + (m-3)x - (2m+2) = 0 \ (x \neq 2) \qquad (*).$$

(*) có $\Delta = m^2 + 2m + 17 > 0, \forall m \Rightarrow$ *(d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.*

Và $1.f(2) = -4 < 0 \Rightarrow x_A < 2 < x_B$ *hoặc* $x_B < 2 < x_A$ *(đpcm).*

CHỦ ĐỀ 4: TIẾP TUYẾN

Câu 63. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (1) (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) với $m = 2$.

2) Tìm tham số m để đồ thị của hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng d: $x + y + 7 = 0$ góc α, biết $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

• *Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến* $\Rightarrow$ *tiếp tuyến có VTPT* $\vec{n}_1 = (k; -1)$

Đường thẳng d có VTPT $\vec{n}_2 = (1;1)$.

Ta có $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow 12k^2 - 26k + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{3}{2} \\ k = \frac{2}{3} \end{array}\right.$

YCBT thoả mãn $\Leftrightarrow$ *ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:*

$$\left[\begin{array}{l} y' = \frac{3}{2} \\ y' = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \frac{3}{2} \\ 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_1 \geq 0 \\ \Delta'_2 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2 - 2m - 1 \geq 0 \\ 4m^2 - m - 3 \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -\frac{1}{4}; m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq -\frac{3}{4}; m \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{4} \text{ hoặc } m \geq \frac{1}{2}$$

Câu 64. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn AB = $4\sqrt{2}$.

• *Giả sử* $A(a; a^3 - 3a^2 + 1), B(b; b^3 - 3b^2 + 1)$ *thuộc (C), với* $a \neq b$.

Vì tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau nên:

$$y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow 3a^2 - 6a = 3b^2 - 6b \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 2(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-2) = 0$$

$\Leftrightarrow a + b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2 - a$. *Vì* $a \neq b$ *nên* $a \neq 2 - a \Leftrightarrow a \neq 1$

Ta có: $AB=\sqrt{(b-a)^2+(b^3-3b^2+1-a^3+3a^2-1)^2}=\sqrt{(b-a)^2+(b^3-a^3-3(b^2-a^2))^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2+\left[(b-a)^3+3ab(b-a)-3(b-a)(b+a)\right]^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2+(b-a)^2\left[(b-a)^2+3ab-3.2\right]^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2+(b-a)^2\left[(b+a)^2-ab-6\right]^2}=\sqrt{(b-a)^2+(b-a)^2(-2-ab)^2}$

$AB^2=(b-a)^2\left[1+(-2-ab)^2\right]=(2-2a)^2\left[1+(a^2-2a-2)^2\right]$

$=4(a-1)^2\left[1+\left[(a-1)^2-3\right]^2\right]=4(a-1)^2\left[(a-1)^4-6(a-1)^2+10\right]$

$=4(a-1)^6-24(a-1)^4+40(a-1)^2$

Mà $AB=4\sqrt{2}$ *nên* $4(a-1)^6-24(a-1)^4+40(a-1)^2=32$

$\Leftrightarrow (a-1)^6-6(a-1)^4+10(a-1)^2-8=0$ *(*)*

Đặt $t=(a-1)^2,\ t>0$. *Khi đó (*) trở thành:*

$t^3-6t^2+10t-8=0\Leftrightarrow (t-4)(t^2-2t+2)=0\Leftrightarrow t=4\Rightarrow (a-1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\Rightarrow b=-1\\ a=-1\Rightarrow b=3\end{array}\right.$

Vậy 2 điểm thoả mãn YCBT là: $A(3;1),\ B(-1;-3)$.

Câu 65. Cho hàm số $y=3x-x^3$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên đường thẳng (d): $y=-x$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

• *Các điểm cần tìm là:* A(2; –2) và B(–2; 2).

Câu 66. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên đường thẳng (d): *y* = 2 các điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

• *Gọi* $M(m;2)\in(d)$.

PT đường thẳng Δ đi qua điểm M và có hệ số góc k có dạng : $y=k(x-m)+2$

Δ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ *hệ PT sau có nghiệm* $\begin{cases}-x^3+3x^2-2=k(x-m)+2 & (1)\\ -3x^2+6x=k & (2)\end{cases}$ *(*).*

Thay (2) và (1) ta được: $2x^3-3(m+1)x^2+6mx-4=0\Leftrightarrow (x-2)\left[2x^2-(3m-1)x+2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ f(x)=2x^2-(3m-1)x+2=0\quad(3)\end{array}\right.$

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) $\Leftrightarrow$ *hệ (*) có 3 nghiệm x phân biệt*

$\Leftrightarrow$ *(3) có hai nghiệm phân biệt khác 2* $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ f(2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\ \text{hoÆc}\ m>\dfrac{5}{3}\\ m\neq 2\end{cases}$.

Vậy từ các điểm M(m; 2) $\in$ *(d): y = 2 với* $\begin{cases}m<-1\ \text{hoÆc}\ m>\dfrac{5}{3}\\ m\neq 2\end{cases}$ *có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C).*

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Tìm các giá trị *m* sao cho trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (d): $x + 2y - 3 = 0$.

• *(d) có hệ số góc* $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ *tiếp tuyến có hệ số góc* $k = 2$. *Gọi x là hoành độ tiếp điểm thì:*

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + (4-3m) = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0 \qquad (1)$$

YCBT $\Leftrightarrow$ *(1) có đúng một nghiệm âm.*

+ Nếu $m = 0$ *thì (1)* $\Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$ *(loại)*

+ Nếu $m \neq 0$ *thì dễ thấy phương trình (1) có 2 nghiệm là* $x = 1$ *hay* $x = \frac{2-3m}{m}$

Do đó để (1) có một nghiệm âm thì $\frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \frac{2}{3} \end{array}\right.$

Vậy $m < 0$ *hay* $m > \frac{2}{3}$.

Câu 68. Cho hàm số $y = \left(|x|+1\right)^2 . \left(|x|-1\right)^2$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Cho điểm $A(a;0)$. Tìm *a* để từ A kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

• *Ta có* $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(a;0)$ *và có hệ số góc k :* $y = k(x-a)$

d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ *hệ phương trình sau có nghiệm:* $(I)\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = k(x-a) \\ 4x^3 - 4x = k \end{cases}$

Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} (A)$ *hoặc* $\begin{cases} 4x(x^2-1) = k \\ f(x) = 3x^2 - 4ax + 1 = 0 \quad (1) \end{cases} (B)$

+ Từ hệ (A), chỉ cho ta một tiếp tuyến duy nhất là $d_1 : y = 0$.

+ Vậy để từ A kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với (C) thì điều kiện cần và đủ là hệ (B) phải có 2 nghiệm phân biệt $(x;k)$ *với* $x \neq \pm 1$, *tức là phương trình (1) phải có 2 nghiệm phân biệt khác* ± 1 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta' = 4a^2 - 3 > 0 \\ f(\pm 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq a < -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ hoÆc } 1 \neq a > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Trên (C) lấy hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là *a* và *b*. Tìm điều kiện đối với *a* và *b* để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

• *Ta có:* $f'(x) = 4x^3 - 4x$

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại A và B là $k_A = f'(a) = 4a^3 - 4a, k_B = f'(b) = 4b^3 - 4b$

Tiếp tuyến tại A, B lần lượt có phương trình là:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

$$y = f'(b)(x-b) + f(b) \Leftrightarrow y = f'(b)x + f(b) - bf'(b)$$

Hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song hoặc trùng nhau khi và chỉ khi:

$$k_A = k_B \Leftrightarrow 4a^3 - 4a = 4b^3 - 4b \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2-1) = 0 \qquad (1)$$

Vì A và B phân biệt nên $a \neq b$*, do đó (1)* $\Leftrightarrow a^2+ab+b^2-1=0 \qquad (2)$

Mặt khác hai tiếp tuyến của (C) tại A và B trùng nhau khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab+b^2-1=0 \\ f(a)-af'(a) = f(b)-bf'(b) \end{cases} (a \neq b) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab+b^2-1=0 \\ -3a^4+2a^2 = -3b^4+2b^2 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm là $(a;b)=(-1;1)$ *hoặc* $(a;b)=(1;-1)$*, hai nghiệm này tương ứng với cùng một cặp điểm trên đồ thị là* $(-1;-1)$ *và* $(1;-1)$

Vậy điều kiện cần và đủ để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau là:

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2-1=0 \\ a \neq \pm 1;\ a \neq b \end{cases}$$

Câu 70. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

• *Tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ* $a \neq -2$ *thuộc (C) có phương trình:*

$$y = \frac{4}{(a+2)^2}(x-a) + \frac{2a}{a+2} \Leftrightarrow 4x-(a+2)^2y+2a^2 = 0$$

Tâm đối xứng của (C) là $I\left(-2;2\right)$*. Ta có:*

$$d(I,d) = \frac{8|a+2|}{\sqrt{16+(a+2)^4}} \leq \frac{8|a+2|}{\sqrt{2.4.(a+2)^2}} = \frac{8|a+2|}{2\sqrt{2}|a+2|} = 2\sqrt{2}$$

$d(I,d)$ *lớn nhất khi* $(a+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-4 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra có hai tiếp tuyến $y = x$ *và* $y = x+8$.

Câu 71. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

• *Gọi* $(x_0;y_0)$ *là toạ độ của tiếp điểm* $\Rightarrow y'(x_0) = \dfrac{-1}{(2x_0+3)^2} < 0$

ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y = -x$ *(vì tiếp tuyến có hệ số góc âm).*

Nghĩa là: $y'(x_0) = \dfrac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$

+ Với $x_0 = -1;\ y_0 = 1 \Rightarrow \Delta:\ y-1 = -(x+1) \Leftrightarrow y = -x$ *(loại)*

+ Với $x_0 = -2;\ y_0 = 0 \Rightarrow \Delta:\ y-0 = -(x+2) \Leftrightarrow y = -x-2$ *(nhận)*

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -x-2$.

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục O*x*, O*y* lần lượt tại các điểm A và B thoả mãn OA = 4OB.

• *Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại* $M(x_0;y_0)\in(C)$ *cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho* $OA=4OB$.

Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ *Hệ số góc của d bằng* $\dfrac{1}{4}$ *hoặc* $-\dfrac{1}{4}$.

Hệ số góc của d là $y'(x_0)=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}<0\Rightarrow-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\ \left(y_0=\dfrac{3}{2}\right)\\ x_0=3\quad\left(y_0=\dfrac{5}{2}\right)\end{array}\right.$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l}y=-\dfrac{1}{4}(x+1)+\dfrac{3}{2}\\ y=-\dfrac{1}{4}(x-3)+\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}\\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}\end{array}\right.$.

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất.

• *Lấy điểm* $M\left(m;2+\dfrac{1}{m-2}\right)\in(\mathrm{C})$. *Ta có:* $y'(m)=-\dfrac{1}{(m-2)^2}$

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình: $y=-\dfrac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\dfrac{1}{m-2}$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\dfrac{2}{m-2}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang là: $B(2m-2;2)$

Ta có: $AB^2=4\left[(m-2)^2+\dfrac{1}{(m-2)^2}\right]\geq 8$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=1\end{array}\right.$

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3;3)$ *hoặc* $M(1;1)$

Câu 74. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Cho *M* là điểm bất kì trên (*C*). Tiếp tuyến của (*C*) tại *M* cắt các đường tiệm cận của (*C*) tại *A* và *B*. Gọi *I* là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm toạ độ điểm *M* sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác *IAB* có diện tích nhỏ nhất.

• *Giả sử* $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$, $x_0\neq 2$, $y'(x_0)=\dfrac{-1}{\left(x_0-2\right)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) tại M: $y=\dfrac{-1}{\left(x_0-2\right)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

Toạ độ giao điểm A, B của (Δ) với hai tiệm cận là: $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$; $B\left(2x_0-2;2\right)$

Ta thấy $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2+2x_0-2}{2}=x_0=x_M$, $\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}=y_M$ *suy ra M là trung điểm của AB.*

Mặt khác I(2; 2) và ΔIAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-3}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{1}{(x_0-2)^2}\right]\ge 2\pi$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\dfrac{1}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=3\end{array}\right.$

Do đó điểm M cần tìm là M(1; 1) hoặc M(3; 3)

Câu 75. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 tiệm cận tại A và B với chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất.

• *Giao điểm của 2 tiệm cận là* $I(1;2)$. *Gọi* $M\left(x_0;2+\dfrac{3}{x_0-1}\right)\in(C)$.

+ *PTTT tại M có dạng:* $y=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+2+\dfrac{3}{x_0-1}$

+ *Toạ độ các giao điểm của tiếp tuyến với 2 tiệm cận:* $A\left(1;2+\dfrac{6}{x_0-1}\right)$, $B(2x_0-1;2)$

+ *Ta có:* $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{|x_0-1|}\cdot 2|x_0-1|=2.3=6$ *(đvdt)*

+ *ΔIAB vuông có diện tích không đổi ⇒ chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất khi IA= IB*

$$\Leftrightarrow\frac{6}{|x_0-1|}=2|x_0-1|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1+\sqrt{3}\\x_0=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn điều kiện $M_1\left(1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$

Khi đó chu vi ΔAIB = $4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

Chú ý: *Với 2 số dương a, b thoả ab = S (không đổi) thì biểu thức P =* $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ *nhỏ nhất khi và chỉ khi a = b.*

Thật vậy: P = $a+b+\sqrt{a^2+b^2}\ge 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=(2+\sqrt{2})\sqrt{ab}=(2+\sqrt{2})\sqrt{S}$.

Dấu "=" xảy ra ⇔ a = b.

Câu 76. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Cho điểm $A(0;a)$. Tìm *a* để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục hoành.

• *Phương trình đường thẳng d đi qua* $A(0;a)$ *và có hệ số góc k:* $y=kx+a$

d là tiếp tuyến của (C) ⇔ Hệ PT $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} = kx + a \\ k = \dfrac{-3}{(x-1)^2} \end{cases}$ *có nghiệm*

$\Leftrightarrow$ *PT:* $(1-a)x^2 + 2(a+2)x - (a+2) = 0$ *(1) có nghiệm* $x \neq 1$.

Để qua A có 2 tiếp tuyến thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' = 3a + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \end{cases}$ *(*)*

Khi đó ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{2(a+2)}{a-1}$; $x_1 x_2 = \dfrac{a+2}{a-1}$ *và* $y_1 = 1 + \dfrac{3}{x_1 - 1}$; $y_2 = 1 + \dfrac{3}{x_2 - 1}$

Để 2 tiếp điểm nằm về 2 phía đối với trục hoành thì $y_1 . y_2 < 0$

$\Leftrightarrow \left(1 + \dfrac{3}{x_1 - 1}\right).\left(1 + \dfrac{3}{x_2 - 1}\right) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1 . x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}{x_1 . x_2 - (x_1 + x_2) + 1} < 0 \Leftrightarrow 3a + 2 > 0 \Leftrightarrow a > -\dfrac{2}{3}$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được: $\begin{cases} a > -\dfrac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$.

Câu 77. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Cho điểm $M_o(x_o; y_o)$ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt các tiệm cận của (C) tại các điểm A và B. Chứng minh M_o là trung điểm của đoạn thẳng AB.

• $M_o(x_o; y_o) \in$ *(C)* $\Rightarrow y_0 = 1 + \dfrac{4}{x_0 - 1}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) tại M_0 : $y - y_0 = -\dfrac{4}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0)$

Giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A(2x_0 - 1; 1)$, $B(1; 2y_0 - 1)$.

$\Rightarrow \dfrac{x_A + x_B}{2} = x_0$; $\dfrac{y_A + y_B}{2} = y_0 \Rightarrow$ *M_0 là trung điểm AB.*

Câu 78. Cho hàm số : $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị (C) đều lập với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

• *Giả sử* $M\left(a; \dfrac{a+2}{a-1}\right) \in$ *(C).*

PTTT (d) của (C) tại M: $y = y'(a).(x-a) + \dfrac{a+2}{a-1} \Leftrightarrow y = \dfrac{-3}{(a-1)^2}x + \dfrac{a^2 + 4a - 2}{(a-1)^2}$

Các giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A\left(1; \dfrac{a+5}{a-1}\right)$, $B(2a-1; 1)$.

$\overrightarrow{IA}=\left(0;\frac{6}{a-1}\right) \Rightarrow IA=\frac{6}{|a-1|}$; $\overrightarrow{IB}=(2a-2;0) \Rightarrow IB=2|a-1|$

Diện tích ΔIAB*:* $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=6$ *(đvdt)* $\Rightarrow$ *ĐPCM.*

Câu hỏi tương tự đối với hàm số $y=\frac{2x-4}{x+1}$ *ĐS: S = 12.*

Câu 79. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận, Δ là một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C). d là khoảng cách từ I đến Δ. Tìm giá trị lớn nhất của d.

• $y'=\frac{-1}{(x+1)^2}$. *Giao điểm của hai đường tiệm cận là I(–1; 1). Giả sử* $M\left(x_0;\frac{x_0+2}{x_0+1}\right)\in(C)$

Phương trình tiếp tuyến Δ *với đồ thi hàm số tại M là:*

$$y=\frac{-1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0+1} \Leftrightarrow x+(x_0+1)^2y-x_0-(x_0+1)(x_0+2)=0$$

Khoảng cách từ I đến Δ *là* $d=\frac{2|x_0+1|}{\sqrt{1+(x_0+1)^4}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\le\sqrt{2}$

Vậy GTLN của d bằng $\sqrt{2}$ *khi* $x_0=0$ *hoặc* $x_0=-2$.

Câu 80. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

• *Tiếp tuyến của (C) tại điểm* $M(x_0;f(x_0))\in(C)$ *có phương trình:*

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-2x_0^2+2x_0-1=0 \quad (*)$$

Khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến (*) bằng $\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2-2x_0|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$

Các tiếp tuyến cần tìm : $x+y-1=0$ *và* $x+y-5=0$

Câu 81. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên Oy tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

• *Gọi* $M(0;y_o)$ *là điểm cần tìm. PT đường thẳng qua M có dạng:* $y=kx+y_o$ *(d)*

(d) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x+1}{x-1}=kx+y_o\\ \frac{-2}{(x-1)^2}=k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y_o-1)x^2-2(y_o+1)x+y_o+1=0 \quad (1)\\ x\neq 1;\ \frac{-2}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ *(*)*

YCBT $\Leftrightarrow$ *hệ (*) có 1nghiệm* $\Leftrightarrow$ *(1) có 1 nghiệm khác 1*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_o = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y_o \neq 1 \\ \Delta' = (y_o+1)^2 - (y_o-1)(y_o+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}; y_o = 1 \Rightarrow k = -8 \\ x = 0; y_o = -1 \Rightarrow k = -2 \end{array} \right.$$

Vậy có 2 điểm cần tìm là: M(0; 1) và M(0; –1).

Câu 82. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến cách đều hai điểm *A*(2; 4), *B*(–4; –2).

• *Gọi* x_0 *là hoành độ tiếp điểm (* $x_0 \neq -1$*).*

PTTT (d) là $y = \dfrac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0+1}{x_0+1} \Leftrightarrow x - (x_0+1)^2 y + 2x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0$

Ta có: $d(A,d) = d(B,d) \Leftrightarrow \left|2 - 4(x_0+1)^2 + 2x_0^2 + 2x_0 + 1\right| = \left|-4 + 2(x_0+1)^2 + 2x_0^2 + 2x_0 + 1\right|$

$$\Leftrightarrow x_0 = 1 \vee x_0 = 0 \vee x_0 = -2$$

Vậy có ba phương trình tiếp tuyến: $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4};\ y = x + 1;\ y = x + 5$

Câu 83. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{1-x}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận, A là điểm trên (C) có hoành độ là *a*. Tiếp tuyến tại A của (C) cắt hai đường tiệm cận tại P và Q. Chứng tỏ rằng A là trung điểm của PQ và tính diện tích tam giác IPQ.

• $I(1;-2)$, $A\left(a; \dfrac{2a-1}{1-a}\right)$. *PT tiếp tuyến d tại A:* $y = \dfrac{1}{(1-a)^2}(x-a) + \dfrac{2a-1}{1-a}$

Giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến d: $P\left(1; \dfrac{2a}{1-a}\right)$

Giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến d: $Q(2a-1;-2)$

Ta có: $x_P + x_Q = 2a = 2x_A$. *Vậy A là trung điểm của PQ.*

$IP = \left|\dfrac{2a}{1-a} + 2\right| = \dfrac{2}{|1-a|}$; $IQ = |2(a-1)|$

$S_{IPQ} = \dfrac{1}{2} IP.IQ = 2$ *(đvdt)*

Câu 84. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) biết tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho côsin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, với I là giao 2 tiệm cận.

• *I(2; 2). Gọi* $M\left(x_0; \dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right) \in (C)$, $x_0 \neq 2$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y=-\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0-2}$

Giao điểm của Δ với các tiệm cận: $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$, $B(2x_0-2;2)$.

Do $\cos\widehat{ABI}=\frac{4}{\sqrt{17}}$ *nên* $\tan\widehat{ABI}=\frac{1}{4}=\frac{IA}{IB}\Leftrightarrow IB^2=16.IA^2\Leftrightarrow(x_0-2)^4=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=4\end{array}\right.$

Kết luận: Tại $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ *phương trình tiếp tuyến:* $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

Tại $M\left(4;\frac{5}{3}\right)$ *phương trình tiếp tuyến:* $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$

CHỦ ĐỀ 5: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Câu 85. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để phương trình $x^3-3x^2=m^3-3m^2$ có ba nghiệm phân biệt.

• *PT* $x^3-3x^2=m^3-3m^2\Leftrightarrow -x^3+3x^2+1=-m^3+3m^2+1$. *Đặt* $k=-m^3+3m^2+1$

Số nghiệm của PT bằng số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng d: $y=k$

Dựa vào đồ thị (C) ta có PT có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1<k<5\Leftrightarrow m\in(-1;3)\setminus\{0;2\}$

Câu 86. Cho hàm số $y=x^4-5x^2+4$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để phương trình $|x^4-5x^2+4|=\log_2 m$ có 6 nghiệm.

• *Dựa vào đồ thị ta có PT có 6 nghiệm* $\Leftrightarrow \log_{12} m=\frac{9}{4}\Leftrightarrow m=12^{\frac{9}{4}}=144\sqrt[4]{12}$.

Câu 87. Cho hàm số: $y=x^4-2x^2+1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình: $x^4-2x^2+1+\log_2 m=0$ $(m>0)$

• $x^4-2x^2+1+\log_2 m=0\Leftrightarrow x^4-2x^2+1=-\log_2 m$ *(*)*

+ Số nghiệm của (*) là số giao điểm của 2 đồ thị $y=x^4-2x^2+1$ *và* $y=-\log_2 m$

+ Từ đồ thị suy ra:

$0<m<\frac{1}{2}$	$m=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<m<1$	$m=1$	$m>1$
2 nghiệm	***3 nghiệm***	***4 nghiệm***	***2 nghiệm***	***vô nghiệm***

Câu 88. Cho hàm số $y=f(x)=8x^4-9x^2+1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Dựa vào đồ thị (C) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$8\cos^4 x-9\cos^2 x+m=0 \text{ với } x\in[0;\pi]$$

• *Xét phương trình:* $8\cos^4 x-9\cos^2 x+m=0$ *với* $x\in[0;\pi]$ *(1)*

Đặt $t=\cos x$, *phương trình (1) trở thành:* $8t^4-9t^2+m=0$ *(2)*

Vì $x \in [0;\pi]$ *nên* $t \in [-1;1]$*, giữa x và t có sự tương ứng một đối một, do đó số nghiệm của phương trình (1) và (2) bằng nhau.*

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 8t^4 - 9t^2 + 1 = 1 - m$ *(3)*

Gọi (C₁): $y = 8t^4 - 9t^2 + 1$ *với* $t \in [-1;1]$ *và (d):* $y = 1 - m$*. Phương trình (3) là phương trình hoành độ giao điểm của* (C_1) *và (d).*

Chú ý rằng (C_1) *giống như đồ thị (C) trong miền* $-1 \le x \le 1$.

Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau:

$m<0$	$m=0$	$0<m<1$	$1 \le m < \frac{81}{32}$	$m = \frac{81}{32}$	$m > \frac{81}{32}$
vô nghiệm	***1 nghiệm***	***2 nghiệm***	***4 nghiệm***	***2 nghiệm***	***vô nghiệm***

Câu 89. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm các giá trị của *m* để phương trình sau có 2 nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

• *Xét phương trình:* $\sin^6 x + \cos^6 x = m(\sin^4 x + \cos^4 x)$ *(*)*

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = m\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) \Leftrightarrow 4 - 3\sin^2 2x = 2m(2 - \sin^2 2x) \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin^2 2x$*. Với* $x \in \left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ *thì* $t \in [0;1]$*. Khi đó (1) trở thành:*

$$2m = \frac{3t-4}{t-2} \text{ với } t \in [0;1]$$

Nhận xét : với mỗi $t \in [0;1]$ *ta có :* $\left[\begin{array}{l}\sin 2x = -\sqrt{t}\\ \sin 2x = \sqrt{t}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = \sqrt{t}$

Để (*) có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ *thì* $\sqrt{t} \in \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right) \Rightarrow t \in \left[\dfrac{3}{4};1\right)$

Dựa vào đồ thị (C) ta có: $y(1) < 2m \le y\left(\dfrac{3}{4}\right) \Leftrightarrow 1 < 2m \le \dfrac{7}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m \le \dfrac{7}{10}$.

Câu 90. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình $\dfrac{|x|+1}{|x|-1} = m$.

• Số nghiệm của $\dfrac{|x|+1}{|x|-1} = m$ bằng số giao điểm của đồ thị (C′): $y = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$ và $y = m$.

Dựa vào đồ thị ta suy ra được:

$m<-1; m>1$	$m=-1$	$-1<m\le 1$
2 nghiệm	**1 nghiệm**	**vô nghiệm**

CHỦ ĐỀ 6: ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ

Câu 91. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua tâm M(–1; 3).

• *Gọi* $A\left(x_0;y_0\right)$, B *là điểm đối xứng với A qua điểm* $M(-1;3)\Rightarrow B\left(-2-x_0;6-y_0\right)$

$$A,B\in(C)\ \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-x_0^3+3x_0+2 \\ 6-y_0=-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6=-x_0^3+3x_0+2-\left(-2-x_0\right)^3+3\left(-2-x_0\right)+2 \Leftrightarrow 6x_0^2+12x_0+6=0$$

$\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow y_0=0$

Vậy 2 điểm cần tìm là: $\left(-1;0\right)$ *và* $\left(-1;6\right)$

Câu 92. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng d: $2x-y+2=0$.

• *Gọi* $M\left(x_1;y_1\right);N\left(x_2;y_2\right)$ *thuộc (C) là hai điểm đối xứng qua đường thẳng d*

I là trung điểm của AB nên $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$*, ta có* $I\in d$

Có: $\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{\left(-x_1^3+3x_1+2\right)+\left(-x_2^3+3x_2+2\right)}{2}=2.\dfrac{x_1+x_2}{2}+2$

$$\Rightarrow -\left(x_1+x_2\right)^3+3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)+3\left(x_1+x_2\right)=2\left(x_1+x_2\right)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1 \end{array}\right.$$

Lại có: $MN\perp d\Rightarrow \left(x_2-x_1\right).1+\left(y_2-y_1\right).2=0$

$$\Rightarrow 7\left(x_2-x_1\right)-2\left(x_2-x_1\right)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)=0\Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\frac{7}{2}$$

- *Xét* $x_1+x_2=0\Rightarrow x_1=\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}};x_2=\mp\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

- *Xét* $\begin{cases} x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1 \\ x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\dfrac{7}{2} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+x_2^2=\dfrac{9}{4} \\ x_1x_2=\dfrac{5}{4} \end{cases}\Rightarrow$ *vô nghiệm*

Vậy 2 điểm cần tìm là: $\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}};2-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right);\left(-\sqrt{\dfrac{7}{2}};2+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)$

Câu 93. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-\dfrac{11}{3}$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên đồ thị (C) hai điểm phân biệt M, N đối xứng nhau qua trục tung.

• *Hai điểm* $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)\in(C)$ *đối xứng nhau qua Oy* $\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-x_1\neq 0 \\ y_1=y_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ -\dfrac{x_1^3}{3} + x_1^2 + 3x_1 - \dfrac{11}{3} = -\dfrac{x_2^3}{3} + x_2^3 + 3x_2 - \dfrac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Vậy hai điểm thuộc đồ thị (C) và đối xứng qua Oy là: $M\left(3;\dfrac{16}{3}\right)$, $N\left(-3;\dfrac{16}{3}\right)$.

Câu 94. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích các hệ số góc bằng –9.

Giao điểm 2 tiệm cận là $I(-1;2)$.

Gọi $M\left(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1}\right) \in (C) \Rightarrow k_{IM} = \dfrac{y_M - y_I}{x_M - x_I} = \dfrac{-3}{(x_0+1)^2}$

+ Hệ số góc của tiếp tuyến tại M: $k_M = y'(x_0) = \dfrac{3}{(x_0+1)^2}$

+ YCBT $\Leftrightarrow k_M.k_{IM} = -9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$. *Vậy có 2 điểm M thỏa mãn: M(0; –3) và M(–2; 5)*

Câu 95. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

• *Gọi* $M(x_0;y_0) \in$ *(C),* ($x_0 \neq -1$) *thì* $y_0 = \dfrac{2x_0+1}{x_0+1} = 2 - \dfrac{1}{x_0+1}$

Gọi A, B lần lượt là hình chiếu của M trên TCĐ và TCN thì:

$$MA = |x_0+1|,\ MB = |y_0-2| = \left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $MA + MB \geq 2\sqrt{MA.MB} = 2\sqrt{|x_0+1|.\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|} = 2$

$\Rightarrow$ *MA + MB nhỏ nhất bằng 2 khi* $|x_0+1| = \dfrac{1}{|x_0+1|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

Vậy ta có hai điểm cần tìm là (0; 1) và (–2; 3).

Câu hỏi tương tự:

a) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ *ĐS:* $x_0 = -1 \pm \sqrt{3}$

Câu 96. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm các điểm thuộc (C) cách đều 2 tiệm cận.

• *Gọi* $M(x;y) \in$ *(C) và cách đều 2 tiệm cận x = 2 và y = 3.*

Ta có: $|x-2|=|y-3| \Leftrightarrow |x-2|=\left|\dfrac{3x-4}{x-2}-2\right| \Leftrightarrow |x-2|=\left|\dfrac{x}{x-2}\right| \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-2}=\pm(x-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm thoả mãn đề bài là : M_1(1; 1) và M_2(4; 6)

Câu 97. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết M(–3; 0) và N(–1; –1).

• $\overrightarrow{MN}=(2;-1) \Rightarrow$ *Phương trình MN:* $x+2y+3=0$.

Phương trình đường thẳng (d) ⊥ MN có dạng: $y=2x+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$\dfrac{2x-4}{x+1}=2x+m \Leftrightarrow 2x^2+mx+m+4=0 \;\; (x\neq -1)$ *(1)*

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow \Delta=m^2-8m-32>0$ *(2)*

Khi đó $A(x_1;2x_1+m),\ B(x_2;2x_2+m)$ *với* $x_1,\ x_2$ *là các nghiệm của (1)*

Trung điểm của AB là $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};x_1+x_2+m\right)\equiv I\left(-\dfrac{m}{4};\dfrac{m}{2}\right)$ *(theo định lý Vi-et)*

A, B đối xứng nhau qua MN $\Leftrightarrow I\in MN \Leftrightarrow m=-4$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow 2x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow$ *A(0; –4), B(2; 0).*

Câu 98. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên đồ thị (C) hai điểm B, C thuộc hai nhánh sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A với A(2; 0).

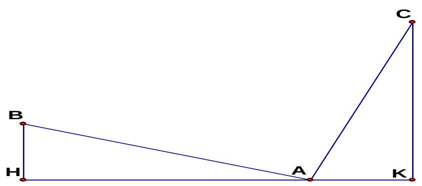
• *Ta có* $(C): y=2+\dfrac{2}{x-1}$. *Gọi* $B\left(b;2+\dfrac{2}{b-1}\right),\ C\left(c;2+\dfrac{2}{c-1}\right)$ *với* $b<1<c$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên trục Ox.

Ta có: $AB=AC;\ \widehat{BAC}=90^0 \Rightarrow \widehat{CAK}+\widehat{BAH}=90^0=\widehat{CAK}+\widehat{ACK} \Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{ACK}$

và: $\widehat{BHA}=\widehat{CKA}=90^0 \Rightarrow \Delta ABH=\Delta CAK \Rightarrow \begin{cases} AH=CK \\ HB=AK \end{cases}$

Hay: $\begin{cases} 2-b=2+\dfrac{2}{c-1} \\ \left|2+\dfrac{2}{b-1}\right|=|c-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=3 \end{cases}$.



Vậy $B(-1;1),\ \ C(3;3)$

Câu 99. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm tọa độ điểm M ∈ (C) sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

• *Giả sử* $M\left(x_0; 2-\frac{3}{x_0+1}\right) \in (C)$. *PTTT Δ của (C) tại M là:*

$$y-2+\frac{3}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) \Leftrightarrow 3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ *tới tiếp tuyến Δ là:*

$$d=\frac{|3(-1-x_0)-3(x_0+1)|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo BĐT Cô–si: $\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2 \ge 2\sqrt{9}=6 \Rightarrow d \le \sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ *khi* $\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2=3 \Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ *hoặc* $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

Câu 100. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm những điểm trên đồ thị (C) cách đều hai điểm A(2; 0) và B(0; 2).

• *PT đường trung trực đọan AB:* $y=x$.

Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoành độ là nghiệm của PT:

$$\frac{x+2}{2x-1}=x \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Hai điểm cần tìm là: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Câu 101. Cho hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên hai nhánh của đồ thị (C) hai điểm A và B sao cho AB ngắn nhất.

• *Tập xác định D =* $R\setminus\{-1\}$. *Tiệm cận đứng* $x=-1$.

Giả sử $A\left(-1-a;1+\frac{4}{a}\right), B\left(-1+b;1-\frac{4}{b}\right)$ *(với* $a>0, b>0$*) là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C)*

$$AB^2=(a+b)^2+16\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=(a+b)^2\left[1+\frac{16}{a^2b^2}\right]\ge 4ab\left[1+\frac{16}{a^2b^2}\right]=4ab+\frac{64}{ab}\ge 32$$

AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB=4\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 4ab=\frac{16}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a^4=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\sqrt[4]{4}$

Khi đó: $A\left(-1-\sqrt[4]{4};1+\sqrt[4]{64}\right), B\left(-1+\sqrt[4]{4};1-\sqrt[4]{64}\right)$.

CHUYÊN ĐỀ 2. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

CHỦ ĐỀ 1: HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐƠN GIẢN GỒM CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC

A. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Phương pháp:

Hệ pt bậc nhất 2 ẩn có dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

* TH 1: $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, ta có; $\begin{cases} 0 = c_1 \\ 0 = c_2 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Đúng: hpt có vô số nghiệm } \forall x \in R, \forall y \in R \\ \text{Sai: hpt vô nghiệm} \end{array} \right.$

* TH2: $a_1^2 + b_1^1 + a_2^2 + b_2^2 > 0$.

Tính: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

+ Nếu $D \neq 0$: hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$

+ Nếu D = 0

- $D_x \neq 0$ hay $D_y \neq 0$: hệ phương trình vô nghiệm.
- $D_x = D_y = 0$: hệ phương trình có vô số nghiệm: $\forall x \in R$, được tính theo x

2. Ví dụ:

VD1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{6x-3}{y-1} - \dfrac{2y}{x+1} = 5 \\ \dfrac{4x-2}{y-1} - \dfrac{4y}{x+1} = 2 \end{cases}$

Đặt $u = \dfrac{2x-1}{y-1}, v = \dfrac{y}{x+1}$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} 3u - 2v = 5 \\ 2u - 4v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{y-1} = 2 \\ \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $S = \left\{ \left(0; \dfrac{1}{2} \right) \right\}$

VD2: Định m để hệ vô nghiệm

$$\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ m(x+y) - y = 2 \end{cases} \qquad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ mx + (m-2)y = 2 \end{cases}$$

Ta có $\begin{array}{l} D = 2m^2(m-2) - 3m(m-1) = 2m^3 - 7m^2 + 3m \\ D_x = 3(m-2) - 6(m-1) = -3m \end{array}$

Hệ đã cho vô nghiệm

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 7m^2 + 3m = 0 \\ -3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(2m^2 - 7m + 3) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 7m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = \frac{1}{2}$$

Vậy hệ vô nghiệm khi: $m = 3 \vee m = \dfrac{1}{2}$

VD3: định m để hệ có vô số nghiệm: $\begin{cases} -4x + my = m + 1 \\ (m+6)x + 2y = m + 3 \end{cases}$

Ta có:

$$D = -8 - m(m+6) = -m^2 - 6m - 8$$

$$D_x = 2(m+1) - m(m+3) = -m^2 - m + 2$$

$$D_y = -4(m+3) - (m+1)(m+6) = -m^2 - 11m - 18$$

Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 6m - 8 = 0 \\ -m^2 - m + 2 = 0 \\ -m^2 - 11m - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \vee m = -4 \\ m = -2 \vee m = 1 \\ m = -2 \vee m = -9 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy hệ có vô số nghiệm khi m= -2.

VD 4: Tìm các giá trị của b sao cho với mọi thì hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + 2ay = b \\ ax + (1-a)y = b^2 \end{cases}$$

Ta có:

$$D = 1 - a - 2a^2$$

$$D \neq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1 \wedge a \neq \frac{1}{2}$$

Thì hệ luôn có nghiệm

Khi a = -1, hệ trở thành: $\begin{cases} x - 2y = b \\ x - 2y = -b^2 \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow b = -b^2 \Leftrightarrow b + b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = -1$

Khi $a = \dfrac{1}{2}$, hệ trở thành $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = b \\ x + y = 2b^2 \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow b = 2b^2 \Leftrightarrow b(2b-1) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = -\dfrac{1}{2}$

Vậy hệ có nghiệm với mọi $a \in \mathbb{R}$ khi: $\begin{cases} b = 0 \vee b = -1 \\ b = 0 \vee b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow b = 0$

VD5: Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a(x-1)+by=1 \\ b(x-1)+ay=1 \end{cases}$$

Hệ tương đương: $\begin{cases} ax-a+by=1 \\ bx-b+ay=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=a+1 \\ bx+ay=b+1 \end{cases}$

Ta có:

$D=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$D_x=(a-b)(a+b+1)$

$D_y=a-b$

Biện luận:

1/ $D\neq 0 \Leftrightarrow a^2-b^2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq \pm b$

Hệ có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{(a-b)(a+b+1)}{(a-b)(a+b)}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{1}{a+b}$$

2/ $a=b\Rightarrow D=0; D_x=0; D_y=0$

***** $b\neq 0$: Hệ có vô số nghiệm.

3/ $a=-b; D=0; D_y=-2b$

$b\neq 0; D=0; D_y\neq 0 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm

4/ $a=b=0: \begin{cases} 0.x+0.y=1 \\ 0.x+0.y=1 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm

VD6: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x+8y=4m \\ mx+(m+3)y=3m-1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

Hướng dẫn giải:

Ta có: $D=\begin{vmatrix} m+1 & 8 \\ m & m+3 \end{vmatrix}=(m+1)(m+3)-8m=m^2-4m+3$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D\neq 0 \Leftrightarrow m^2-4m+3\neq 0$

$\Leftrightarrow m\neq 1$ và $m\neq 3$.

VD7: Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} mx-y=2m (1) \\ 4x-my=m+6 (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Từ (1) suy ra $y=mx-2m$, thay vào (2) ta được:

$4x-m(mx-2m)=m+6 \Leftrightarrow (4-m)^2x=-2m^2+m+6$

$\Leftrightarrow (m^2-4)x=(m-2)(2m+3)$ (3)

i) $m^2-4\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$: Hệ có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{2m+3}{m+2}; y=mx-2m=\frac{2m^2+3m}{m+2}-2m=\frac{-m}{m+2}$$

ii) m=2: Hệ trở thành $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow 2x-y=4$.

Hệ có vô số nghiệm $(x;2x-4); x\in R$

iii) m=-2:(3) trở thành $0x=4$:Hệ vô nghiệm.

Bài tập củng cố:

Bài 1. Tìm các giá trị của m để nghiệm của hệ phương trình sau là số dương: $\begin{cases} x-y=2 \\ mx+y=3 \end{cases}$

Bài 2. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+y=2m \\ x+my=m+1 \end{cases}$

a/ Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất. Tìm hệ thức liên hệ x, y độc lập với m.
b/ Định m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

Bài 3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my-3m=0 \\ mx+y-2m-1=0 \end{cases}$

a/ Định m để hệ có nghiệm duy nhất
b/ gọi (x,y) là nhgiệm của hệ,tìm hệ thức liên hệ giữa x,y độc lập với m.

Bài 4. Định m nguyên để hệ có nghiệm nguyên

1/ $\begin{cases} mx+2y=m \\ (m-1)x+(m-1)y=1 \end{cases}$; 2/ $\begin{cases} mx-2y=m-2 \\ (m-1)^2x-y=m^2-1 \end{cases}$

Bài 5. Định m để hệ sau có vô số nghiệm:

1/ $\begin{cases} 2(m+2)x-(5m+3)y=2(m-2) \\ (m+2)x-3my=m-2 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} -4x+my=1+m \\ (m+6)x+2y=3+m \end{cases}$

Bài 6. Với giá trị nào của a thì mỗi hệ phương trình sau có nghiệm:

1/ $\begin{cases} (a+1)x-y=a+1 \\ x+(a-1)y=2 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} (a+2)x+3y=3a+9 \\ x+(a+4)y=2 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} ax+2y=a \\ (a-1)x+(a-1)y=1 \end{cases}$ 4/ $\begin{cases} 3x-ay=1 \\ -ax+3y=a-4 \end{cases}$

5/ $\begin{cases} a(a-1)x+a(a+1)y=a^3+2 \\ (a^2-1)x+(a^3+1)y=a^4-1 \end{cases}$

Bài 7. Tìm tất cả các cặp số nguyên (a;b) sao cho hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} ax+by=2 \\ 6x+by=4 \end{cases}$$

Bài 8. Định m để các hệ phương trình sau vô nghiệm:

1/ $\begin{cases} mx-my=m+1 \\ (m^2-m)x+my=2 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} 2m^2x+3(m-1)y=3 \\ m(x+y)-2y=2 \end{cases}$ 3/ $\begin{cases} m^2x+(2-m)=4+m \\ mx+(2m-1)y=m^5-2 \end{cases}$

Bài 9. Định (a; b) để hệ phương trình sau vô nghiệm : $\begin{cases} ax+by=a+b \\ bx+ay=a-b \end{cases}$

Bài 10. Định m để hệ phương trình sau có vô số nghiệm:

1/ $\begin{cases} 2(m+2)x-(5m+3)y=2(m-2) \\ (m+2)x-3my=m-2 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} -4x+my=1+m \\ (m+6)x+2y=3+m \end{cases}$

3/ $\begin{cases} mx+(m-1)y=m \\ 3x+(5-m)y=2m-1 \end{cases}$ 4/ $\begin{cases} 2x-(m+1)y=2 \\ mx+3y=m-2 \end{cases}$

Bài 11. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x-my=3m-1 \\ 2x-y=m+5 \end{cases}$

Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) mà x^2+y^2 nhỏ nhất

Bài 12. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x+my=2m-1 \\ mx-y=m^2-2 \end{cases}$

Định m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) mà x.y lớn nhất.

Bài 13. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} a.x - 2y = 2 \\ x + ay = -1 \end{cases}$

1/ Chứng minh rằng hệ phương trình có nghiệm với mọi a.
2/ Tìm a để hệ có nghiệm (x; y) thỏa mãn: x + y > 0

Bài 14. Xác định a, b, c để hệ phương trình $\begin{cases} ax - by = 2a - b \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$ có vô số nghiệm, đồng thời x = 1, y = 3 là một nghiệm trong các nghiệm đó.

Bài 15. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my - 3m = 0 \\ mx + y - 2m - 1 = 0 \end{cases}$

1/ Định m để hệ có nghiệm duy nhất
2/ Gọi (x;y) là nghiệm của hệ. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập với m.

B. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 3 ẨN

1. Phương pháp:

Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0,\ i = 1,2,3 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Các phương pháp giải hệ phương trình này là: pp Gau – xơ, pp Cramer, pp thế.

2. Ví dụ:

VD1: Giải hệ: $\begin{cases} x - 3y + z = -2 (1) \\ 4x + 2y - 3z = -15 (2) \\ 2x - y + 4z = 7 (3) \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Ta khử ẩn z ở phương trình (2) và (3) bằng cách nhân (1) với 3 rồi cộng vào (2), nhân (1) với -4 rồi cộng vào (3). Khi đó ta được:

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 7x - 7y = -21 (2') \\ -2x + 11y = 15 (3') \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (2') và (3') ta được x=-2,y=1. Thay các giá trị này vào (1) ta được z=3. Vậy hệ đã cho có nghiệm (-2;1;3).

VD 2: Biết rằng hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$ có nghiệm

Hãy chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Hướng dẫn giải:

Giả sử (x;y) là nghiệm của hệ đã cho. Khi đó: $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} c^2(ax + by) = c^3 \\ a^2(bx + cy) = a^3 \\ b^2(cx + ay) = b^3 \end{cases}$

Cộng từng vế ta được: $a^3 + b^3 + c^3 = a^2bx + a^2cy + b^2cx + b^2ay + c^2ax + c^2by$

$$= ab(ax + by) + bc(bx + cy) + ca(cx + ay)$$
$$= abc + bca + cab = 3abc$$

Bài tập củng cố:

Bài 1. Giải hệ phương trình: 1/ $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{6}{5} \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{12}{7} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} xy-x-y=5 \\ yz-y-z=11; \\ zx-z-x=7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x(y-z)=-4 \\ y(z-x)=9 \\ z(x+y)=1 \end{cases}$

Bài 2. Giả sử hệ : $\begin{cases} ax+by=c \\ bx+cy=a \\ cx+ay=b \end{cases}$ có nghiệm.

Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3=3abc$

Bài 3. Cho tam giác ABC có các cạnh a = 7, b = 5, c = 3. Hãy tìm bán kính đường tròn tâm A, tâm B, tâm C đôi một tiếp xúc nhau.

C. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

I. Hệ phương trình gồm 1 phương trình bậc nhất và 1 phương trình bậc hai:

1. Phương pháp:

Có dạng : $\begin{cases} ax+by=c \\ dx^2+exy+fy^2+gx+hy=k \end{cases}$

Từ phương trình bậc nhất, ta tính y theo x (hay x theo y) và thế vào phương trình bậc hai để được phương trình bậc hai theo 1 ẩn x (hay ẩn y)

2. Ví dụ:

Bài tập củng cố:

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

1/ $\begin{cases} \dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{9x^2}-\dfrac{1}{4y^2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$; 2/ $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$; 3/ $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{x-1}-\dfrac{x-y}{2y}=2 \\ x-y=4 \end{cases}$.

Bài 2. Giải các hệ phương trình :

1/ $\begin{cases} (x+y)^4+4(x+y)^2-117=0 \\ x-y=25 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} (18x^2+18x+18y-17)(12x^2-12xy-1)=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} x-y=1 \\ x^3-y^3=7 \end{cases}$ 4/ $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=45 \\ x+y=5 \end{cases}$

Bài 3. Giải và biện luận theo tham số a của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^4+y^4=a^4 \end{cases}$$

II. Hệ phương trình đối xứng loại 1:

1. Phương pháp:

Hệ đối xứng loại 1 có đặc trưng là nếu thay x bởi y, y bởi x thì mỗi phương trình trong hệ không đổi.

Cho hệ đối xứng loại 1: (I) $\begin{cases} f(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \end{cases}$

- Đặt S = x + y và P = x.y, biến đổi hệ (I) thành hệ theo S và P :

$$(\text{II})\begin{cases} F(S;P)=0 \\ G(S;P)=0 \end{cases}$$

- Giải hệ (II) để tính S và P.
- Điều kiện để tồn tại x, y là $S_0^2 - 4P_0 \ge 0$
- Với mỗi cặp nghiệm (S_0 ; P_0) của (II) thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - S_0P + P_0 = 0$.

Ngoài ra, ta cũng có thể đặt ẩn phụ thì hệ phương trình mới có dạng đối xứng, nhưng khi đó ta cần lưu ý đến điều kiện.

*** Chú ý:** Tính chất của nghiệm đối xứng :

- Nếu (x_0 ; y_0) là một nghiệm thì (x_0 ; y_0) cũng là một nghiệm của hệ. Do đó, nếu hệ có nghiệm duy nhất (x_0 ; y_0) thì nghiệm đó cũng là (y_0 ; x_0), suy ra $x_0 = y_0$.

2. Ví dụ:

VD1: Giải hpt sau:

$$\begin{cases} x+y+xy=3 \\ x^2y+y^2x=2 \end{cases} \qquad (I)$$

Đây là hpt đối xứng loại 1

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+xy=3 \\ xy(x+y)=2 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$ với $S^2-4P\ge 0$

Hpt đã cho trở thành:

$$\begin{cases} S+P=3 \\ SP=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=1 \\ P=2 \end{cases} \\ \begin{cases} S=2 \\ P=1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (l)$$

Với $\begin{cases} S=2 \\ P=1 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm x = 1 và y = 1

VD2:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-xy+x+y=8 \\ (x+y)^2+xy=7 \end{cases}$$

Có dạng $\begin{cases} S^2-2P+S=8 \\ S^2-P=7 \end{cases}$ với $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2-2(S^2-7)+S=8 \\ P=S^2-7 \end{cases}$$

thoả $S^2 - 4P \ge 0$

Với $\begin{cases} S=x+y=-2 \\ P=xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} hay \begin{cases} x-1 \\ y=-3 \end{cases}$

Với $\begin{cases} S=x+y+3 \\ P=xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} hay \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

VD3:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+xy+y=2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Đặt $S=x+y$; $P=xy$, ta có hệ:

$$\begin{cases} S+P=2+3\sqrt{2} \\ S^2-2P=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2+2S=10+6\sqrt{2} \\ S+P=2+3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S+1)^2=(3+\sqrt{2})^2 \\ P=2+3\sqrt{2}-S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 2+\sqrt{2} \\ P = 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} S = -4-\sqrt{2} \\ P = 6+4\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

- Với $S = 2+\sqrt{2}; P = 2\sqrt{2}$; x,y là nghiệm phương trình:

$$X^2 - (2+\sqrt{2})X + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 2 \\ X = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

- Với $S = -4-\sqrt{2}; P = 6+4\sqrt{2}$;x,y là nghiệm phương trình:

$X^2 + (4+\sqrt{2})X + 6 + 4\sqrt{2} = 0$: vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm: $(2;\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2};2)$.

VD4:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy(x+y) = 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy(x+y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 2 \\ xy(x+y) = 2 \end{cases}$$

Đặt: $u = x+y; v = xy$

Ta có $\begin{cases} u^3 - 3uv = 2 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - 6 = 2 \\ uv = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$

x,y là nghiệm của phương trình $X^2 - 2X + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow X = 1$$

Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ đã cho là $(1;1)$.

VD5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+xy = m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$$

1/ Giải hệ với m=5

2/ Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm?

Giải:

1/Với m=5, ta có:

$$\begin{cases} x+y+xy = 5 \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy = 5 \\ (x+y)^2 - 2xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2-S \\ S^2 + 2S - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} S = -5 \\ P = 10 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ta chỉ nhận $\begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases}$ thoả S^2- 4P≥ 0

Ta chỉ nhận $\begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases}$ thoả $S^2 - 4P \ge 0$ nên x,y là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ X=2 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} hay \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

2/ Giá trị của m để hệ có nghiệm

Ta có:

$\begin{cases} x+y+xy=m \\ x^2+y^2=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+P=m(1) \\ S^2-2P=m(2) \end{cases}$ với $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P=m-S \\ S^2-2(m-S)=m \end{cases} \Leftrightarrow S^2+3S-3m=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S_1=-1-\sqrt{1+3m} \\ P_1=m-S_1 \end{cases} \\ \begin{cases} S_2=-1+\sqrt{1+3m} \\ P_2=m-S_2 \end{cases} \end{array}\right.$ (với điều kiện $1+3m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{3}$)

Với $m \ge -\frac{1}{3}$ hệ phương trình sẽ có nghiệm nếu $S^2 \ge 4P$ hay:

$\left[\begin{array}{l} S_1^2 \ge 4P_1 \\ S_2^2 \ge 4P_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (-1-\sqrt{1+3m})^2 \ge 4(m+1+\sqrt{1+3m}) \\ (-1-\sqrt{1+3m})^2 \ge 4(m+1-\sqrt{1+3m}) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+1+3m+2\sqrt{1+3m} \ge 4m+4+4\sqrt{1+3m} \\ 1+1+3m-2\sqrt{1+3m} \ge 4m+4-\sqrt{1+3m} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{1+3m} \le -(m+2) \\ 2\sqrt{1+3m} \ge m+2>0 \end{array}\right.$ (loại vì $m \ge -\frac{1}{3}$)

(với $m \ge -\frac{1}{3}$)

$\Leftrightarrow 4(1+3m) \ge m^2+4m+4$

$\Leftrightarrow m^2-8m \le 0 \Leftrightarrow m \in [0;8]$

Vậy $m \in [0;8]$

Giả sử (x,y) là nghiệm của hệ phương trình:

VD6:Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2a-1 \\ x^2+y^2=a^2+2a-3 \end{cases}$

Xác định a để tích xy nhỏ nhất

Giải

Ta có:

$\begin{cases} S=2a-1 \\ S^2-2P=a^2+2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2s-1 \\ P=\frac{3a^2}{2}-3a+2 \end{cases}$

Để phương trình có nghiệm thì :S2 - 2P≥ 0 $\Leftrightarrow$(2a – 1)2-4($\frac{3a^2}{2}$ - 3a + 2)≥ 0

$\Leftrightarrow$-2a + 8a -7≥ 0 $\Leftrightarrow$ a$\in \left[2-\frac{\sqrt{2}}{2};2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

P = xy = $\frac{3a^2}{2}-3a+2$ là biểu thức hàm bậc hai có hoành độ đỉnh cực tiểu nhỏ nhất tại a= 1 $\leq$2-$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy xy đạt giá trị nhỏ nhất tại a=2- $\frac{\sqrt{2}}{2}$

VD7: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=a \\ x^2y+xy^2=3a-8 \end{cases}$

a/ Giải hệ với a = $\frac{7}{2}$

b/ Với giá trị nào của a thì hệ có nghiệm.

Giải

a/ Ta có :

$$\begin{cases} x+y+xy=a \\ x^2y+xy^2=3a-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=\frac{7}{2} \\ x^2y+xy^2=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+P=\frac{7}{2} \\ S.P=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=1 \\ P=\frac{5}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} S=\frac{5}{2} \\ P=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ta chỉ nhận $\begin{cases} S=\frac{5}{2} \\ P=1 \end{cases}$ thoả điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$ và x, y là nghiệm của phương trình

X^2 - $\frac{5}{2}$X + 1= 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$

b/ Trường hợp tổng quát $\begin{cases} S+P=a \\ S.P=3a-8 \end{cases}$ thì S,P là nghiệm của phương trình $X^2 - aX + 3a - 8 = 0$ (1)

Phương trình có nghiệm khi $\Delta = a^2-4(3a-8)\geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2-12a+32\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\leq 4 \\ a\geq 8 \end{array}\right.$$

Với điều kiện đó phương trình (1) có nghiệm

$$X_1=\frac{a-\sqrt{a^2-12a+32}}{2}$$

$$X_2=\frac{a+\sqrt{a^2-12a+32}}{2}$$

- Nếu chọn S=$\frac{a-\sqrt{a^2-12a+32}}{2}$ và P=$\frac{a+\sqrt{a^2-12a+32}}{2}$ thì hệ có nghiệm khi

S2 – 4P ≥ 0 $\Leftrightarrow$($a-\sqrt{a^2-12a+32}$)^2 $\geq$ 8($a+\sqrt{a^2-12a+32}$)

$\Leftrightarrow$a2 – 10a +16 $\geq$ (a+4) $\sqrt{a^2-12a+32}$

$\Leftrightarrow$ (a - 2)(a – 8) $\geq$(a+4) $\sqrt{(a-4)(a-8)}$ (2)

- Nếu chọn S=$\dfrac{a+\sqrt{a^2-12a+32}}{2}$ và P= $\dfrac{a-\sqrt{a^2-12a+32}}{2}$ thì hệ có nghiệm khi:

S2 – 4P ≥ 0 $\Leftrightarrow$(a – 2)(a – 8) $\geq$ -(a+4) $\sqrt{(a-4)(a-8)}$ (3)

Từ (2) va (3) suy ra:

(a – 2)(a – 8) $\geq$- $|a+4|$ $\sqrt{(a-4)(a-8)}$ (4)

Vì (a – 2)(a – 8) $\geq$ 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\leq 2\\ a\geq 8\end{array}\right.$ thì thỏa (4)

Do đó với a$\in$ $(2;4]$ thì (a – 2)(a – 8) < 0 nên

$$\Leftrightarrow (a-2)^2(a-8)^2 \leq (a+4)^2(a-4)(a-8)$$

(4) $\Leftrightarrow 4a^2-13a-8\leq 0$

$$\Leftrightarrow a\in\left[\frac{13-3\sqrt{33}}{8};\frac{13+3\sqrt{33}}{8}\right]$$

Kết hợp với các điều kiện trên ta thấy hệ phương trình đã cho có nghiệm khi a$\leq \dfrac{13+3\sqrt{33}}{8}$ hay a≥ 8.

Bài tập củng cố:

Bài 1/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4\\ x+xy+y=2\end{cases}$

HD: Đặt S= x + y & P= xy với điều kiện S2 - P$\geq$ 0 ta được kết quả

$\begin{cases} x=2\\ y=0\end{cases}$ hay $\begin{cases} x=0\\ y=2\end{cases}$

Bài 2/ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35\end{cases}$

HD: Đặt S= $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ & P= $\sqrt{xy}$ ta được kết quả $\begin{cases} x=9\\ y=4\end{cases} hay \begin{cases} x=4\\ y=9\end{cases}$

Bài 3/ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+xy+y=2+3\sqrt{2}\\ x^2+y^2=6\end{cases}$

HD: Đặt S= x + y & P= xy với điều kiện S2 - P$\geq$ 0 ta được kết quả $\begin{cases} x=2\\ y=\sqrt{2}\end{cases} hay \begin{cases} x=\sqrt{2}\\ y=2\end{cases}$

Bài 4/ Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=9 \end{cases}$

HD: $\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=1 \end{cases}$

Bài 5/Giải hệ phương trình:

$a)\begin{cases} x+y=5 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$

$b)\begin{cases} xy=15 \\ x+y+x^2+y^2=42 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=49 \end{cases}$

$d)\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ x+xy+y=5 \end{cases}$

Bài 6/ Giải hpt sau: $\begin{cases} x^5+y^5=1 \\ x^9+y^9=x^4+y^4 \end{cases}$ (ĐS: $(0;1),(1;0)$)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{cases}$

HD: Đặt S= x + y & P= xy với điều kiện S2 - P$\geq$ 0 ta được kết quả $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

Bài 7:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2-4xy+y^2=k \ (1) \\ y^2-3xy=4 \quad (2) \end{cases}$

1/ Giải hệ với k = 1

2/ Chứng tỏ rằng hệ có nghiệm với mọi k

HD: 1/ $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$

2/ kết hợp 2 phương trình để tìm x theo y va thay vào phương trình còn lại để còn một phương trình theo ẩn y duy nhất

Bài 8: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=4 \end{cases}$

1/ Giải hệ với a=1

2/ Tìm các giá trị của a để hệ có đúng 1 nghiệm

HD: 1/ Đặt S= x + y & P= xy với điều kiện S2 - P$\geq$ 0 ta được kết quả $\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \end{cases}$

2/ $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=2(1+a) \\ x+y=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1-a \\ x+y=\pm 2 \end{cases}$

Điều kiện có nghiệm là $(x+y)^2 - 4xy \geq 0$

$\Leftrightarrow 4 - 4(1 - a) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$

Vậy x,y là nghiệm của phương trình có cùng biệt số $\Delta' = a$ và có 4 nghiệm khác nhau X= 1 $\pm\sqrt{a}$,

X'= -1 $\pm\sqrt{a}$ khi a>0 ,nên để chỉ còn 2 nghiệm a thì a=0 , lúc đó X=x = y=1, X'=x=y= -1
Vậy hệ phương trình có đúng 2 nghiệm là (1:1) , (-1:-1) khi a=0

Bài 9: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y=m \\ x^2-y^2+2x=2 \end{cases}$ giải và biện luận theo m

HD: 1/ Nếu m=-1 Hệ vô nghiệm

2/ Nếu m $\neq$ -1, hệ có nghiệm $\begin{cases} x=\dfrac{2+m^2}{2(m+1)} \\ y=\dfrac{m^2+m-2}{2(m+1)} \end{cases}$

Bài10: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+xy+y=m+1 \\ x^2y+xy^2=m \end{cases}$

1/ Giải hệ với m=2
2/ Tìm m để hệ có ít nhất một nghiệm thỏa điều kiện x>0 : y>0

HD:
1/ Đặt S= x + y & P= xy với điều kiện S2 - P$\geq$ 0 ta được kết quả x=y=1
2/x,y là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - SX + P = 0$ từ đó ta suy ra giá trị của m để hệ có ít nhất một nghiệm thỏa x>0, y>0

ĐS: m $\in \left(0;\dfrac{1}{4}\right]$ hay m ≥ 2

Bài 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35 \end{cases}$

HD: Đặt S= $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ & P= $\sqrt{xy}$ ta được kết quả $\begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases} hay \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases}$

Bài 12: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+xy+y=2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$

HD: Đặt S= x + y & P= xy với điều kiện S^2 - P$\geq$ 0 ta được kết quả $\begin{cases} x=2 \\ y=\sqrt{2} \end{cases} hay \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=2 \end{cases}$

Bài 13: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=9 \end{cases}$

HD: $\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=1 \end{cases}$

Baøi 14: Giaûi caùc heä phöông trình sau ñaây:

21/ $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19 \\ 15xy+5(x+y)=-175 \end{cases}$

22/ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \\ x^2+y^2=160 \end{cases}$

23/ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$

24/ $\begin{cases} \dfrac{1}{2x+y}+x=3 \\ \dfrac{x}{2x+y}=-4 \end{cases}$

25/ $\begin{cases} x^3+y^3=2 \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}$

26/ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18 \\ x+y=12 \end{cases}$

27/ $\begin{cases} (x^2-xy)^2+(x+y)^2=100 \\ (x^2-xy)(x+y)-(x^2-xy+x+y)=34 \end{cases}$

28/ $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=481 \\ x^2+xy+y^2=37 \end{cases}$

29/ $\begin{cases} (x-2y)^2+(y^2+2xy)^2+(x-2y)(y^2+2xy)=13 \\ (x-2y)(y^2+2xy)(x-2y+y^2+2xy)=-12 \end{cases}$

30/ $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^2+y^2-xy=3 \end{cases}$

31/ $\begin{cases} x^2+y^2+2x(y-3)+2y(x-3)+9=0 \\ 2(x+y)-xy+6=0 \end{cases}$

32/ $\begin{cases} 2(x+y)^2-xy=1 \\ x^2y+xy^2=0 \end{cases}$

III. Hệ phương trình đối xứng loại 2:

1. Phương pháp:

Hệ đối xứng loại 2 có đặc trưng nếu thay x bởi y, y bởi x thì phương trình này trở thành phương trình kia và ngược lại

Hpt : $\begin{cases} f_1(x;y)=0 \\ f_2(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x;y)-f_2(x;y)=0 \\ f_2(x;y)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)F(x;y)=0 \\ f_2(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y\ \&\ f_2(x;y)=0 \\ F(x;y)=0\ \&\ f_2(x;y)=0 \end{array}\right.$$

Trong đó F(x;y) là biểu thức đối xứng của x,y.

Chú ý: i) Có thể ta phải đặt ẩn phụ thì hpt mới có dạng đối xứng, nhưng khi đó ta cần lưu ý đến điều kiện của ẩn phụ.

ii) Nếu các ẩn x,y có cùng một điều kiện thì thay vì giữ nguyên phương trình (2) ta nên cộng hai phương trình lại với nhau để đưa hệ hai về dạng đối xứng loại 1.

2. Ví dụ:

VD1: Giải hệ phương trình:

$\begin{cases} 2x+\sqrt{y-1}=3 \\ 2y+\sqrt{x-1}=3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x\ge 1; y\ge 1$.

Đặt: $X=\sqrt{x-1}; Y=\sqrt{y-1}(X,Y\ge 0)$, ta có hệ:

$\begin{cases} 2(X^2+1)+Y=3 \\ 2(Y^2+1)+X=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2+Y=1(1) \\ 2Y^2+X=1(2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ(2) vế theo vế:

$2(X^2-Y^2)-(X-Y)=0 \Leftrightarrow (X-Y)(2X+2Y-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=Y \\ 2X+2Y-1=0 \end{array}\right.$$

i) Với X=Y, thay vào (2) ta có:

$2X^2+X-1=0 \Leftrightarrow X=\dfrac{1}{2}(\text{vì } X\ge 0) \Leftrightarrow x=y=\dfrac{5}{4}$

ii) Với $2X+2Y-1=0 \Leftrightarrow Y=\frac{1}{2}(1-2X)$, thay vào (1) ta có:

$$4X^2-2X-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow Y=\frac{1-\sqrt{5}}{4}(l) \\ X=\frac{1-\sqrt{5}}{4}(l) \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)$.

VD2:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2=x^3-3x^2+2x(1) \\ x^2=y^3-3y^2+2y(2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được:

$$y^2-x^2=x^3-y^3-3(x^2-y^2)+2(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-2x-2y+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-y)\left[x^2+y^2+(x+y-2)^2\right]=0 \Leftrightarrow x=y$$

(vì $x^2+y^2+(x+y-2)^2>0$)

Thay x=y vào (1) ta được:

$$x^3-4x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-4x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 3 nghiệm: $(0;0);(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2});(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2})$.

VD3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-2y^2=2x+y \ (1) \\ y^2-2x^2=2y+x \ (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Trừ từng vế cua phương trình (1) cho (2) ta có:

$x^2-y^2-2y^2+2x^2=2x-2\,y+y-x$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-y^2)=x-y$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(3x+3y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ 3x-3y-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=\frac{1-3x}{3} \end{array}\right.$$

Thay vào phương trình (1) ta có:

TH1: x = y $\Leftrightarrow x^2-2x^2=3x \Leftrightarrow x(x+3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=-3 \Rightarrow y=-3 \end{array}\right.$$

TH2: y = $\frac{1-3x}{3}$ $\Leftrightarrow x^2-2\left(\frac{1-3x}{3}\right)^2=2x+\frac{1-3x}{3}$

$\Leftrightarrow 9x^2-2(1-6x+9x^2)=18x+3-9x$

$\Leftrightarrow 9x^2-3x+5=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

Vậy x = y = 0 hoặc x = y = -3

VD4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-2x+5=4y \\ x^2-2y+5=4x \end{cases}$$

<u>Hướng dẫn giải:</u>

$$\begin{cases} x^2-2x+5=4y \\ x^2-2y+5=4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-y^2)-2(x-y)=-4(x-y) \\ x^2-2x+5=4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+2)=0 \\ x^2-2x+5=4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-2x+5-4y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y+2=0 \\ x^2-2x+5-4y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2-2x+5-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-2x+5-4x=0 \end{cases}$$

TH1: $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-6x+5=0 \text{ (a+b+c=0)} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=1 \text{ hay x=5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=y=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ x^2-2x+5-4y=0 \end{cases}$$

TH2:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2-x \\ x^2+2x+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2-x \\ (x+1)^2+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\varnothing \\ y=-2-x \end{cases}$$

Hệ phương trình vô nghiệm

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$

VD5: Giải và biện luận theo *m* hệ phương trinh sau: $\begin{cases} x^2=my-1\ (1) \\ y^2=mx-1\ (2) \end{cases}$

Giải: Lấy (1) – (2) ta được:

$$\Rightarrow (x-y)(x+y)=m(x+y)$$

(1) – (2) $\Rightarrow (x-y)(x+y+m)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x-m \end{array}\right.$

TH1: y = x

$(1) \Rightarrow x^2 - mx + 1 = 0 \ (\Delta = m^2 - 4)$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq 4$

Khi đó hệ có nghiệm x = y = $\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2} = \alpha$ và x = y = $\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2} = \beta$ (*)

TH2: y = -x – m

(1) $\Rightarrow x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$

$\Delta = m^2 - 4(m^2+1) = -3m^2 - 4 < 0$

Phương trình vô nghiệm

Vậy

- $|m| \geq 2 : (\alpha;\alpha)$, $(\beta;\beta)$ như trên
- $|m| < 2$: vô nghiệm

VD6: Giải và biện luận theo m hệ: $\begin{cases} x^2 + 2xy - y = mx \ (1) \\ y^2 + 2xy - x = my \ (2) \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình ta được :

(x – y)(x + y – m +1) =0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + y - m + 1 = 0 \end{array}\right.$

Thay x = y vào (1) ta được nghiệm

x = y = 0 hay x = y = $\dfrac{m+1}{3}$

Thay x + y –m + 1=0 $\Leftrightarrow y = m - 1 - x$, thay vào (1):

$x^2 - (m-1)x + m - 1 = 0$ có $\Delta = (m-1)(m-5)$

Biện luận theo m biệt số Δ để suy ra nghiệm x và y

Bài tập củng cố:

Bài 1/ Giải hệ phương trình sau: $a) \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$

ĐS: (0;0) , (5;5) , (2;-1) , (–1;2)

Bài 2/ Giải hệ phương trình sau: $a) \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

ĐS: (0;0) , (1;-1) , (-1;1) , $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

Bài 3/ Giải hệ phương trình sau: $a) \begin{cases} x^2 + y + \dfrac{1}{4} = 0 \ (1) \\ x + y^2 + \dfrac{1}{4} = 0 \ (2) \end{cases}$

ĐS: $(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2})$

Bài 4/ Giải hệ phương trình: $a) \begin{cases} x = y^2 - 2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$

$b) \begin{cases} x^3 = 5x + y \\ y^3 = 5y + x \end{cases}$

Bài 5/ Giải hệ phương trình: a) $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{x} \\ 2y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{y} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$

Bài 6/ Giải hpt sau: a) $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$ (ĐS: $x = y = 1$)

b) $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$ (ĐS : $(1;1), \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$)

Bài 7 : Giải hệ $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \ (1) \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \ (2) \end{cases}$ (x = y = 0 hoặc x = y = -3)

Bài 8 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 - 2x + 5 = 4y \\ x^2 - 2y + 5 = 4x \end{cases}$ **ĐS:** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

Bài 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = 3 \\ 2y + \sqrt{x-1} = 3 \end{cases}$ **ĐS:** $\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{5}{4}\right)$

Bài 10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \ (1) \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \ (2) \end{cases}$

Hệ có ba nghiệm $(0;0)$; $(2+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$; $(2-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2})$

Baøi 11: Giaûi caùc heä phöông trình:

1/ $\begin{cases} x^2 + 2y = x \\ y^2 + 2x = y \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} x^2 = 2y \\ y^2 = 2x \end{cases}$

3/ $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 13y + 4x \end{cases}$ 4/ $\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 \\ 2y = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$

5/ $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$ 6/ $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$

7/ $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$ 8/ $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7x \\ y^2 - 2x^2 = 7y \end{cases}$

9/ $\begin{cases} x^2 + y = 2xy \\ y^2 + x = 2xy \end{cases}$ 10/ $\begin{cases} x^2 + y = 20 \\ y^2 + x = 20 \end{cases}$

11/ $\begin{cases} x^3 + y^2 = 2y \\ y^3 + x^2 = 2x \end{cases}$ 12/ $\begin{cases} 2x + y = \dfrac{3}{x^2} \\ 2y + x = \dfrac{3}{y^2} \end{cases}$

13/ $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$ 13/ $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y + m \\ y^3 = 3y + 8x + m \end{cases}$ vôùi m = 0 vaø m = 10

14/ $\begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ xy^2 + 2 = x^2 \end{cases}$ 15/ $\begin{cases} x^2y^2 = 2x^2 + y \\ xy^2 + 2x^2 = 1 \end{cases}$

16/ $\begin{cases} x^2+1=3y \\ y^2+1=3x \end{cases}$ 17/ $\begin{cases} x-3y=4\dfrac{y}{x} \\ y-3x=4\dfrac{x}{y} \end{cases}$

18/ $\begin{cases} 2x^2-3x=y^2-2 \\ 2y^2-3y=x^2-2 \end{cases}$ 19/ $\begin{cases} x^3=x+3y \\ y^3=y+3x \end{cases}$

20/ $\begin{cases} x^2=2+7\dfrac{y}{x} \\ y^2=2+7\dfrac{x}{y} \end{cases}$ 21/ $\begin{cases} x^3=3x+2y \\ y^3=3y+2x \end{cases}$

22/ $\begin{cases} x^3=4x+y \\ y^3=4y+x \end{cases}$ 23/ $\begin{cases} 7x+y-\dfrac{8}{x^2}=0 \\ x+7y-\dfrac{8}{y^2}=0 \end{cases}$

24/ $\begin{cases} 2x^3+x^2y=24 \\ xy^2+2y^2=24 \end{cases}$ 25/ $\begin{cases} 6x+y-\dfrac{56}{x^2}=0 \\ x+6y-\dfrac{56}{y^2}=0 \end{cases}$

26/ $\begin{cases} x^3-4x^2y=-3 \\ y^3-4y^2x=-3 \end{cases}$ 27/ $\begin{cases} y^2=x^3-4x^2+7x \\ x^2=y^3-4y^2+7y \end{cases}$

28/ $\begin{cases} x^2=y^2+7x^2-20x \\ y^2=x^2+7y^2-20y \end{cases}$

Baøi 12: Tìm m ñeå heä phöông trình sau coù nghieäm duy nhaát: $\begin{cases} x^3=y^2+7x^2-mx \\ y^3=x^2+7y^2-my \end{cases}$

Baøi 13: Cho phöông trình sau: $\begin{cases} 7x+y-\dfrac{a}{x^2}=0 \\ 7y+x-\dfrac{a^3}{y^2}=0 \end{cases}$

Chöùng minh raèng heä coù nghieäm duy nhaát vôùi moïi a.

Baøi14 : Giaûi vaø bieän luaän theo m cuûa heä phöông trình:

$$\begin{cases} x^2+2xy-y=mx \\ y^2+2xy-x=my \end{cases}$$

Baøi 15: Trong heä sau ñaây haõy xaùc ñònh a ñeå heä coù nghieäm duy nhaát:

$$\begin{cases} y^2=x^3-4x^2+ax \\ x^2=y^3-4y^2+ay \end{cases}$$

IV. Hệ phương trình đẳng cấp:

1. Phương pháp:

Hệ đẳng cấp bậc 2 có dạng: $\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2 \end{cases}$

- Xét xem x =0 (hay y=0) có thể là nghiệm của hpt không?
- Với $x\neq 0$(hay $y\neq 0$). Đặt y=tx(hay x=ty), ta có:

$$\begin{cases} x^2(a_1+b_1t+c_1t^2=d_1 \\ x^2(a_2+b_2t+c_2t^2=d_2 \end{cases}$$

Chia hai vế của 2 pt ta được 1 pt bậc hai theo ẩn t, từ đó tính x và suy ra y.
Chú ý: Đối với hệ pt đẳng cấp bậc ba ta cũng thực hiện tương tự.

2.Ví dụ:

VD1:Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=1 \\ 2x^2-3xy+4y^2=3 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

_Ta thấy x=0 không thoả hệ
_Với $x\neq 0$, đặt y=tx, thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} x^2(t^2-t+1)=1(1) \\ x^2(2t^2-3t+4)=3(2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) ta được $3(t^2-t+1)=2t^2-3t+4\Rightarrow t=\pm 1$

Với t=1, ta có $x^2=1$, suy ra hệ có nghiệm: $(1;1);(-1;-1)$

Với t=-1 ta có $x^2=\frac{1}{3}$, suy ra hệ có nghiệm $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}}\right);\left(\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

VD2:
Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11 \\ x^2+2xy+3y^2=17 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Ta thấy x=0, y=0 không thoả hệ phương trình, nói cách khác hệ phương rình không có nghiêm x =0 Đặt x = ky và thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases} y^2(3k^2+2k+1)=11\ (1) \\ y^2(k^2+2k+3)=17\ (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3k^2+2k+1}{k^2+2k+3}=\frac{11}{17}\ (k^2+2k+3\geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 51k^2+34k+17=11k^2+22k+33$$

$$\Leftrightarrow 40k^2+12k-16=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-\frac{4}{5} \\ k=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Thay vào (1) ta được:

- k = $-\frac{4}{5}\Rightarrow y^2=\frac{25}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{5}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{5}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

- $k = \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \Rightarrow x = 1 \\ y = -2 \Rightarrow x = -1 \end{array}\right.$$

ĐS: $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}}\right); \left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{\sqrt{3}}\right); (1;2); (-1;-2)$

VD3:

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Ta thấy x=0, y=0 không thoả hệ phương trình, nói cách khác hệ phương trình không có nghiệm x =0. Đặt x = ky và thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5tx^2 - 4t^2x^2 = 38 \\ 5x^2 - 9tx^2 - 3t^2x^2 = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3 + 5t - 4t^2) = 38 \ (1) \\ x^2(5 - 9t - 3t^2) = 15 \ (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3 + 5t - 4t^2}{5 - 9t - 3t^2} = \frac{38}{15} \Leftrightarrow 54t^2 + 417t - 145 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{145}{18} \end{array}\right.$$

Với t= $\frac{1}{3}$ thì (2) $\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right.$

Với t = $-\frac{145}{18}$ thì (2) $\Leftrightarrow x^2 = -\frac{15.108}{12655}$: Phương trình vô nghiệm

Vậy $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$

VD4:

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 - 5xy = 0 \\ 4x^2 + 2xy + 6x - 27 = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Ta thấy x=0, y=0 không thoả hệ phương trình, nói cách khác hệ phương trình không có nghiệm x =0 Đặt x = ky và thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases} x^2 + 6t^2y^2 - 5tx^2 = 0 \\ 4x^2 + 2tx^2 + 6x = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1 + 6t^2 - 5t) = 0 \\ 4x^2 + 2tx^2 + 6x = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t^2 - 5t + 1 = 0 \\ 4x^2 + 2tx^2 + 6x = 27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ 4x^2+x^2+6x=27 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ 4x^2+\dfrac{2}{3}x^2+6x=27 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ 5x^2+6x-27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \Rightarrow y=-\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{9}{5} \Rightarrow y=\dfrac{9}{10} \end{array}\right. \\ \begin{cases} t=\dfrac{1}{3} \\ 14x^2+18x-81=0 \Leftrightarrow x=-9.\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{14}\right) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y=-3.\left(\frac{1\pm\sqrt{15}}{14}\right)$$

ĐS: $\left(-3;-\dfrac{3}{2}\right);\left(9\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{14}\right);-3\left(\dfrac{1\pm\sqrt{15}}{14}\right)\right);\left(-9\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{14}\right);-3\left(\dfrac{1\pm\sqrt{15}}{14}\right)\right);\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{9}{10}\right)$

VD5: Với giá trị nào của m thì hệ: $\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11 \\ x^2+2xy+3y^2=17+m \end{cases}$

Vì x = 0, y = 0 không là nghiệm của hệ nên đặt: y = kx, hệ trở thành:

$$\begin{cases} x^2\left(3+2k+k^2\right)=11 & (1) \\ x^2\left(1+2k+3k^2\right)=17+m & (2) \end{cases}$$

Chia (1) cho (2) ta được:

$$(17+m)\left(3+2k+k^2\right)=11\left(1+2k+3k^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (m-16)k^2+2(m+6)k+3m+40=0 \ (3)$$

Ta có: $3+2k+k^2>0, \forall k \Rightarrow (1)$ luôn có nghiệm x.

Xét :

$m-16=0 \Leftrightarrow m=16$

$(3) \Rightarrow 44k+88=0 \Leftrightarrow k=-2$

Vậy m = 16 (nhận)

Xét $m\neq 16$:

(3) có nghiệm k $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 16 \\ \Delta'\geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 16 \\ (m+6)^2-(m-16)(3m+40)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 16 \\ -m^2+10m+338\geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 5-11\sqrt{3}\leq m\leq 5+11\sqrt{3} \Rightarrow$ hệ có nghiệm.

■ **Bài tập củng cố:**

Bài 1/ Giải các hệ phương trình sau:

$a)\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1 \\ 3x^2-xy+3y^2=13 \end{cases}$; $b)\begin{cases} 2x^2-4xy+y^2=-1 \\ 3x^2+2xy+2y^2=7 \end{cases}$; $c)\begin{cases} y^2-3xy=4 \\ x^2-4xy+y^2=1 \end{cases}$

ĐS: $a)$ (1;2) ;$(2;1)$; $(-1;-2)$; $(-2;-1)$

$b)$ $(1;1)$; $(-1;-1)$;$\left(\dfrac{9}{\sqrt{161}};\dfrac{17}{\sqrt{161}}\right)$;$\left(-\dfrac{9}{\sqrt{161}};-\dfrac{17}{\sqrt{161}}\right)$

$c)$ $(1;4)$;$(-1;-4)$

Bài 2/ Giải các hệ phương trình:

$a)\begin{cases}3x^2+5xy-4y^2=38\\5x^2-9xy-3y^2=15\end{cases}$; $b)\begin{cases}x^2-2xy+3y^2=9\\x^2-4xy+5y^2=5\end{cases}$; $c)\begin{cases}2x^2-xy+3y^2=13\\x^2+4xy-2y^2=-6\end{cases}$

ĐS: $a)\ (3;1);\ (-3;-1)$

$b)\ (3;2);\ (-3;-2);\ \left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$c)(-2;1);(2;-1);\left(\frac{4}{\sqrt{139}};\frac{25}{\sqrt{139}}\right);\left(-\frac{4}{\sqrt{139}};-\frac{25}{\sqrt{139}}\right)$.

CHỦ ĐỀ 2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CÓ CẤU TRÚC ĐẶC BIỆT

Dưới đây chúng ta sẽ xét các phương pháp cơ bản giải các hệ phương trình không có cấu trúc đặc biệt như tính đối xứng, tính đẳng cấp … đã trình bày trong các mục ở trên.

Loại 1: Sử dụng định lí Viet để giải các hệ phương trình:

Xét các thí dụ sau đây:

Thí dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x(2x+3y)(x-1)=14 & (1)\\x^2+x+3y=9 & (2)\end{cases}$

Ta có hệ: $(1)(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-1).(2x+3y)=14 & (3)\\x(x-1)+(2x+3y)=9 & (4)\end{cases}$

Từ (3) và (4) và theo định lí Viet đảo suy ra $x(x-1)$ và $2x+3y$ là các nghiệm của phương trình $t^2-9t+14=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=7\end{array}\right.$.

Từ đó ta có hệ phương trình (1), (2) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(x-1)=2\\2x+3y=7\end{cases}\\\begin{cases}x(x-1)=7\\2x+3y=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-1;y=3\\x=2;y=1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt{29}}{2};y=\frac{1-\sqrt{29}}{3}\\x=\frac{1-\sqrt{29}}{2};y=\frac{1+\sqrt{29}}{3}\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Vậy hệ (1), (2) có 4 nghiệm kể trên.

Thí dụ 2 Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}(3x+y)^2-3(9x^2-y^2)-10(3x-y)^2=0 & (1)\\3x+y+\frac{1}{3x-y}=6 & (2).\end{cases}$$

Giải

Điều kiện để (1) (2) có nghĩa là $3x-y\neq 0$. Khi đó:

$$(1)(2)\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{3x+y}{3x-y}\right)^2-3.\dfrac{3x+y}{3x-y}-10=0\\ 3x+y+\dfrac{1}{3x-y}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x+y}{3x-y}=5\vee\dfrac{3x+y}{3x-y}=-2\\ 3x+y+\dfrac{1}{3x-y}=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(3x+y)\dfrac{1}{3x-y}=5\\ (3x+y)+\dfrac{1}{3x-y}=6\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{3x+y}{3x-y}=-2\\ 3x+y+\dfrac{1}{3x-y}=6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;y=2\\ x=\dfrac{1}{5};y=\dfrac{2}{5}\\ x=\dfrac{3+\sqrt{11}}{12};y=\dfrac{3\left(3+\sqrt{11}\right)}{4}\\ x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};y=\dfrac{3\left(3-\sqrt{11}\right)}{4}\end{array}\right.$$

Giải tương tự như thí dụ 1 ta được các nghiệm của hệ được biểu diễn như ở trên.

Loại 2: Phương pháp thế và đặt ẩn số phụ

Như đã biết, đây là một trong những biện pháp thông dụng nhất để giải hệ phương trình nói chung và hệ phương trình không chứa căn thức nói riêng.

Để giảm ẩn số của hệ phương trình có lẽ không có phương pháp nào đơn giản và tốt hơn phương pháp thế, còn việc đặt ẩn phụ thích hợp sẽ làm cho hệ phương trình trở lên gọn gàng hơn.

Thí dụ 1: (2009 - D)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x(x+y+1)-3=0 & (1)\\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 & (2)\end{cases}$

Giải:

Điều kiện để hệ (1)(2) có nghĩa là $x\neq 0$. Sau khi chia cả hai vế của (1) cho x, ta có

$$(1)\Leftrightarrow x+y+1-\frac{3}{x}=0\Leftrightarrow x+y=\frac{3}{x}-1(3).$$

Thế (3) vào (2) ta có:

$$\left(\frac{3}{x}-1\right)^2-\frac{5}{x^2}+1=0\Leftrightarrow\frac{4}{x^2}-\frac{6}{x}+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}=1\\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2.\end{array}\right.$$

+ Khi $x = 1$, thay lại vào (3) ta có $y = 1$;

+ Khi $x = 2$, thay lại vào (3) ta có $y=\dfrac{3}{2}$.

Vậy (1; 1) và $\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$ là hai nghiệm của (1) (2).

Thí dụ 2: (2009 - B)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy+x+1=7y & (1)\\ x^2y^2+xy+1=13y^2. & (2)\end{cases}$

Giải

Rõ ràng $y = 0$ không thỏa mãn (1) (2), nên ta có:

$$(1)(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=7\\ x^2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{x}{y}=7 & (3)\\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\dfrac{x}{y}=13. & (4)\end{cases}$$

Từ (3) suy ra $\dfrac{x}{y}=7-\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\qquad(5)$

Thế (5) vào (4) ta có: $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{y}\right)-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{1}{y}=-5\\ x+\dfrac{1}{y}=4\end{array}\right.\qquad(6)$

Thế (6) vào (5) ta được:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=-5\\ \dfrac{x}{y}=12\end{cases}\\ \begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=5\\ \dfrac{x}{y}=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=12y\\ 12y^2+5y+1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=3y\\ 3y^2-4y+1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;y=\dfrac{1}{3}\\ x=3;y=1.\end{array}\right.$$

Vậy hệ (1) (2) có hai nghiệm $\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$ và $(3;1)$.

CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

1. PHƯƠNG PHÁP NÂNG LUỸ THỪA ĐỂ KHỬ CĂN

Dạng 1 : Phương trình $\sqrt{A}=\sqrt{B}\Leftrightarrow\begin{cases}A\ge 0(B\ge 0)\\ A=B\end{cases}$

Dạng 2: Phương trình $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge 0\\ A=B^2\end{cases}$ Tổng quát: $\sqrt[2k]{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge 0\\ A=B^{2k}\end{cases}$

Dạng 3: Phương trình

$$+)\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}\Leftrightarrow\begin{cases}A\ge 0\\ B\ge 0\\ A+B+2\sqrt{AB}=C\end{cases}\quad\textit{(chuyển về dạng 2)}$$

$$+)\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}\Leftrightarrow A+B+3\sqrt[3]{A.B}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=C\quad\mathbf{(1)}$$

và ta sử dụng phép thế : $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=C$ ta được phương trình HỆ QUẢ**:** $A+B+3\sqrt[3]{A.B.C}=C$ **(2)**

Dạng 4: $\sqrt[3]{A}=B\Leftrightarrow A=B^3$; $\sqrt[2k+1]{A}=B\Leftrightarrow A=B^{2k+1}$

Chú ý: - Phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

- Phép bình phương 2 vế của một phương trình mà không có điều kiện cho 2 vế không âm là một phép biến đổi hệ quả. Sau khi tìm được nghiệm ta phải thử lại.

Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2-4x+6}=x+4$ 2) $\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{2-x}$ 3) $(x-3)\sqrt{x^2-4}=x^2-9$

4) $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$ 5) $\sqrt{x^2-3x+2}-3-x=0$ 6) $\sqrt{3x^2-9x+1}=|x-2|$

7) $3x-3\sqrt{3x-1}=5$ 8) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}=\sqrt{2-x}$ 9) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

10) $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$ 11) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$ 12) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x-3}$

13) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=\sqrt{2x-8}$ 14) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-1}=0$ 15) $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=\sqrt{5-2x}$

16) $\sqrt{y-14}-\sqrt{12-y}=0$ 17) $\sqrt{3x^2+6x+16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+2x+4}$

18) $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}=\sqrt{2x^2+9x+7}$ 19) $\sqrt{x+1}=\sqrt{x+9}-2$

(20) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$

➢ **Nhận xét :**

Nếu phương trình : $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$ Mà có : $f(x)+h(x)=g(x)+k(x)$, thì ta biến đổi phương trình về dạng $\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$ sau đó bình phương ,giải phương trình hệ quả

(21) $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$

➢ **Nhận xét :**

Nếu phương trình : $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$ Mà có : $f(x).h(x)=k(x).g(x)$ thì ta biến đổi $\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$ sau đó bình phương, giải phương trình hệ quả

2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Dạng 1: ***Các phương trình có dạng :***

* $\alpha A.B+\beta\sqrt{A.B}+\gamma=0$, đặt $t=\sqrt{A.B}\Rightarrow A.B=t^2$
* $\alpha.f(x)+\beta.\sqrt{f(x)}+\gamma=0$, đặt $t=\sqrt{f(x)}\Rightarrow f(x)=t^2$
* $\alpha.(x-a)(x-b)+\beta(x-a)\sqrt{\dfrac{x-b}{x-a}}+\gamma=0$ đặt $t=(x-a)\sqrt{\dfrac{x-b}{x-a}}\Rightarrow(x-a)(x-b)=t^2$

Chú ý:

* Nếu không có điều kiện cho t, sau khi tìm được x thì phải thử lại.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $(x+1)(x+4)=5\sqrt{x^2+5x+28}$ 2) $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$ 3) $x(x+5)=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$

4) $x^2-4x+2=2\sqrt{x^2-4x+5}$ 5) $-4\sqrt{(4-x)(2+x)}=x^2-2x-12$ 6) $\sqrt{(4+x)(6-x)}=x^2-2x-12$.

Bài 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm?

a) $\sqrt{(1+2x)(3-x)}=2x^2-5x+3+m$ b) $-x^2+2x+4\sqrt{(3-x)(x+1)}=m-3$

Bài 3. Cho phương trình: $-x^2+2x+4\sqrt{(3-x)(x+1)}=m-2$

a. Giải phương trình khi m = 12 b. Tìm m để phương trình có nghiệm?

Bài 4. Cho phương trình: $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=m$ **(Đ3)**

a. Giải phương trình với m = -3 b. Tìm m để phương trình có nghiệm?

Dạng 2: ***Các phương trình có dạng:*** $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}\pm\left(\sqrt{A}\pm\sqrt{B}\right)^2+C=0$ Đặt $t=\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) **(QGHN-HVNH'00)** $1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ b) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-2$

c) **(AN'01)** $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}=181-14x$ d) $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$

e) $5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\frac{1}{2x}+4$ **(Đ36)** g) **(TN- KA, B '01)** $3\sqrt{x}+\frac{3}{2\sqrt{x}}=2x+\frac{1}{2x}-7$

h) $\sqrt{z-1}+\sqrt{z+3}+2\sqrt{(z-1)(z+3)}=4-2z$ i) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$ (KTQS'01)

Bài 2. Cho phương trình: $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}-\sqrt{(1+x)(8-x)}=a$ **(ĐHKTQD - 1998)**

a. Giải phương trình khi a = 3. b. Tìm a để phương trình đã cho có nghiệm.?

Bài 3. Cho phương trình: $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)}=m$ **(Đ59)**

a. Giải phương trình với m = 3. b. Tìm m để phương trình có nghiệm?

Bài 4. Cho phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x+1)(3-x)}=m$ (m-tham số) **(ĐHSP Vinh 2000)**

a. Giải phương trình khi m = 2. b. Tìm để phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 5. Tìm a để PT sau có nghiệm: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-\sqrt{(2+x)(2-x)}=a$

Tất cả bài tập 2, 3, 4, 5 ta có thể sáng tạo thêm những câu hỏi hoặc những bài tập sau:

a) Tìm a để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất? (ĐK cần và đủ)

b) Tìm a để phương trình đã cho vô nghiệm?

Dạng 3: ***Đặt ẩn phụ nhưng vẫn còn ẩn ban đầu.*** *(Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn* **)**

- Từ những phương trình tích $\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-x+2\right)=0,\left(\sqrt{2x+3}-x\right)\left(\sqrt{2x+3}-x+2\right)=0$

Khai triển và rút gọn ta sẽ được những phương trình vô tỉ không tầm thường chút nào, độ khó của phương trình dạng này phụ thuộc vào phương trình tích mà ta xuất phát .

Từ đó chúng ta mới đi tìm cách giải phương trình dạng này .Phương pháp giải được thể hiện qua các ví dụ sau

.**Bài 1.** Giải phương trình : $x^2+\left(3-\sqrt{x^2+2}\right)x=1+2\sqrt{x^2+2}$

Giải: Đặt $t=\sqrt{x^2+2}$, ta có : $t^2-(2+x)t-3+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=x-1\end{array}\right.$

Bài 2. Giải phương trình : $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$

Giải:

Đặt : $t=\sqrt{x^2-2x+3},\quad t\geq\sqrt{2}$ Khi đó phương trình trở thnh : $(x+1)t=x^2+1\Leftrightarrow x^2+1-(x+1)t=0$

Bây giờ ta thêm bớt , để được phương trình bậc 2 theo t có Δ chẵn

: $x^2-2x+3-(x+1)t+2(x-1)=0\Leftrightarrow t^2-(x+1)t+2(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=x-1\end{array}\right.$

Từ một phương trình đơn giản : $\left(\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1-x}-2+\sqrt{1+x}\right)=0$, khai triển ra ta sẽ được pt sau

Bài 3. Giải phương trình sau : $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

Giải:

Nhận xét : đặt $t=\sqrt{1-x}$, pttt: $4\sqrt{1+x}=3x+2t+t\sqrt{1+x}$ (1)

Ta rút $x=1-t^2$ thay vào thì được pt: $3t^2-\left(2+\sqrt{1+x}\right)t+4\left(\sqrt{1+x}-1\right)=0$

Nhưng không có sự may mắn để giải được phương trình theo t $\Delta=\left(2+\sqrt{1+x}\right)^2-48\left(\sqrt{x+1}-1\right)$ không có dạng bình phương .

Muốn đạt được mục đích trên thì ta phải tách 3x theo $\left(\sqrt{1-x}\right)^2,\left(\sqrt{1+x}\right)^2$

Cụ thể như sau : $3x=-(1-x)+2(1+x)$ thay vào pt (1) ta được:

Bài 4. Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

Giải .

Bình phương 2 vế phương trình: $4(2x+4)+16\sqrt{2(4-x^2)}+16(2-x)=9x^2+16$

Ta đặt : $t=\sqrt{2(4-x^2)}\geq 0$. Ta được: $9x^2-16t-32+8x=0$

Ta phải tách $9x^2=\alpha 2(4-x^2)+(9+2\alpha)x^2-8\alpha$ làm sao cho Δ_t có dạng chính phương .

Nhận xét : Thông thường ta chỉ cần nhóm sao cho hết hệ số tự do thì sẽ đạt được mục đích

Bài tập đề nghị: *Giải các phương trình sau*

1) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$ 2) $2x+\frac{x-1}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}-3\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0$ 3) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

4) $1+x-2x^2=\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}$ 5) $4\sqrt{1+x}-3=x+3\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$ 6) $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$.

Một số dạng khác.

1) $9(x+1)^2=(3x+7)\left(1-\sqrt{3x+4}\right)^2$ 2) $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$ 3) $\sqrt{x^3-1}=x^2+3x-1$

4) $10.\sqrt{x^3+8}=3(x^2-x+6)$ 5) $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$ 6) $\frac{6x}{x-2}-\sqrt{\frac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}=0$

7) $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$ 8) $\frac{1}{1-x^2}=\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-1\Leftrightarrow\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}=\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-1$

9) $\frac{x}{x+1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3$ (Đ141) 10) $\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}=2x+9$

Dạng 4: . Đặt ẩn phụ đưa về phương trình thuần nhất bậc 2 đối với 2 biến :

- Chúng ta đã biết cách giải phương trình: $u^2+\alpha uv+\beta v^2=0$ (1) bằng cách

Xét $v\neq 0$ phương trình trở thành : $\left(\frac{u}{v}\right)^2+\alpha\left(\frac{u}{v}\right)+\beta=0$

$v=0$ thử trực tiếp

Các trường hợp sau cũng đưa về được (1)

✓ $a.A(x)+bB(x)=c\sqrt{A(x).B(x)}$

✓ $\alpha u+\beta v=\sqrt{mu^2+nv^2}$

Chúng ta hãy thay các biểu thức A(x) , B(x) bởi các biểu thức vô tỉ thì sẽ nhận được phương trình vô tỉ theo dạng này .

a) . Phương trình dạng : $a.A(x)+bB(x)=c\sqrt{A(x).B(x)}$

Như vậy phương trình $Q(x)=\alpha\sqrt{P(x)}$ có thể giải bằng phương pháp trên nếu $\begin{cases}P(x)=A(x).B(x)\\Q(x)=aA(x)+bB(x)\end{cases}$

Xuất phát từ đẳng thức :

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

$4x^4+1=(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$

Hãy tạo ra những phương trình vô tỉ dạng trên ví dụ như: $4x^2-2\sqrt{2}x+4=\sqrt{x^4+1}$

Để có một phương trình đẹp , chúng ta phải chọn hệ số a,b,c sao cho phương trình bậc hai $at^2+bt-c=0$ giải " nghiệm đẹp"

Bài 1. Giải phương trình : $2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1}$

Giải: Đặt $u=\sqrt{x+1}, v=\sqrt{x^2-x+1}$

Phương trình trở thành : $2\left(u^2+v^2\right)=5uv \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2v \\ u=\frac{1}{2}v \end{array}\right.$ Tìm được: $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

Bài 2. Giải phương trình : $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

Bài 3: giải phương trình sau : $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$

Giải:

Đk: $x\geq 1$

Nhận xt : Ta viết $\alpha\left(x-1\right)+\beta\left(x^2+x+1\right)=7\sqrt{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}$

Đồng nhất thức ta được: $3\left(x-1\right)+2\left(x^2+x+1\right)=7\sqrt{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}$

Đặt $u=x-1\geq 0, v=x^2+x+1>0$, ta được: $3u+2v=7\sqrt{uv} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=9u \\ v=\frac{1}{4}u \end{array}\right.$

Ta được : $x=4\pm\sqrt{6}$

Bài 4. Giải phương trình : $x^3-3x^2+2\sqrt{\left(x+2\right)^3}-6x=0$

Giải:

Nhận xét : Đặt $y=\sqrt{x+2}$ ta hãy biến pt trên về phương trình thuần nhất bậc 3 đối với x và y :

$$x^3-3x^2+2y^3-6x=0 \Leftrightarrow x^3-3xy^2+2y^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-2y \end{array}\right.$$

Pt có nghiệm : $x=2, \quad x=2-2\sqrt{3}$

b).Phương trình dạng : $\alpha u+\beta v=\sqrt{mu^2+nv^2}$

Phương trình cho ở dạng này thường khó "phát hiện " hơn dạng trên , nhưg nếu ta bình phương hai vế thì đưa về được dạng trên.

Bài 1. giải phương trình : $x^2+3\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

Giải:

Ta đặt : $\begin{cases} u=x^2 \\ v=\sqrt{x^2-1} \end{cases}$ khi đó phương trình trở thành : $u+3v=\sqrt{u^2-v^2}$

Bài 2. Giải phương trình sau : $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

Giải

Đk $x\geq\frac{1}{2}$. Bình phương 2 vế ta có :

$$\sqrt{\left(x^2+2x\right)\left(2x-1\right)}=x^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2+2x\right)\left(2x-1\right)}=\left(x^2+2x\right)-\left(2x-1\right)$$

Ta có thể đặt : $\begin{cases} u=x^2+2x \\ v=2x-1 \end{cases}$ khi đó ta có hệ : $uv=u^2-v^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\frac{1-\sqrt{5}}{2}v \\ u=\frac{1+\sqrt{5}}{2}v \end{array}\right.$

Do $u,v \geq 0$. $u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}v \Leftrightarrow x^2+2x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(2x-1)$

Bài 3. giải phương trình : $\sqrt{5x^2-14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$

Giải:

Đk $x \geq 5$. Chuyển vế bình phương ta được: $2x^2-5x+2 = 5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$

Nhận xét : không tồn tại số α, β để : $2x^2-5x+2 = \alpha(x^2-x-20)+\beta(x+1)$ vậy ta không thể đặt $\begin{cases} u = x^2-x-20 \\ v = x+1 \end{cases}$.

Nhưng may mắn ta có : $(x^2-x-20)(x+1) = (x+4)(x-5)(x+1) = (x+4)(x^2-4x-5)$. Ta viết lại phương trình: $2(x^2-4x-5)+3(x+4) = 5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$. Đến đây bài toán được giải quyết .

Dạng 5: Đặt nhiều ẩn phụ đưa về tích

➢ Xuất phát từ một số hệ "đại số " đẹp chúng ta có thể tạo ra được những phương trình vô tỉ mà khi giải nó chúng ta lại đặt nhiều ẩn phụ và tìm mối quan hệ giữa các ẩn phụ để đưa về hệ

Xuất phát từ đẳng thức $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$, Ta có

$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 \Leftrightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = 0$

Từ nhận xét này ta có thể tạo ra những phương trình vô tỉ có chứa căn bậc ba .

$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x+1} = 2$

$\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} - \sqrt[3]{4x-3} = 0$

Bài 1. Giải phương trình : $x = \sqrt{2-x}.\sqrt{3-x} + \sqrt{3-x}.\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}$

Giải : $\begin{cases} u = \sqrt{2-x} \\ v = \sqrt{3-x} \\ w = \sqrt{5-x} \end{cases}$, ta có : $\begin{cases} 2-u^2 = uv+vw+wu \\ 3-v^2 = uv+vw+wu \\ 5-w^2 = uv+vw+wu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)(u+w) = 2 \\ (u+v)(v+w) = 3 \\ (v+w)(u+w) = 5 \end{cases}$, giải hệ ta được:

$u = \dfrac{\sqrt{30}}{60} \Leftrightarrow x = \dfrac{239}{120}$

Bài 2. Giải phương trình sau : $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}$

***Giải*.** Ta đặt : $\begin{cases} a = \sqrt{2x^2-1} \\ b = \sqrt{x^2-3x-2} \\ c = \sqrt{2x^2+2x+3} \\ d = \sqrt{x^2-x+2} \end{cases}$, khi đó ta có : $\begin{cases} a+b = c+d \\ a^2-b^2 = c^2-d^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$

Bài 3. Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3$

$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x(1-x)} + \sqrt[4]{(1-x)^3} = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2(1-x)}$

3. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH.

❖ **Sử dụng đẳng thức**

$u+v = 1+uv \Leftrightarrow (u-1)(v-1) = 0$

$au+bv = ab+vu \Leftrightarrow (u-b)(v-a) = 0$

$\sqrt{ax+b}\pm\sqrt{cx+d}=\dfrac{(a-c)x+(b-d)}{m}$

$A^2=B^2\Leftrightarrow(A-B)(A+B)=0$

$a^3-b^3\Leftrightarrow(a-b)(a^2+ab+b^2)=0\Leftrightarrow a=b$

Bài 1. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

Giải: $pt\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{x+2}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$

Bi 2. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2+x}$

Giải:

+ $x=0$, không phải là nghiệm

+ $x\neq 0$, ta chia hai vế cho x: $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}+\sqrt[3]{x}=1+\sqrt[3]{x+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=0\Leftrightarrow x=1$

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

Giải: $dk: x\geq -1$

pt$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-2x\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\end{array}\right.$

Bài 4. Giải phương trình : $\sqrt{x+3}+\dfrac{4x}{\sqrt{x+3}}=4\sqrt{x}$

Giải:

Đk: $x\geq 0$

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+3}: 1+\dfrac{4x}{x+3}=2\sqrt{\dfrac{4x}{x+3}}\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{\dfrac{4x}{x+3}}\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$

❖ **Dùng hằng đẳng thức**

Biến đổi phương trình về dạng : $A^k=B^k\Leftrightarrow(A-B)(A^{K-1}+A^{K-2}.B+A^{K-3}.B^2+...+A.B^{K-2}+B^{K-1})$

Bài 1. Giải phương trình : $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$

Giải:

Đk: $0\leq x\leq\sqrt{3}$ khi đó pt đ cho tương đương

$: x^3+\sqrt{3}x^2+x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\dfrac{10}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}$

Bài 2. Giải phương trình sau : $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$

Giải:

Đk: $x\geq -3$ phương trình tương đương : $\left(1+\sqrt{3+x}\right)^2=9x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}+1=3x\\\sqrt{x+3}+1=-3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{18}\end{array}\right.$

Bài 3. Giải phương trình sau : $2+3\sqrt[3]{9x^2(x+2)}=2x+3\sqrt[3]{3x(x+2)^2}$

Giải : pttt $\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{3x}\right)^3=0\Leftrightarrow x=1$

ĐS: x=1.

Bài tập đề nghị

Giải các phương trình sau :

1) $\sqrt{x^2+10x+21}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+7}-6$

4) 8) $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$

2) $\sqrt[n]{(x+1)^2}+3\sqrt[n]{(x-1)^2}+2\sqrt[n]{x^2-1}=0$ (với n ∈ N; n ≥ 2) 5) $\dfrac{x^2+7x+4}{x+2}=4\sqrt{x}$ **(ĐHDL ĐĐ'01)**

3) $\sqrt{x^2-x-2}-2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{x+1}$ 6) $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

7) $x-2\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0$ (1) **(HVKT QS - 2001)**

4. PHƯƠNG PHÁP GIẢN ƯỚC

1. $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$ **(Đ8)** 2. $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-2)}=2\sqrt{x(x+3)}$

3. $\sqrt{x^2-2002x+2001}+\sqrt{x^2-2003x+2002}=\sqrt{x^2-2004x+2003}$ 4. $2\sqrt{x(x-1}-\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{x^2}$

5. $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{x^2-5x+4}$ 8)**(ĐHSPHN2'00)** $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{x^2}$

1. $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}=\sqrt{2x^2+9x+7}$ **(BKHN- 2001)** 9. $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-2)}=\sqrt{x(x+3)}$

5. PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN VÀ DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI.

1. $\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2-10x+50}\right|=5$ 2. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

3. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$ 4. $\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$

5. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$ **(HVCNBC'01)** 6. $\sqrt{x^4-2x^2+1}=1-x$ **(Đ24)** 7. $4\sqrt{x+2}=|x+1|+4$

8. $\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}+\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}=2$. 9. $\sqrt{x+15-8\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

6. PHƯƠNG PHÁP NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP

6.1. Nhân lượng liên hợp để xuất hiện nhân tử chung

a) Phương pháp

Một số phương trình vô tỉ ta có thể nhẩm được nghiệm x_0 như vậy phương trình luôn đưa về được dạng tích $(x-x_0)A(x)=0$ ta có thể giải phương trình $A(x)=0$ hoặc chứng minh $A(x)=0$ vô nghiệm , ***chú ý điều kiện của nghiệm của phương trình để ta có thể đánh giá*** $A(x)=0$ ***vô nghiệm***

b) Ví dụ

Bài 1 . Giải phương trình sau : $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

Giải:

Ta nhận thấy : $(3x^2-5x+1)-(3x^2-3x-3)=-2(x-2)$ v $(x^2-2)-(x^2-3x+4)=3(x-2)$

Ta có thể trục căn thức 2 vế : $\dfrac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x+1)}}=\dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$

Dễ dàng nhận thấy x=2 là nghiệm duy nhất của phương trình .

Bài 2. Giải phương trình sau **(OLYMPIC 30/4 đề nghị)** : $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

Giải: Để phương trình có nghiệm thì : $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{5}{3}$

Ta nhận thấy : x=2 là nghiệm của phương trình , như vậy phương trình có thể phân tích về dạng $(x-2)A(x)=0$, để thực hiện được điều đó ta phải nhóm, tách như sau :

$$\sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Dễ dàng chứng minh được : $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0, \forall x>\frac{5}{3}$

Bài 3. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-1}$

Giải :Đk $x \geq \sqrt[3]{2}$

Nhận thấy x=3 là nghiệm của phương trình , nên ta biến đổi phương trình

$$\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^3-2}-5 \Leftrightarrow (x-3)\left[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}\right]=\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Ta chứng minh : $1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\frac{x+3}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}+1\right)^2+3}<2<\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$

Vậy pt có nghiệm duy nhất x=3

6.2. Đưa về "hệ tạm "

a) Phương pháp

❖ Nếu phương trình vô tỉ có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$, mà : $A-B=\alpha C$

ở dây C có thể là hàng số ,có thể là biểu thức của x. Ta có thể giải như sau :

$\frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=C \Rightarrow \sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha$, khi đĩ ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{A}+\sqrt{B}=C\\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha\end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{A}=C+\alpha$

b) Ví dụ

Bài 4. Giải phương trình sau : $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Giải:

Ta thấy : $\left(2x^2+x+9\right)-\left(2x^2-x+1\right)=2(x+4)$

$x=-4$ không phải là nghiệm

Xét $x \neq -4$

Trục căn thức ta có : $\frac{2x+8}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4 \Rightarrow \sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2$

Vậy ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2\\ \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{8}{7}\end{array}\right.$

Thử lại thỏa; vậy phương trình có 2 nghiệm : x=0 v x=$\frac{8}{7}$

Bài 5. Giải phương trình : $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$

Ta thấy : $\left(2x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=x^2+2x$, như vậy không thỏa mãn điều kiện trên.

Ta có thể chia cả hai vế cho x và đặt $t=\frac{1}{x}$ thì bài toán trở nên đơn giản hơn

Bài tập đề nghị

Giải các phương trình sau :

$x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$	$\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}=3x-2$

$\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$ ***(HSG Toàn Quốc 2002)*** $2\sqrt{(2-x)(5-x)}=x+\sqrt{(2-x)(10-x)}$ $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$	$2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$ ***(OLYMPIC 30/4-2007)*** $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$ $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$ $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-2)}=2\sqrt{x(x+3)}$ 2) $2\sqrt{x(x-1)}-\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{x^2}$ 3) $\sqrt{2x+2}-\sqrt{2x-1}=x$

4) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\dfrac{21}{x}$ 5) $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$ 6) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}=2\sqrt{x^2-5x+4}$

7) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

8) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$

9) $\sqrt{x^2-2003x+2002}+\sqrt{x^2-2004x+2003}=2\sqrt{x^2-2005x+2004}$

7. PHƯƠNG PHÁP NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ

1. Dùng hằng đẳng thức :

- Từ những đánh giá bình phương : $A^2+B^2\geq 0$, phương trình dạng $A^2+B^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$

2. Dùng bất đẳng thức

- Một số phương trình được tạo ra từ dấu bằng của bất đẳng thức: $\begin{cases}A\geq m\\B\leq m\end{cases}$ nếu dấu bằng ỏ (1) và (2) cùng dạt được tại x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $A=B$

Ta có : $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\leq 2$ Dấu bằng khi và chỉ khi $x=0$ và $\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\geq 2$, dấu bằng khi và chỉ khi x=0. Vậy ta có phương trình: $\sqrt{1-2008x}+\sqrt{1+2008x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{1+x}$

Đôi khi một số phương trình được tạo ra từ ý tưởng : $\begin{cases}A\geq f(x)\\B\leq f(x)\end{cases}$ khi đó : $A=B\Leftrightarrow\begin{cases}A=f(x)\\B=f(x)\end{cases}$

✓ Nếu ta đoán trước được nghiệm thì việc dùng bất đẳng thức dễ dàng hơn, nhưng có nhiều bài nghiệm là vô tỉ việc đoán nghiệm không được, ta vẫn dùng bất đẳng thức để đánh giá được

Bài 1. Giải phương trình (OLYMPIC 30/4 -2007): $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$

Giải: Đk $x\geq 0$

Ta có : $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\right)^2\leq\left[\left(2\sqrt{2}\right)^2+x+1\right]\left[\dfrac{1}{x+1}+\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\right]=x+9$

Dấu bằng $\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{7}$

Bài 2. Giải phương trình : $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$

Giải: Đk: $-1\leq x\leq 1$

Biến đổi pt ta có : $x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=256$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\left(\sqrt{13}.\sqrt{13}.\sqrt{1-x^2}+3.\sqrt{3}.\sqrt{3}\sqrt{1+x^2}\right)^2 \le (13+27)\left(13-13x^2+3+3x^2\right)=40\left(16-10x^2\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $10x^2\left(16-10x^2\right)\le\left(\frac{16}{2}\right)^2=64$

Dấu bằng $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3}\\ 10x^2=16-10x^2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{array}\right.$

Bài 3. giải phương trình: $x^{3`}-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$

Ta chứng minh : $8\sqrt[4]{4x+4}\le x+13$ và $x^3-3x^2-8x+40\ge 0\Leftrightarrow (x-3)^2(x+3)\ge x+13$

Bài tập đề nghị .

<u>Bài 1</u>: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ 2) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}$ 3) $2x^4+8=4\sqrt{4+x^4}+4\sqrt{x^4-4}$	4) $16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}$ 5) $x^{3`}-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$ 6) $\sqrt{8+x^3}+\sqrt{64-x^3}=x^4-8x^2+28$ 7) $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

<u>Bài 2</u>: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$ 2) $\dfrac{x^2-6x+15}{x^2-6x+11}=\sqrt{x^2-6x+18}$

3) $\sqrt{x^2-6x+11}+\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt[4]{x^2-4x+5}=3+\sqrt{2}$ 4) $x^2-3x+3{,}5=\sqrt{(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)}$

5) $\sqrt{2x^2-8x+12}=3-\sqrt[4]{3x^2-12x+13}$ 6) $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$ 7) $\sqrt{2(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})}=\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x}$

8) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ 9) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$ **(Đ11)**

10) $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}$ 11) $\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}=x^2-12x+52$

8. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ HỆ .

Dạng 1: *Đưa về hệ phương trình bình thường. Hoặc hệ đối xứng loại một.*

- Đặt $u=\alpha(x), v=\beta(x)$ và tìm mối quan hệ giữa $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ từ đó tìm được hệ theo u,v

Bài 1. Giải phương trình: $x\sqrt[3]{25-x^3}\left(x+\sqrt[3]{25-x^3}\right)=30$

Đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3}\Rightarrow x^3+y^3=35$

Khi đó phương trình chuyển về hệ phương trình sau: $\begin{cases}xy(x+y)=30\\ x^3+y^3=35\end{cases}$, giải hệ này ta tìm được $(x;y)=(2;3)=(3;2)$. Tức là nghiệm của phương trình là $x\in\{2;3\}$

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{2}-1-x}+\sqrt[4]{x}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Điều kiện: $0\le x\le\sqrt{2}-1$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{\sqrt{2}-1-x}=u\\ \sqrt[4]{x}=v\end{cases} \Rightarrow 0\le u\le\sqrt{\sqrt{2}-1}, 0\le v\le\sqrt[4]{\sqrt{2}-1}$

Ta đưa về hệ phương trình sau: $\begin{cases}u+v=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ u^2+v^4=\sqrt{2}-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-v\\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-v\right)^2+v^4=\sqrt{2}-1\end{cases}$

Giải phương trình thứ 2: $(v^2+1)^2-\left(v+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2=0$, từ đó tìm ra v rồi thay vào tìm nghiệm của phương trình.

Bài 3. Giải phương trình sau: $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

Điều kiện: $x\ge1$

Đặt $a=\sqrt{x-1}, b=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}(a\ge0,b\ge0)$ thì ta đưa về hệ phương trình sau:

$\begin{cases}a^2+b=5\\ b^2-a=5\end{cases} \to (a+b)(a-b+1)=0 \Rightarrow a-b+1=0 \Rightarrow a=b-1$

Vậy $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{5+\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=5-x \Rightarrow x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$

Bài 4. Giải phương trình: $\dfrac{6-2x}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{6+2x}{\sqrt{5+x}}=\dfrac{8}{3}$

Giải

Điều kiện: $-5<x<5$

Đặt $u=\sqrt{5-x}, v=\sqrt{5+x}\ \left(0<u,v<\sqrt{10}\right)$.

Khi đó ta được hệ phương trình: $\begin{cases}u^2+v^2=10\\ -\dfrac{4}{u}-\dfrac{4}{v}+2(u+z)=\dfrac{8}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^2=10+2uv\\ (u+v)\left(1-\dfrac{2}{uv}\right)=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Bài tập đề nghị : Giải các phương trình sau

1) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ (ĐHTCKTHN - 2001)

2) $\sqrt{3-x+x^2}-\sqrt{2+x-x^2}=1$

3) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x}=1$ (ĐHDL HP'01)

4) $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{2}$

5) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$

6) $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$ (Đ12)

7) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{97-x}=5$

8) $\sqrt[3]{14+x}+\sqrt[3]{12-x}=2$

9) $\sqrt[3]{(x+8)^2}+\sqrt[3]{(x-8)^2}+\sqrt[3]{x^2-64}=4$

10) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$

11) $\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\dfrac{1}{x}=2$

12) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$

13) $\sqrt[3]{x^2+2}=\sqrt[3]{x^2-\dfrac{65}{8}}+1$

14) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}-x}=1$

15) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{1}{2}$ **(Đ142)**

16) $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5$

17) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$

18) $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30$

19) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{(1+x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$

20) $\sqrt[3]{2+x+x^2}+\sqrt[3]{2-x-x^2}=\sqrt[3]{4}$

21) $\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{(3x-1)^2}+\sqrt[3]{9x^2-1}=1$

22) $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}=3$

23) $\sqrt{2x+\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{2x-\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+1}+1$

24) $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$

25) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$

26) $\sqrt{2x^2+5x+2}-2\sqrt{2x^2+5x-6}=1$

27) $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$

28) $\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2$ (DL Hùng vương- 2001)

29) $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{6-x}$ (CĐ mẫu giáo TW1- 2001)

Dạng 2: *Đưa phương trình đã cho về hệ đối xứng loại hai.*

- Ta hãy đi tìm nguồn gốc của những bài toán giải phương trình bằng cách đưa về hệ đối xứng loại II
- Ta xét một hệ phương trình đối xứng loại II sau : $\begin{cases}(x+1)^2=y+2 & (1)\\ (y+1)^2=x+2 & (2)\end{cases}$ việc giải hệ này thì đơn giản

Bây giờ ta sẽ biến hệ thành phương trình bằng cách đặt $y=f(x)$ sao cho (2) luôn đúng ,

$y=\sqrt{x+2}-1$, khi đó ta có phương trình : $(x+1)^2=(\sqrt{x+2}-1)+1 \Leftrightarrow x^2+2x=\sqrt{x+2}$

Vậy để giải phương trình : $x^2+2x=\sqrt{x+2}$ ta đặt lại như trên và đưa về hệ

Bằng cách tương tự xét hệ tổng quát dạng bậc 2 : $\begin{cases}(\alpha x+\beta)^2=ay+b\\(\alpha y+\beta)^2=ax+b\end{cases}$, ta sẽ xây dựng được phương trình dạng sau : đặt $\alpha y+\beta=\sqrt{ax+b}$, khi đó ta có phương trình : $(\alpha x+\beta)^2=\frac{a}{\alpha}\sqrt{ax+b}+b-\frac{\beta}{\alpha}$

Tương tự cho bậc cao hơn : $(\alpha x+\beta)^n=\frac{a}{\alpha}\sqrt[n]{ax+b}+b-\frac{\beta}{\alpha}$

Tóm lại phương trình thường cho dưới dạng khai triển ta phải viết về dạng :
$(\alpha x+\beta)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+\gamma$ v đặt $\alpha y+\beta=\sqrt[n]{ax+b}$ để đưa về hệ , chú ý về dấu của α ???

Việc chọn $\alpha;\beta$ thông thường chúng ta chỉ cần viết dưới dạng : $(\alpha x+\beta)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+\gamma$ là chọn được.

Bài 1. Giải phương trình: $x^2-2x=2\sqrt{2x-1}$

Giải

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$

Ta có phương trình được viết lại là: $(x-1)^2-1=2\sqrt{2x-1}$

Đặt $y-1=\sqrt{2x-1}$ thì ta đưa về hệ sau: $\begin{cases}x^2-2x=2(y-1)\\y^2-2y=2(x-1)\end{cases}$

Trừ hai vế của phương trình ta được $(x-y)(x+y)=0$

Giải ra ta tìm được nghiệm của phương trình là: $x=2+\sqrt{2}$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $\{1-\sqrt{2};1+\sqrt{3}\}$.

Bài 2. Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Giải

Điều kiện $x\ge-\frac{5}{4}$

Ta biến đổi phương trình như sau: $4x^2-12x-2=2\sqrt{4x+5}\Leftrightarrow(2x-3)^2=2\sqrt{4x+5}+11$

Đặt $2y-3=\sqrt{4x+5}$ ta được hệ phương trình sau: $\begin{cases}(2x-3)^2=4y+5\\(2y-3)^2=4x+5\end{cases}\Rightarrow(x-y)(x+y-1)=0$

Với $x=y\Rightarrow 2x-3=\sqrt{4x+5}\Rightarrow x=2+\sqrt{3}$. Với $x+y-1=0\Rightarrow y=1-x\rightarrow x=1-\sqrt{2}$

Bài tập đề nghị : Giải các phương trình sau

1) $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ 2) $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$ 3) $(x^2+3x-4)^2+3(x^2+3x-4)=x+4$

4) $x^2-1=\sqrt{x+1}$ 5) $-x^2+2=\sqrt{2-x}$ 6) $x^2+\sqrt{5-x}=5$ 7) $\sqrt{5-\sqrt{5+x}}=x$

8) $7x^2+7x=\sqrt{\frac{4x+9}{28}},x>0$ (ĐHAN-D) 9) $\sqrt{4-\sqrt{4+x}}=x$ 10) $\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^3+6$

11) $x^2+\sqrt{5+x}=5$ 12) $x^3-3\sqrt[3]{3x+2}=2$ 13) $x^2+\sqrt{1+x}=1$ 14) $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$

9. PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM.

Bài 1. Các bước:

- Tìm tập xác định của phương trình.
- Biến đổi phương trình (nếu cần) để đặt f(x) bằng một biểu thức nào đó.

➢ Tính đạo hàm f(x), rồi dựa vào tính đồng biến(nghịch biến) của hàm số để kết luận nghiệm của phương trình.

Bài 2. **Ví dụ.** Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0$ (1)

<u>Giải:</u>

Tập xác định: D = R. Đặt f(x) = $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x+2)^2}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}>0;\forall x\neq -\dfrac{1}{2},-1,-\dfrac{3}{2}$

Suy ra hàm số f(x) đồng biến trên tập M=$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)\cup\left(-1,-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

Ta thấy f(-1)=0 ⇒ x=-1 là một nghiệm của (1). Ta có: $f(-\dfrac{1}{2})=3;\ f(-\dfrac{3}{2})=-3$

Ta có bảng biến thiên của hàm số f(x):

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		||		||		||		
F(x)	$-\infty$	-3		0		3		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy f(x) = 0 ⇔ x = -1.

Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm x = -1.

Bài tập tương tự:

Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{2x^2}$ 2) $(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$

Từ bài 2, ta có bài tập 3.

3) $(2x+1)\left(2000+\sqrt{(2x+1)^2+1999}\right)+x\left(2000+\sqrt{x^2+1999}\right)=0$

4) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+19}=\sqrt{y+3}+\sqrt{y+19}$

5) (ĐH.B'02) Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$$

6) (ĐH.A'08) Tìm các giá trị của m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m$$

10. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ.

Ví dụ. Giải phương trình sau: $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2-2x^2}$ (1)

<u>Giải:</u>

Tập xác định: D = [-1; 1]. (2)

Do (2) nên đặt x = cost (*), với $0 \le t \le \pi$ (A)

Khi đó phương trình (1) trở thành: $\cos^3 t + \sqrt{(1-\cos^2 t)^3} = \cos t\sqrt{2(1-\cos^2 t)}$ (3)

Với t $\in$ (A), ta có: $(3) \Leftrightarrow \cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2}\cos t.\sin t \Leftrightarrow (\cos t + \sin t)(1 - \sin t.\cos t) = \sqrt{2}\cos t.\sin t (4)$

Đặt X = cost + sint (5), $|X| \le \sqrt{2}$ (B)$\Rightarrow$ $X^2 = 1 + 2\sin t.\cos t$ $\Rightarrow$ sint.cost = $\dfrac{X^2-1}{2}$

Phương trình (4) trở thành phương trình ẩn X:

$$X.\left(1 - \frac{X^2-1}{2}\right) = \sqrt{2}.\frac{X^2-1}{2} \Leftrightarrow X(3 - X^2) = \sqrt{2}(X^2-1) \Leftrightarrow X^3 + \sqrt{2}X^2 - 3X - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-\sqrt{2})(X^2+2\sqrt{2}X+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \sqrt{2} \\ X^2 + 2\sqrt{2}X + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \sqrt{2} \\ X = -\sqrt{2} - 1 \\ X = -\sqrt{2} + 1 \end{array}\right.$$

Ta thấy chỉ có nghiệm X = $\sqrt{2}$ và X = -$\sqrt{2}$ + 1 là thoả mãn điều kiện (B).

+ Với X = $\sqrt{2}$, thay vào (5) ta được:

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in Z.$$

Vì t $\in$ (A) nên ta có t = $\dfrac{\pi}{4}$. Thay vào (*) ta được: x = $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (thoả mãn tập xác định D).

+ Với X = -$\sqrt{2}$ + 1, thay vào (5) ta được:

$$\sin t + \cos t = -\sqrt{2} + 1 \quad (**) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}.$$

Khi đó, ta có:

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{1 - \left[\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{3-2\sqrt{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}} \Rightarrow \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos t.\cos\frac{\pi}{4} - \sin t.\sin\frac{\pi}{4} = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t) = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}} \Leftrightarrow \cos t - \sin t = \pm\sqrt{2\sqrt{2}-1} (6)$$

Từ (**) và (6) suy ra cost = $\dfrac{-\sqrt{2}+1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$. Thay vào (5), ta được x = $\dfrac{-\sqrt{2}+1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Nhưng chỉ có nghiệm x = $\dfrac{-\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$ thoả mãn tập xác định D.

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm x = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và x = $\dfrac{-\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Bài tập tương tự. 1) $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$ (HVQHQT- 2001) 2) $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x.\sqrt{2(1-x^2)}$

3) $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1 - 2x^2$ 4) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{(1+x)^3}\right] = 2 + \sqrt{1-x^2}$

Một số bài tập tham khảo:

1. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{9+x}=5-\sqrt{2x+4}$ 8) $\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}}=\sqrt{x-4}$ 15) $\sqrt{6-x}-\sqrt{1-x}=\sqrt{-5-2x}$

2) $\sqrt{25-x^2}=x-1$ 9) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$ 16) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-1}=0$

3) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$ 10) $\sqrt{11-x}-\sqrt{x-1}=2$ 17) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$

4) $\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-1}$ 11) $\sqrt{9+x}-7=-\sqrt{16-x}$ 18) $\sqrt{2-\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$

6) $\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{6-x}$ 13) $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+14}=\sqrt{x-7}$ 20) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{4+x}=4$

7) $\sqrt{x^2+5x-4}=\sqrt{x-1}$ 14) $\sqrt{-x^2+9x+9}-\sqrt{x}=\sqrt{9-x}$ 21) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$

2. Giải các phương trình sau:

1) $x^2-6=\sqrt{2x^2-8x+12}+4x$ 9) $2x^2+\sqrt{(x+1)(2-x)}=1+2x$

2) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$ 10) $\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+x+7}=\sqrt{3x^2+3x+13}$

3) $5x-8\sqrt{7x^2-5x+1}=7x^2+8$ 11) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2(x^2+x)+1$

4) $(x+1)(x+4)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$ 12) $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$

5) $\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}=3+\sqrt{(x+3)(6-x)}$ 13) $2(x-1)\sqrt{2x^2+1}=2x^2+2x-2$

6) $3+2\sqrt{x-x^2}=3(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})$ 14) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2+3x+6}=3$

7) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}+16=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}$ 15) $\sqrt{x^2+7+x}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+19}$

3. Giải các phương trình sau: (ẩn phụ $\to$ hệ) 1) $\sqrt{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}-3$

2) $\sqrt{3-x^2+x}+\sqrt{3+x^2+x}=1$ 3) $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{10-x^2}=5$

4) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$

4. Giải các phương trình sau (Đánh giá) 1) $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$

3) $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=x^2-8x+18$ 2) $\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=3$ 4) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+\sqrt[4]{2-x}+\sqrt{2-x}=4$

5. Tìm m để phương trình có nghiệm.

1) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x-1)(3-x)}=m$ 2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=a$ 4) $2\sqrt{(x+2)(4-x)}+x^2=2x-m$

6. Tìm m để phương trình có nghiệm.

1) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}=m$ 4) $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=m$ 2) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}=m$

5) $\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=m$

3) $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{3-x}+\sqrt{3-x}=m$ 6) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+\sqrt[4]{2-x}+\sqrt{2-x}=m$

7. Giải phương trình, hệ phương trình:

a) $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=x^2-12x+38$ b) $\sqrt{5-2x}+\sqrt{2x-3}=3x^2-12x+14$ c) $x^2+\sqrt{x+2004}=2004$

d) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1\\ \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1\end{cases}$ e) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y}=4\\ x+y=7\end{cases}$ f) $\sqrt{\frac{2x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}}=2$

11. XÂY DỰNG BÀI TOÁN TỪ TÍNH CHẤT CỰC TRỊ HÌNH HỌC

11.1 Dùng tọa độ của véc tơ

❖ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Cho các véc tơ: $\vec{u}=(x_1;y_1)$, $\vec{v}=(x_2;y_2)$ khi đó ta có

✓ $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow \sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2+\left(y_1+y_2\right)^2} \le \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=k \ge 0$, chú ý tỉ số phải dương

✓ $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\alpha \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos\alpha=1 \Leftrightarrow u \uparrow\uparrow \vec{v}$

11.2 Sử dụng tính chất đặc biệt về tam giác

✓ Nếu tam giác ABC là tam giác đều , thì với mọi điểm M trên mặt phẳng tam giác, ta luôn có $MA+MB+MC \ge OA+OB+OC$ với O là tâm của đường tròn .Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O$.

✓ Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và điểm M tùy ý trong mặt mặt phẳng Thì MA+MB+MC nhỏ nhất khi điểm M nhìn các cạnh AB,BC,AC dưới cùng một góc 120^0

<u>Bài tập</u>: giải phương trình, hệ phương trình sau:

1) $\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x+1}+\sqrt{2x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1}=3$

2) $\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2-10x+50}\right|=5$ 3) $\sqrt{5(x^2+2yz)}+\sqrt{6(y^2+2xz)}+\sqrt{5(z^2+2xy)}=4(x+y+z)$

4) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}+2\sqrt{x^2+1}=\sqrt{6}(x+1)$

5) $\begin{cases}\sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\sqrt{1+x_3}+...+\sqrt{1+x_{100}}=100\sqrt{1+\frac{1}{100}}\\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\sqrt{1-x_3}+...+\sqrt{1-x_{100}}=100\sqrt{1-\frac{1}{100}}\end{cases}$

<u>MỘT SỐ ĐỀ THI ĐẠI HỌC:</u>

<u>I/ Dạng 1:</u> Giải phương trình.

1/ **(Dự bị 2 khối D 2006) :** $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1,\ x\in R.$

2/ **(Dự bị 1 khối B 2006) :** $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2},x\in R.$

3/ **(Dự bị 1 khối B 2005) :** $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}.$

4/ **(ĐH KD-2005)** $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4;$

5/ **(ĐH KD-2006)** : $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0\ ,x\in R$

6/ $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x;$ 7/ $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$

8/ $\sqrt{10x-1}-\sqrt{x+3}=1$;9/ $\sqrt{3x+5}-\sqrt{x-1}=4$

10/ $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1};$ 11/ $\sqrt{x^2-1}=\left(\frac{1}{2}x+1\right)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$

12/ $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1.$

<u>II/ Dạng 2:</u> Giải bất phương trình.

1/ **(Dự bị 2 khối B 2005) :** $\sqrt{8x^2-6x+1}-4x+1\le 0;$

2/ **(Dự bị 1 khối D 2005) :** $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x}\ge\sqrt{3x-2}$;

3/ **(ĐH KD - 02)** $\left(x^2-3x\right)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$;

4/ **(ĐH KA-05)** $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$;

5/ **(ĐH KA-04)** $\dfrac{\sqrt{2\left(x^2-16\right)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$;

6/ **(ĐH KA-2010)**: $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}}\ge 1$

<u>III/ Dạng 3:</u> Tìm điều kiện để phương trình, bất phương trình có nghiệm .

Thông thường ở dạng này ta sử dụng một trong các phương pháp sau:
** PP1: Sử dụng tính chất đồng biến ,nghịch biến của hàm số.*
** PP2: Sử dụng tương giao của các đồ thị hàm số.*

1/ **(Dự bị 1 khối B 2007) :** Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$ có nghiệm.

2/ **(Dự bị 1 khối A 2007) :**Tìm m để bất phương trình : $m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0$

có nghiệm $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

3/ **(ĐH KA-2007)** Tìm m để phương trình $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm thực .

4/ **(ĐH KB-2007)** CMR với giá trị của mọi m, phương trình $x^2+2x-8=\sqrt{m(x-2)}$ có 2 nghiệm thực phân biệt .

5/ **(ĐH KA-2007)** Tìm m để phương trình $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m$,$(m\in R)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

6/ **(Khối D-2004):** CMR: phương trình sau có đúng một nghiệm : $x^5-x^2-2x-1=0$.

7/ **(ĐH KB-2004):** Xác định m để phương trình sau có nghiệm :

$$m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\ .$$

8/ **(ĐH KB-2006):** Tìm m để pt: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có 2 nghiệm thực phân biệt

9/ **(Khối B-2010)** Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$ (x ∈ R).

10/ **(Khối D-2010)** Giải phương trình $4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$ $(x\in\mathbb{R})$

B. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Đối với hệ phương trình vô tỉ ta còn có một số cách giải đặc trưng như sau:

a. Phương pháp biến đổi tương đương:

1. Phương pháp:

B1: Đặt điều kiện cho các biểu thức có nghĩa
B2:Sử dụng các phép thế nhận được từ hệ một phương trình theo ẩn x hoặc y (đôi khi có thể là theo cả hai ẩn x, y).
B3: Giải phương trình nhận được bằng các phương pháp đã biết đối với phương trình chứa căn thức
B4:Kết luận

2. Ví dụ:

VD1: Giải hệ phương trính

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=\sqrt[3]{x+y}\,(1)\\ \sqrt{x-y}=\sqrt[3]{x-y-12}\,(2)\end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge y\\ x\ge -y\end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x+y})^6 = (\sqrt[3]{x+y})^6$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 = (x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x+y=1 \end{array}\right.$$

Thay x=-y vào phương trình (2),ta được : y = -2 $\Rightarrow$ x = 2.

VD2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18(1) \\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2(2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2+x+y+1\ge 0 \\ y^2+x+y+1\ge 0 \end{cases}$$

Cộng tương ứng 2 vế:

$$\sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1}=10 \qquad (4)$$

Thay (4) vào (1) :

$$x+y=8 \Leftrightarrow y=8-x \qquad (5)$$

Thay (5) vào (4) :

$$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(8-x)^2+9}=10 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-16x+73}=10$$

$$\Leftrightarrow (x^2+9)+(x^2-16x+73)+2\sqrt{(x^2+9)(x^2-16x+73)}=10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+9)(x^2-16x+73)}=9+8x-x^2 \Leftrightarrow x=4$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất x=y=4.

Nhận xét: Với ý tưởng tạo ra 1 phương trình hệ quả từ hệ và liên tục sử dụng phép thế ta tìm được nghiệm của hệ ban đầu.

VD3 : Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x, y > 0$

Hệ:

$$\begin{cases} (x+y)(-\sqrt{xy})=7 \\ (x+y)(-\sqrt{xy})=-78 \end{cases}$$

Suy ra $x+y$ và $-\sqrt{xy}$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2-7t-78=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=13 \\ t_2=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=13 \\ -\sqrt{xy}=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow\succ \left[\begin{array}{l} x+y=13 \\ xy=36 \end{array}\right.$$

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$u^2 - 13u + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 4 \\ u_2 = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (4,9),(9,4)

VD4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện :$x \geq 0, y \geq 0$

Hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 2y^2} + \sqrt{4xy} = 16 \\ x + y + \sqrt{4xy} = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 2y^2} = x + y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \qquad x = y = 4$$

Vậy hệ có nghiệm là (4;4)

VD5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{y-2} = \sqrt{m} \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+5} = \sqrt{m} \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ y-2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ y+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 2 \end{cases}$

Các vế của hệ phương trình không âm, bình phương hai vế ta được:

$$\begin{cases} x + y + 3 + 2\sqrt{(x+5)(y-2)} = m \\ x + y + 3 + 2\sqrt{(x-2)(y+5)} = m \end{cases} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+5)(y-2)} = \sqrt{(x-2)(y+5)} \Leftrightarrow x = y$$

Thay x=y vào (1):

$$2x + 3 + 2\sqrt{(x+5)(x-2)} = m \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 3x - 10} = m - 3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3-2x \geq 0 \\ 4(x^2+3x-10) = (m-3-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{m-3}{2} \\ x = \dfrac{m^2-6m+49}{4m} \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} x \leq 23 \\ x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11$$

a. Với m=49, (I) có dạng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 23 \\ x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11$$

Vậy, với m=49 hệ có nghiệm x=y=11

b. Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{m^2-6m+49}{4m} \leq \dfrac{m-3}{2} \\ \dfrac{m^2-6m+49}{4m} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 7$$

Vậy,với $m \geq 7$ hệ có nghiệm duy nhất.

b.Phương pháp đặt ẩn phụ:

1.Phương pháp:

Phương pháp được sử dụng nhiều nhất để giải các hệ chứa căn thức là việc sử dụng các ẩn phụ. Tuỳ theo dạng của hệ mà lựa chọn phép đặt ẩn thích hợp.

B1: Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

B2: Lựa chọn đặt ẩn để biến đổi hệ ban đầu về các hệ đại số đã biết cách giải (hệ đối xứng loại I, II và hệ đẳng cấp bậc 2)

B3: Giải hệ

B4: Kết luận

2.Ví dụ:

VD1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases} S = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ P = \sqrt{xy} \end{cases}$$, điều kiện $S, P \geq 0$ và $S^2 - 4P \geq 0$

Khi đó hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{\left[\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{xy}\right]^2 - 2xy} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\left(S^2-2P\right)^2-2P^2}+\sqrt{2P}=8\sqrt{2} \\ S=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{P^2-32P+128}=8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-P\geq 0 \\ P^2-32P+128=(8-P)^2 \end{cases} \Leftrightarrow P=4$$

Vậy ta được:

$$\begin{cases} S=4 \\ P=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \\ \sqrt{xy}=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$$

Chú ý: Nhiều hệ ở dạng ban đầu chưa thấy sự xuất hiện ẩn phụ, trong trường hợp này ta cần sử dụng một vài phép biến đổi phù hợp.

VD2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ x^2+y^2=128 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện:

$$\begin{cases} x+y\geq 0 \\ x-y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq -x \\ y\leq x \end{cases} \Leftrightarrow -x\leq y\leq x \Rightarrow x\geq 0$$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ \frac{1}{2}(x+y)^2\,\frac{1}{2}(x-y)^2=128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ (x+y)^2+(x-y)^2=256 \end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases} u=\sqrt{x+y} \\ v=\sqrt{x-y} \end{cases}, u,v\geq 0$$

Ta được:

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u^4+v^4=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv(uv-32) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} uv=0 \\ uv=32 \end{array}\right. \\ u+v=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=32 \end{cases} \text{(I) Hoặc } \begin{cases} u+v=4 \\ uv=0 \end{cases} \text{(II)}$$

- Giải (I): vô nghiệm.

- Giải (II):

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=4 \\ v=0 \end{cases} \\ \begin{cases} u=0 \\ v=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+y}=4 \\ \sqrt{x-y}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+y}=0 \\ \sqrt{x-y}=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=8 \\ \begin{cases} x=8 \\ y=-8 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (8,8) (8,-8).

Chú ý: Khi đặt điều kiện để các biểu thức của phương trình, bất phương trình và hệ có nghĩa là ta suy ra được cho ẩn từ đó có thể dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ bằng phương pháp lượng giác hóa mà chúng ta đã biết.

VD3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2}=1 \\ y+\sqrt{1-x^2}=1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $|x|,|y|\le 1$

Đặt:

$$\begin{cases} x=\sin\alpha \\ y=\sin\beta \end{cases} \text{ với } -\frac{\pi}{2}\le \alpha,\beta\le\frac{\pi}{2}$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{cases} \sin\alpha+\cos\beta=1 \\ \sin\beta+\cos\alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha+\cos\beta=1 \\ \sin(\alpha+\beta)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha+\cos\beta=1 \\ \left[\begin{array}{l} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\beta=\pi \end{array}\right. \end{cases}$$

VD4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện :$x\ge 0$; $y\ge 0$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x} \\ v=\sqrt{y} \end{cases}$; $\begin{cases} u\ge 0 \\ v\ge 0 \end{cases}$.

Ta được hệ $\begin{cases} uv(u+v)=30 \\ u^3+v^3=35 \end{cases}$

Đặt S=u+v ,P=uv ta có:

$$\begin{cases} SP=30 \\ S^3-3PS=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=5 \\ P=6 \end{cases}$$

Vậy u, v là nghiệm không âm của phương trình:

$$X^2-5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=3 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \vee \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm là $\begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases} \vee \begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases}$

VD5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+y)=3(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6 \end{cases}$

Giải

Đặt u=$\sqrt[3]{x}$,v=$\sqrt[3]{y}$ ta có hệ

$$\begin{cases} 2(u^3+v^3)=3uv(u+v) \\ u+v=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u+v)[(u+v)^2-3uv]=3uv(u+v) \\ u+v=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(36-3uv)=3uv \\ u+v=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 8 \\ u + v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases}$$

a)Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 4 \end{cases}$ **ta có** $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 \\ \sqrt[3]{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 64 \end{cases}$

b)với $\begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases}$ **ta có** $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 4 \\ \sqrt[3]{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64 \\ y = 8 \end{cases}$

Vậy hệ có 2 nghiệm là (8; 64),(64 ; 8)

VD6: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} m\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m+1 \\ \sqrt{x+1} + m\sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Đặt:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = u \\ \sqrt{y} = v \end{cases} \qquad (u, v > 0)$$

Khi đó hệ có dạng: $\begin{cases} mu + v = m+1 \\ ux + mv = 2 \end{cases}$

$$D = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} = m^2 - 1$$

Ta có: $D_u = \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{pmatrix} = m^2 + m - 2$

$$D_v = \begin{pmatrix} m & am+1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = m - 1$$

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Hệ có nghiệm duy nhất $u = \dfrac{m+2}{m+1}$ và $v = \dfrac{1}{m+1}$

Vì điều kiện $u, v > 0$ nên ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{m+2}{m+1} \geq 0 \\ \dfrac{1}{m+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

Khi đó ta được:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = \dfrac{m+2}{m+1} \\ \sqrt{y} = \dfrac{1}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m+3}{(m+1)^2} \\ y = \dfrac{1}{(m+1)^2} \end{cases}$$

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$

Với $m = 1 \Rightarrow D_u = D_v = 0$, hệ có vô số nghiệm thoả $\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 2$

Với $m = -1 \Rightarrow D_u = 2 \neq 0$, hệ vô nghiệm.

c.Phương pháp sử dụng hàm số:

1. Phương pháp:

B1: Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

B2: Từ hệ ban đầu chúng ta xác định được một phương trình hệ quả theo 1 ẩn hoặc 2 ẩn, giải phương trình này bằng phương pháp hàm số đã biết.

B3: Giải hệ.

B4: Kết luận.

2.Ví dụ:

- **Có lẽ phương pháp này chúng ta chưa được học đến nên chúng tôi chỉ đề cập sơ lược qua để giới thiệu thêm cho một số bạn cần chuyên sâu về hệ phương trình vô tỉ.**
- **Sau đây chúng tôi sẽ đưa ra 1 ví dụ để làm rõ phương pháp trên. Đối với một số bạn muốn tìm hiểu rõ về pp này thì có thể đọc phần tự học ở cuối sách.**

VD1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y}=1-x^3 \\ (x-1)^4=y \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện:

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Biến đổi về hệ có dạng

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y}=1-x^3 \\ (x-1)^2=\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x-1}-(x-1)^2=1-x^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=-x^3+x^2-x+1 \qquad \textbf{(1)}$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}$, là hàm số đồng biến trên $D=[1,+\infty)$

Xét hàm số $g(x)=-x^3+x^2-x+1$

- Miền xác định $D=[1,+\infty)$
- Đạo hàm:

$$g'(x)=-3x^2+2x-1<0, \forall x\in D \Leftrightarrow \text{hàm số đồng biến trên D}$$

Do đó phương trình **(1)**: $f(t)=g(t)$

Nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

x=1 thoả mãn phương trình

x=1. y = 0 là nghiệm hệ

.

d.Phương pháp sử dụng đồ thị:

1. Phương pháp:

B1: Bằng các phép biến đổi tương đương, hoặc bằng phép đặt ẩn phụ, ta biến đổi hệ ban đầu về dạng đa thức, giả sử có hệ: $\begin{cases} f(x,y,m)=0 \\ g(x,y,m)=0 \end{cases}$ **(I)**

B2: Xét các đường $(C_1): f(x,y,m)=0$ và $(C_2): g(x,y,m)=0$ trên cùng một hệ trục toạ độ, từ đó xác định phần đường cong X_1 và X_2 thỏa mãn $(C_1): f(x,y,m)=0$ và $(C_2): g(x,y,m)=0$.

B3: Vận dụng các kiế thức về vị trí tương đối của các đối tượng ta tìm được giá trị của tham số thoả mãn điều kiện **K**.

2.Ví dụ:

e.Phương pháp sử dụng điều kiện cần và đủ:

1.Phương pháp:

Phương pháp điều kiện cần và đủ thường tỏ ra khá hiệu qua cho lớp dạng toán:
Tìm điều kiện tham số để:
Dạng 1: *Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.*
Dạng 2: *Hệ phương trình có nghiệm với mọi giá trị của tham số.*
Dạng 3: *Hệ phương trình nghiệm đúng với mọi* $x \in D$.
Dạng 4: *Hệ phương trình tương đương với một phương trình hoặc một bất phương trình khác.*
Khi đó ta thực hiện theo các bước sau:

B 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của hệ phương trònh có nghĩa.
B 2: Tìm *điều kiện cần* cho hệ dựa trên việc đánh giá hoặc tính đối xứng của hệ.
B 3: KIểm tra *điều kiện đủ*, trong bước này cần có được một số kĩ năng cơ bản.

2.Ví dụ:

VD1: Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=a\\ x+y=2a+1\end{cases} \quad \textbf{(I)}$$

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>
Điều kiện cần:
Giả sử hệ có nghiệm $(x_0,y_0)\Rightarrow(y_0-2,x_0+2)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình. Vậy hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0=y_0-2$
Khi đó hệ **(I)** có dạng:

$$\begin{cases}\sqrt{y_0-1}+\sqrt{y_0-1}=a\\ y_0-2+y_0=2a+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{y_0-1}=a\\ 2y_0=2a+3\end{cases}\Rightarrow\sqrt{2(2a+3)-1}=a$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0\\ 4a-2=a^2\end{cases}\Leftrightarrow a=2+\sqrt{6}$$

Vậy $a=2+\sqrt{6}$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.
Điều kiện đủ:
Với $a=2+\sqrt{6}$, hệ **(I)** có dạng: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=2+\sqrt{6}\\ x+y=2(2+\sqrt{6})+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=2+\sqrt{6}\\ (x+1)+(y-1)=5+2\sqrt{6}\end{cases}$

Đặt:

$$\begin{cases}u=\sqrt{x+1}\\ v=\sqrt{y-1}\end{cases};u,v\ge 0$$

Ta được:

$$\begin{cases}u+v=2+\sqrt{6}\\ u^2+v^2=5+2\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2+\sqrt{6}\\ uv=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{2}\end{cases}$$

Suy ra u,v là nghiệm phương trình:

$$t^2-(2+\sqrt{6})t+\frac{1}{2}(5+2\sqrt{6})=0\Leftrightarrow t_0=\frac{2+\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow u=v=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \\ \sqrt{y-1} = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+4\sqrt{6}}{4} \\ y = \dfrac{14+4\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$ là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $a = 2+\sqrt{6}$.

VD2:

Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau có nghiệm với mọi b:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2b^2-1} - \sqrt{(a-1)by} = x-1 \\ ax+by-1=0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện cần:

Hệ có nghiệm với mọi b $\Rightarrow$ có nghiệm với b=0, khi đó:

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-1} = x-1 \\ ax-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ ax-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ a=1 \end{cases}$

Vậy s=1 là dđều kiện cần để hệ có nghiệm với mọi b.

Điều kiện đủ:

Với a=1, hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2b^2-1} = x-1 \\ x+by-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x^2-2b^2-1 = (x-1)^2 \end{cases} \\ x+by-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b^2+1 \\ x+by-1=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b^2+1 \\ b^2+by=0 \end{cases} \Rightarrow$ ít nhất một nghiệm là $\begin{cases} x = b^2+1 \\ y=-b \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm với mọi b khi a=1.

VD3: Xác định các giá trị của m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} = m \\ y\sqrt{1-x^2} = 2m \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện cần:

Giả sử hệ có nghiệm $(x_{0,}y_0)$ suy ra:

$\begin{cases} |x_0| \le 1 \\ |y_0| \le 1 \end{cases} \Rightarrow$ tồn tại hai góc $\alpha, \beta(-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha, \beta \le \dfrac{\pi}{2}) : \begin{cases} x_0 = \sin\alpha \\ y_0 = \sin\beta \end{cases}$

Khi đó:

(I) $\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta = m \\ \sin\beta\cos\alpha = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = 3m \\ \sin(\alpha-\beta) = -m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |3m| \le 1 \\ |-m| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow |m| \le \dfrac{1}{3}$

Vậy $|m| \le \dfrac{1}{3}$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm.

Điều kiện đủ:

Với $|m| \le \dfrac{1}{3}$

Đặt: $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \sin\beta \end{cases}$, với $\alpha, \beta(-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha, \beta \le \dfrac{\pi}{2})$.

Hệ (I) có dạng: $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=3m\\ \sin(\alpha-\beta)=-m\end{cases} \xleftrightarrow{|m|\le\frac{1}{3}} \begin{cases}\alpha+\beta=u_0\\ \alpha-\beta=v_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\dfrac{u_0+v_0}{2}\\ \beta=\dfrac{u_0-v_0}{2}\end{cases}$ (*)

Điều này chứng tỏ hệ có nghiệm.

Vậy $|m|\le\dfrac{1}{3}$ hệ có nghiệm.

f.Phương pháp đánh giá:

Bằng cách đánh giá tinh tế dựa trên các tính chất của bất đẳng thức, ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của hệ.

VD1:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+\sqrt[4]{y-1}=1\\ y+\sqrt[4]{x-1}=1\end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge1\\ y\ge1\end{cases}$

Với $\begin{cases}x\ge1\\ y\ge1\end{cases}$

Hệ: $\begin{cases}x+\sqrt[4]{y-1}\ge1\\ y+\sqrt[4]{x-1}\ge1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm x=y=1

VD2: Giải hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt[4]{y^2-2y+2}=2\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{y+3}=3\end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện:

$$\begin{cases}x^2-2x+2\ge0\\ y^2-2y+2\ge0\\ x\ge0\\ y+3\ge0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge0\\ y\ge-3\end{cases}$$

Mà: $\begin{cases}x^2-2x+2=(x+1)^2+1\ge1\\ y^2-2y+2=(y-1)^2+1\ge1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-2x+2}\ge1\\ \sqrt[4]{y^2-2y+2}\ge1\end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt[4]{y^2-2y+2}\ge2$$

Vậy (1) có nghiệm x=y=1 thỏa (2).

VD3: Giải hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y}+\sqrt{y^2-x}=2(1)\\ x^2+y^2-x-y=2(2)\end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Xét (1), sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki:

$$2=\sqrt{x^2-y}+\sqrt{y^2-x}\le\sqrt{(1+1)(x^2-y+y^2-x)}=2$$

Vậy (1) tương đương với:

$$\sqrt{x^2-y}=\sqrt{y^2-x} \Leftrightarrow x^2-y=y^2-x \Leftrightarrow (y)(x+y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=-x-1 \end{array}\right.$$

⌗ Với x=y, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x=y \\ x^2+x^2-x-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

⌗ Với $y=-x-1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+(-x-1)^2-x-(-x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=-1 \end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ y=0 \end{array}\right.$$

Vậy, Hệ phương trình có 4 cặp nghiệm.

Bài tập;

Bài 1:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}=\sqrt[3]{x+y}(1) \\ \sqrt{x-y}=\sqrt[3]{x-y-12}(2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Ñk: $\begin{cases} x\ge y \\ x\ge -y \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow (\sqrt{x+y})^6=(\sqrt[3]{x+y})^6$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3=(x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x+y=1 \end{array}\right.$$

Thay x=-y vaøo phöông trình (2),ta ñöôïc : y = -2$\Rightarrow$ x = 2.

Bài 2:

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ñieàu kieän :x$\ge$ 0 ; y $\ge$0

Ñaët $\begin{cases} u=\sqrt{x} \\ v=\sqrt{y} \end{cases}$; $\begin{cases} u\ge 0 \\ v\ge 0 \end{cases}$.

Ta ñöôïc heä $\begin{cases} uv(u+v)=30 \\ u^3+v^3=35 \end{cases}$

Ñaët S=u+v ,P=uv ta coù:

Tính S ,P rồi suy ra u,v.Tính x,y theo u,v (so sánh với đk)

Nghiệm của hệ: (4;9), (9;4)

Bài 3:

$$\begin{cases} 2(x+y)=3(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Ñaët u=$\sqrt[3]{x}$,v=$\sqrt[3]{y}$ ta coù heä

$$\begin{cases} 2(u^3+v^3)=3uv(u+v) \\ u+v=6 \end{cases}$$

Tính u,v rồi tính x,y theo u,v vứa tìm được.

Heä coù 2 nghieäm (8; 64),(64 ; 8)

Bài 4:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=18 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

töø pt (1)$\Rightarrow$36=(x+y+z)2 suy ra xy+ yz +xz =9

töø pt(3)

$\Rightarrow 16=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$ suy ra xyz= 4

Ta có hệ mới :

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=9 \\ xyz=4 \end{cases}$$

Heä coù caùc nghieäm (1 ;4 ; 1); (1;1;4); (4;1;1)

Bài 5:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y \\ (x^2+y^2)(x^2-y^2)=144 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Ñieàu kieän :

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge\sqrt{y} \\ x\le\sqrt{y} \end{array}\right. \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Bình phương hai vế của pt (1)$\Rightarrow$…

thay (2) vào (1) $\Rightarrow 2x^2-24=y^2$ (3)

thay (3) vào (2) ta được x $\Rightarrow$ y

Vây hệ có nghiệm $(2\sqrt{3}:0);(-2\sqrt{3};0);(2\sqrt{5};4);(-2\sqrt{5};4)$

Bài 6:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1 \\ \sqrt{x+y}+x-y=0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Đk : $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ 3x+2y\ge 0 \end{cases}$

Đặt u=$\sqrt{x+y}\ge 0$

v=$\sqrt{3x+2y}\ge 0$

$\Rightarrow x-y=\ldots$

Hpt đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} u-v=-1 \\ u+2v^2-5u^2=0 \end{cases}$$

Giải hệ tìm u,v rồi suy ra x,y

Hệ có nghiệm (1;3)

Bài 7:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}=8.\end{cases}$$

$$dk\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$$

Hệ tương đương:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x+5}+\sqrt{y}+\sqrt{y+5}=13\\ \sqrt{x+5}-\sqrt{x}+\sqrt{y+5}-\sqrt{y}=3.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x+5}+\sqrt{y}+\sqrt{y+5}=13\\ \dfrac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}+\dfrac{5}{\sqrt{y+5}+\sqrt{y}}=3\end{cases}$$

Ñaët $\begin{cases}u=\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\\ v=\sqrt{y}+\sqrt{y+5}\end{cases}(u,v\ge\sqrt{5})$.

Ta coù heä: $\begin{cases}u+v=13\\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=13\\ uv=\dfrac{65}{3}.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{13+\sqrt{\dfrac{247}{3}}}{2}\\ v=\dfrac{13-\sqrt{\dfrac{247}{3}}}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}u=\dfrac{13-\sqrt{\dfrac{247}{3}}}{2}\\ v=\dfrac{13+\sqrt{\dfrac{247}{3}}}{2}\end{cases}$

Heä ñaõ cho voâ nghieäm vì $\dfrac{13-\sqrt{\dfrac{247}{3}}}{2}<\sqrt{5}.$.

Bài 8: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y+2}=7\\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}=7\end{cases}\quad .(1)$$

Ñk: $\begin{cases}x\ge-\dfrac{1}{2};x\ge-y\\ y\ge-\dfrac{1}{3};x+2y+2\ge 0\end{cases}$.

Heä $\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y+2+2\sqrt{(x+y)(x+2y+2)}=49.\\ 2x+3y+2+2\sqrt{(2x+1)(3y+1)}=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y+2}=7\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y+2}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+1}\\ \sqrt{x+y}.\sqrt{x+2y+2}=\sqrt{2x+1}.\sqrt{3y+1}\end{cases}$

(3)

Töø (3)$\Rightarrow$heä (1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y+2}=7\\ \sqrt{x+y}=\sqrt{2x+1}\\ \sqrt{x+2y+2}=\sqrt{3y+1}\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y+2}=7\\ \sqrt{x+y}=\sqrt{3y+1}\\ \sqrt{x+2y+2}=\sqrt{2y+1}\end{cases}\end{array}\right.$

$$\begin{cases} y = x+1 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y+2} = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ \sqrt{2y+1}+\sqrt{3x+4} = 7 \end{cases}$$

. tröôøng hôïp 1: $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2y+1 \\ \sqrt{3y+1}+\sqrt{4y+3} = 7 \end{cases}$$

. tröôøng hôïp 2: $\begin{cases} x \approx 7 \\ y \approx 3 \end{cases}$

Baøi 9:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{2+y} = 2 \\ \sqrt{2-x}+\sqrt{y+1} = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Giaûi:

Ñieàu kieän: $-1 \le x, y \le 2$

Heä (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{2-y} = 2 \\ (\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1})+(\sqrt{2-y}-\sqrt{2-x}) = 0 \end{cases}$

Ta thaáy (x;y)=(-1;-1) vaø (x;y)=(2;2) khoâng laø nghieäm

$\Rightarrow$ heä (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{2-y} = 2 \\ \dfrac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\dfrac{x-y}{\sqrt{x-y}+\sqrt{2-x}} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{2-y} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3+2\sqrt{(x+1)(2-x)} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - x + \dfrac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{15}}{2} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{15}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{1-\sqrt{15}}{2} \\ y = \dfrac{1-\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

Hai nghiệm trên đều không thỏa điều kiện.
Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Bài 10:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt[4]{y} = 1 \\ x+2y = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Giải:

điều kiện :x$\ge 0, y \ge 0$

hệ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{y} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{2} \\ y = \dfrac{1-x}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ y = \dfrac{1-x}{2} \\ \dfrac{1-x}{2} = (\dfrac{1-\sqrt{x}}{2})^4 \end{cases}$$

phương trình cuối $\Leftrightarrow \dfrac{1-x}{2}(1+\sqrt[4]{x})^4 = \left(\dfrac{1-x}{2}\right)^4$

. x=1 là nghiệm của phương trình trên

. $0 \le x < 1$ thì vế trái của (2') lớn hơn 0 .

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (1;0).

Bi 11:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} + \sqrt[4]{5-y} = 3 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$$

Đk: $\begin{cases} x \ge \dfrac{-1}{5} \\ y \le 5 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[4]{1+5x}, u \ge 0 \\ v = \sqrt[4]{5-y}, v \ge 0 \end{cases}$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u+v=3 \\ u^4+v^4=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \vee \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+5x=16 \\ 5-y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} 1+5x=1 \\ 5-y=16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-11 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: (3; 4), (0 ; -11).

Bi 12:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}} = 2 \\ x+y=12. \end{cases}$$

Đk: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ y > -2 \end{cases}$. Đặt $\sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}} = k > 0 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}} = \dfrac{1}{k}.$

Ta có : $k + \dfrac{1}{k} = 2 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

$$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{y+2} = 1 \Leftrightarrow 2x - y = 3.$$

Ta có hệ: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm (5 ; 7).

CHUYÊN ĐỀ 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

(Phần này có 101 bài tập cho các nội dung theo dạng toán liên quan tới hàm số đã được khảo sát)

TÀI LIỆU CỦA HỌC SINH: ....

CHUYÊN ĐỀ 1. KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

(Phần này có 101 bài tập cho các nội dung theo dạng toán liên quan tới hàm số đã được khảo sát)

CHỦ ĐỀ 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(m-1)x^3+mx^2+(3m-2)x$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi $m=2$.
2) Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó.

• $m\geq 2$

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=0$.
2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

• $m\leq -3$

Câu 3. Cho hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có đồ thị (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.
2) Tìm *m* để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

• $m\leq 1$

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi *m* = 1.
2) Tìm *m* để hàm đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

• $\frac{3+\sqrt{73}}{8}\geq m$.

Câu 5. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-3m+1$ (1), (*m* là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi *m* = 1.
2) Tìm *m* để hàm số (1) đồng biến trên khoảng (1; 2).

• $m\in\left(-\infty;1\right]$.

Câu 6. Cho hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=-1$.
2) Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

• $-2<m\leq -1$.

CHỦ ĐỀ 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 7. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m-2$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 3.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành.

• $m<3$.

Câu 8. Cho hàm số $y=-x^3+(2m+1)x^2-(m^2-3m+2)x-4$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

• $1<m<2$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-3$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 2.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía đối với trục tung.

• $\begin{cases} m\neq 1 \\ m>\frac{1}{2}\end{cases}$

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $y=x-1$.

- $m \in \left\{0; -\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng *y* = *x*.

- $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.
2) Với giá trị nào của *m* thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $x + 8y - 74 = 0$.

- $m = 2$

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ (1).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.
2) Với giá trị nào của *m* thì đồ thị hàm số (1) có các điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $x - 2y - 5 = 0$.

- *m = 0.*

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x + m - 2$ (1) có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.
2) Với giá trị nào của *m* thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $y = \frac{1}{2}x$.

- $m = 1$.

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$, với m là tham số thực.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 1$.
2) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \leq 2$.

- $-3 \leq m < -1 - \sqrt{3}$ *và* $-1 + \sqrt{3} < m \leq 1$.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$, với m là tham số thực.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 1$.
2) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| > \frac{1}{3}$.

- $m > \frac{3+\sqrt{29}}{8} \vee m < -1$

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$, với m là tham số thực.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 2$.
2) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 1$.

- $m = \frac{-4 \pm \sqrt{34}}{4}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.
2) Tìm *m* để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 = -4x_2$.

- $m = \pm\frac{9}{2}$

Câu hỏi tương tự:

a) $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$; $x_1 + 2x_2 = 3$ *ĐS:* $m = -105$.

Câu 19. Cho hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$, *m* là tham số.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi *m* = 0.
2) Tìm các giá trị của *m* để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương.

- $-3 < m < -2$.

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2) Tìm điểm M thuộc đường thẳng d: $y=3x-2$ sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

- $M\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$ (*m* là tham số) (1).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi *m* = 2.
2) Tìm các giá trị của *m* để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

- $\frac{5}{4}<m<\frac{7}{5}$.

Câu 22. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ (1)
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi *m* = 1.
2) Tìm *m* để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

- $\left[\begin{array}{l} m=-3+2\sqrt{2} \\ m=-3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 23. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$ (1)
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=1$.
2) Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

- $y=2x-m^2+m$.

Câu 24. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.
2) Tìm *m* để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với đường thẳng d: $y=-4x+3$.

- *Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là* *d*: $y=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

Đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với d: $y=-4x+3$

$\Leftrightarrow m=3$ *(thỏa mãn).*

Câu 25. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.
2) Tìm *m* để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị tạo với đường thẳng d: $x+4y-5=0$ một góc 45^0.

- *Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là* Δ: $y=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+\left(2-\frac{m}{3}\right)$

Đặt $k=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)$. *Đường thẳng d:* $x+4y-5=0$ *có hệ số góc bằng* $-\frac{1}{4}$.

Ta có:

$$\tan 45^\circ=\left|\frac{k+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}k}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}k \\ k+\frac{1}{4}=-1+\frac{1}{4}k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\frac{3}{5} \\ k=-\frac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\frac{39}{10} \\ m=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (*), suy ra giá trị m cần tìm là: $m=-\frac{1}{2}$.

??? Hãy làm bài mà không dùng công thức tan ở trên!

Câu 26. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$ (1)
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=-4$.
2) Xác định *m* để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị *A*, *B* sao cho $\widehat{AOB}=120^0$.

- *Ta có:* $y'=3x^2+6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=m+4 \\ x=0 \Rightarrow y=m \end{array}\right.$

Vậy hàm số có hai điểm cực trị A(0 ; m) và B(–2 ; m + 4)

$\overrightarrow{OA}=(0;m)$, $\overrightarrow{OB}=(-2;m+4)$. *Để* $\widehat{AOB}=120^0$ *thì* $\cos\widehat{AOB}=-\frac{1}{2}$

$$m=\frac{-12+2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 27. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=-2$.
2) Chứng minh rằng (C_m) luôn có điểm cực đại và điểm cực tiểu lần lượt chạy trên mỗi đường thẳng cố định.

• $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right.$

Điểm cực đại $M(m-1;2-3m)$ *chạy trên đường thẳng cố định:* $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-3t \end{cases}$

Điểm cực tiểu $N(m+1;-2-m)$ *chạy trên đường thẳng cố định:* $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-3t \end{cases}$

Câu 28. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-mx^2+\frac{3}{2}$ (1)
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=3$.
2) Xác định *m* để đồ thị của hàm số (1) có cực tiểu mà không có cực đại.

• $m \le 0$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)=x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$ (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số khi $m = 1$.
2) Tìm các giá trị của *m* để đồ thị (C_m) của hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

• $m=1$.

Câu 30. Cho hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$ (C_m)
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều.

• $m=2-\sqrt[3]{3}$.

Câu hỏi tương tự đối với hàm số: $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$

Câu 31. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$ có đồ thị (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = -2$.
2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có một góc bằng 120^0.

• $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có đồ thị (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

• $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right.$

Câu hỏi tương tự:

a) $y=x^4-2mx^2+1$ *ĐS:* $m=1, m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Câu 33. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có đồ thị (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có diện tích bằng 4.

• $m=\sqrt[5]{16}$.

Câu hỏi tương tự:

a) $y=x^4-2m^2x^2+1$, *S = 32* *ĐS:* $m=\pm 2$

CHỦ ĐỀ 3: SỰ TƯƠNG GIAO

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ (*m* là tham số) (1)
1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 3$.
2) Tìm *m* để đường thẳng d: $y = 1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, *B*, *C* sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại *B* và *C* vuông góc với nhau.

- $m=\dfrac{9-\sqrt{65}}{8} \vee m=\dfrac{9+\sqrt{65}}{8}$.

Câu 35. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y=mx+m+3$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để (d) cắt (C) tại M(–1; 3), N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau.

- $m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \vee m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi (*d*) là đường thẳng đi qua điểm A(2; 0) có hệ số góc *k*. Tìm *k* để (*d*) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, M, N sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M và N vuông góc với nhau.

- $k=\dfrac{-3\pm 2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 37. Cho hàm số $y=x^3-3x$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Chứng minh rằng khi *m* thay đổi, đường thẳng (d): $y=m(x+1)+2$ luôn cắt đồ thị (C) tại một điểm M cố định và xác định các giá trị của *m* để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt M, N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau.

- $m=\dfrac{-3\pm 2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 38. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-(m^2-1)$ (*m* là tham số) (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=0$.

2) Tìm các giá trị của *m* để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

- $\sqrt{3}<m<1+\sqrt{2}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\dfrac{2}{3}$ có đồ thị (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = –1.

2) Tìm *m* để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15.

- $|m|>1$

Câu hỏi tương tự đối với hàm số: $y=x^3-3mx^2-3x+3m+2$

Câu 40. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$, trong đó m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $m=0$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- $m=11$.

Câu 41. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+9x-7$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $m=0$.

2) Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{15}}{2} \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{15}}{2} \end{array}\right.$ *Thử lại ta có* $m=\dfrac{-1-\sqrt{15}}{2}$ *là giá trị cần tìm.*

Câu 42. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2-mx$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $m=1$.

2) Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng d: $y=x+2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.

- $m=-\dfrac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$.

Câu 43. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số trên khi $m = 1$.

2) Cho đường thẳng (d): $y=x+4$ và điểm K(1; 3). Tìm các giá trị của m để (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A(0; 4), B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

• $m=\frac{1\pm\sqrt{137}}{2}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi d_k là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0)$ với hệ số góc k $(k\in\mathbb{R})$. Tìm k để đường thẳng d_k cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C và 2 giao điểm B, C cùng với gốc toạ độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

• $k=1$.

Câu 45. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi E là tâm đối xứng của đồ thị (C). Viết phương trình đường thẳng qua E và cắt (C) tại ba điểm E, A, B phân biệt sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{2}$.

• $y=-x+1;\ y=\left(-1\pm\sqrt{3}\right)(x-1)$.

Câu 46. Cho hàm số $y=x^3+mx+2$ có đồ thị (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -3$.

2) Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

• $m>-3$.

Câu 47. Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx-2$ có đồ thị (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

• $1-\sqrt{3}<m<1+\sqrt{3}$

Câu 48. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-6$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Định m để đường thẳng $(d): y=mx-2m-4$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

• $m>-3$.

Câu 49. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm m để đường thẳng (Δ): $y=(2m-1)x-4m-1$ cắt đồ thị (C) tại đúng hai điểm phân biệt.

• $m=-\frac{5}{8}$; $m=\frac{1}{2}$.

Câu 50. Cho hàm số $y=x^3-3m^2x+2m$ có đồ thị (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt.

• $m=\pm1$.

Câu 51. Cho hàm số $y=x^4-mx^2+m-1$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m=8$.

2) Định m để đồ thị $\left(C_m\right)$ cắt trục trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

• $\begin{cases} m>1 \\ m\neq 2 \end{cases}$

Câu 52. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m=0$.

2) Định m để đồ thị $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

• $m\in\left\{4;\frac{-4}{9}\right\}$

Câu hỏi tương tự đối với hàm số $y=-x^4+2(m+2)x^2-2m-3$ *ĐS:* $m=3, m=-\frac{13}{9}$.

Câu 53. Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.
2) Tìm m để đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

• $\begin{cases} -\dfrac{1}{3}<m<1 \\ m\neq 0 \end{cases}$

Câu 54. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.
2) Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 3.

• $m=-\dfrac{1}{2}\vee m\geq 1$.

Câu 55. Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+2m$ (*1*), với m là tham số.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*1*) khi $m=1$..
2) Chứng minh đồ thị hàm số (*1*) luôn cắt trục Ox tại ít nhất hai điểm phân biệt, với mọi $m<0$.

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị là (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Chứng minh rằng đường thẳng d: $y=-x+m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm m để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

• $m=0$. *Khi đó:* $AB=\sqrt{24}$.
Câu hỏi tương tự đối với hàm số:
a) $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ *ĐS: m = 2*
b) $y=\dfrac{x-1}{2x}$ *ĐS:* $m=\dfrac{1}{2}$

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình đường thẳng d qua điểm $I(-1;1)$ và cắt đồ thị (C) tại hai điểm M, N sao cho I là trung điểm của đoạn MN.

• *Phương trình đường thẳng cần tìm là* $y=kx+k+1$ *với* $k<0$.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+4}{1-x}$ (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Gọi (d) là đường thẳng qua $A(1;\ 1)$ và có hệ số góc k. Tìm k để (d) cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho $MN=3\sqrt{10}$.

• $k=-3;\ k=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{16};\ k=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{16}$.

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm m để đường thẳng (d): $y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{5}$.

• $m=10;\ m=-2$.

Câu 60. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+m}$ (1).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=1$.
2) Tìm các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng (d): $y=x+2$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{2}$.

• $m=7$.

Câu 61. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm m để đường thẳng d: $y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

• $m=-2$.

Câu 62. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+2}{x-2}$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Chứng minh rằng với mọi giá trị m thì trên (C) luôn có cặp điểm A,

B nằm về hai nhánh của (C) và thỏa $\begin{cases} x_A - y_A + m = 0 \\ x_B - y_B + m = 0 \end{cases}$.

CHỦ ĐỀ 4: TIẾP TUYẾN

Câu 63. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (1) (*m* là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) với *m* = 2.
2) Tìm tham số *m* để đồ thị của hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng d: $x + y + 7 = 0$ góc α, biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

- $m \le -\dfrac{1}{4}$ *hoặc* $m \ge \dfrac{1}{2}$.

Câu 64. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn AB = $4\sqrt{2}$.

- $A(3;1),\ B(-1;-3)$.

Câu 65. Cho hàm số $y = 3x - x^3$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên đường thẳng (d): $y = -x$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

- *Các điểm cần tìm là:* A(2; –2) và B(–2; 2).

Câu 66. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên đường thẳng (d): y = 2 các điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

- *M(m; 2) ∈ (d): y = 2 với* $\begin{cases} m < -1 \text{ hoÆc } m > \dfrac{5}{3} \\ m \ne 2 \end{cases}$ *có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C).*

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.
2) Tìm các giá trị *m* sao cho trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (d): $x + 2y - 3 = 0$.

- $m < 0$ *hay* $m > \dfrac{2}{3}$.

Câu 68. Cho hàm số $y = \left(|x|+1\right)^2.\left(|x|-1\right)^2$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Cho điểm $A(a;0)$. Tìm *a* để từ A kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

- $-1 \ne a < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hoÆc $1 \ne a > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Trên (C) lấy hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là *a* và *b*. Tìm điều kiện đối với *a* và *b* để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

- $\begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ a \ne \pm 1;\ a \ne b \end{cases}$

Câu 70. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

- $y = x$ *và* $y = x + 8$.

Câu 71. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và

tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

• $y=-x-2$.

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B thoả mãn OA = 4OB.

• $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4} \\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất.

• $M(3;3)$ *hoặc* $M(1;1)$.

Câu 74. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số.

2) Cho *M* là điểm bất kì trên (*C*). Tiếp tuyến của (*C*) tại *M* cắt các đường tiệm cận của (*C*) tại *A* và *B*. Gọi *I* là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm toạ độ điểm *M* sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác *IAB* có diện tích nhỏ nhất.

• *M(1; 1) hoặc M(3; 3).*

Câu 75. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 tiệm cận tại A và B với chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất.

• *Có hai điểm M thỏa mãn điều kiện* $M_1\left(1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$.

Khi đó chu vi $\Delta AIB = 4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

Chú ý: *Với 2 số dương a, b thoả ab = S (không đổi) thì biểu thức P =* $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ *nhỏ nhất khi và chỉ khi a = b.*

Thật vậy: P = $a+b+\sqrt{a^2+b^2} \geq$

$2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=(2+\sqrt{2})\sqrt{ab}=(2+\sqrt{2})\sqrt{S}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ *a = b.*

Câu 76. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Cho điểm $A(0;a)$. Tìm *a* để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục hoành.

• $\begin{cases} a>-\dfrac{2}{3} \\ a\neq 1 \end{cases}$.

Câu 77. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Cho điểm $M_o(x_o;y_o)$ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt các tiệm cận của (C) tại các điểm A và B. Chứng minh M_o là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Câu 78. Cho hàm số : $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị (C) đều lập với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

• : $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB$ *= 6 (đvdt)* $\Rightarrow$ *ĐPCM.*

Câu hỏi tương tự đối với hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$ *ĐS: S = 12.*

Câu 79. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận, Δ là một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C). d là khoảng cách từ I đến Δ. Tìm giá trị lớn nhất của d.

- *GTLN của d bằng $\sqrt{2}$ khi $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -2$.*

Câu 80. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

- *Các tiếp tuyến cần tìm : $x+y-1=0$ và $x+y-5=0$.*

Câu 81. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên Oy tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

- *Có 2 điểm cần tìm là: M(0; 1) và M(0; –1).*

Câu 82. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(2; 4)$, $B(-4; -2)$.

- *Có ba phương trình tiếp tuyến:* $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$; $y = x+1$; $y = x+5$.

Câu 83. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{1-x}$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận, A là điểm trên (C) có hoành độ là *a*. Tiếp tuyến tại A của (C) cắt hai đường tiệm cận tại P và Q. Chứng tỏ rằng A là trung điểm của PQ và tính diện tích tam giác IPQ.

- $S_{IPQ} = \dfrac{1}{2} IP.IQ = 2$ *(đvdt).*

Câu 84. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) biết tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho côsin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, với I là giao 2 tiệm cận.

- $M\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$ *phương trình tiếp tuyến:* $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$
  $M\left(4; \dfrac{5}{3}\right)$ *phương trình tiếp tuyến:* $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{2}$.

CHỦ ĐỀ 5: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Câu 85. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm *m* để phương trình $x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2$ có ba nghiệm phân biệt.

- $m \in (-1; 3) \setminus \{0; 2\}$.

Câu 86. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ có đồ thị (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm *m* để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 6 nghiệm.

- *Dựa vào đồ thị ta có PT có 6 nghiệm* $\Leftrightarrow$ $\log_{12} m = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m = 12^{\frac{9}{4}} = 144\sqrt[4]{12}$.

Câu 87. Cho hàm số: $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình: $x^4 - 2x^2 + 1 + \log_2 m = 0$ $(m > 0)$

- *+ Từ đồ thị suy ra:*

$0<m<\frac{1}{2}$	$m=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<m<1$	$m=1$	$m>1$
2 nghiệm	***3 nghiệm***	***4 nghiệm***	***2 nghiệm***	***vô nghiệm***

Câu 88. Cho hàm số $y=f(x)=8x^4-9x^2+1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Dựa vào đồ thị (C) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$8\cos^4 x-9\cos^2 x+m=0 \text{ với } x\in[0;\pi]$$

- *Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau:*

$m<0$	$m=0$	$0<m<1$	$1\le m<\frac{81}{32}$	$m=\frac{81}{32}$	$m>\frac{81}{32}$
vô nghiệm	***1 nghiệm***	***2 nghiệm***	***4 nghiệm***	***2 nghiệm***	***vô nghiệm***

Câu 89. Cho hàm số $y=\frac{3x-4}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm các giá trị của *m* để phương trình sau có 2 nghiệm trên đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$: $\sin^6 x+\cos^6 x=m(\sin^4 x+\cos^4 x)$

- $\frac{1}{2}<m\le\frac{7}{10}$.

Câu 90. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình $\frac{|x|+1}{|x|-1}=m$.

- Dựa vào đồ thị ta suy ra được:

$m<-1; m>1$	$m=-1$	$-1<m\le1$
2 nghiệm	**1 nghiệm**	**vô nghiệm**

CHỦ ĐỀ 6: ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ

Câu 91. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua tâm M(–1; 3).

- $(-1;0)$ *và* $(-1;6)$.

Câu 92. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng d: $2x-y+2=0$.

- $\left(\sqrt{\frac{7}{2}};2-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right);\left(-\sqrt{\frac{7}{2}};2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

Câu 93. Cho hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x-\frac{11}{3}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên đồ thị (C) hai điểm phân biệt M, N đối xứng nhau qua trục tung.

- $M\left(3;\frac{16}{3}\right), N\left(-3;\frac{16}{3}\right)$.

Câu 94. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích các hệ số góc bằng –9.

- *M(0; –3) và M(–2; 5).*

Câu 95. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

- *(0; 1) và (–2; 3).*

Câu hỏi tương tự:

a) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ *ĐS:* $x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Câu 96. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm các điểm thuộc (C) cách đều 2 tiệm cận.

- *M_1(1; 1) và M_2(4; 6).*

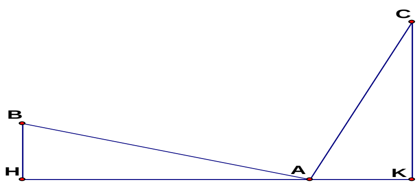
Câu 97. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết M(–3; 0) và N(–1; –1).

- *A(0; –4), B(2; 0).*

Câu 98. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên đồ thị (C) hai điểm B, C thuộc hai nhánh sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A với A(2; 0).



- $B(-1;1),\ \ C(3;3)$

Câu 99. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm tọa độ điểm M $\in$ (C) sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

- $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ *hoặc* $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Câu 100. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm những điểm trên đồ thị (C) cách đều hai điểm A(2; 0) và B(0; 2).

- $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 101. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên hai nhánh của đồ thị (C) hai điểm A và B sao cho AB ngắn nhất.

- $A\left(-1-\sqrt[4]{4};1+\sqrt[4]{64}\right),B\left(-1+\sqrt[4]{4};1-\sqrt[4]{64}\right)$.

CÁC BÀI TOÁN VỀ HÀM BẬC BA

Bài 1. ***<u>(TNTHPT – 2008)</u>*** Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b. Biệm luận theo m số nghiệm của phương trình $2x^3 + 3x^2 - 1 = m$

Bài 2. ***<u>(TN THPT- lần 2 – 2008)</u>*** Cho hàm số y = x^3 - $3x^2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 3. ***<u>(TNTHPT - 2007)</u>*** Cho hàm số y=$x^3 - 3x + 2$ có đồ thị là (C) .

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số .

b/ Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm A(2 ;4) .

Bài 4. ***<u>(TNTHPT - 2006)</u>*** Cho hàm số y=$-x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) .

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số .

b/ Dựa vào đồ thị biện luận số nghiệm phương trình : $-x^3 + 3x^2$-m=0 .

Bài 5. ***<u>(TNTHPT – 2004- PB)</u>*** Cho hàm số y=$x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị là (C) .

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số .

b/ Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình y''=0 .

c/ Với giá trị nào của m thì đường thẳng y=x+m^2-m đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối cực đại vào cực tiểu .

Bài 6. ***<u>(TNTHPT – 2004 - KPB)</u>*** Cho hàm số y=$x^3 - 3mx^2 + 4m^3$.

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m=1 .

b/ Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x=1 .

Bài 7. ***<u>(ĐH- A- 2002)</u>*** Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m= 1

b. Tìm k để phương trình: $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

c. Viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

Bài 8. ***<u>(CĐ SP MGTW- 2004)</u>*** Cho hàm số y = x^3 - $3x^2$ + 4m

a. Chứng minh đồ thị hàm số luôn có 2 cực trị.

b. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m = 1

Bài 9. ***<u>(ĐH-B- 2007)</u>*** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m =1

b. Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu và các điểm cực trị cách đều điểm O.

Bài 10. ***<u>(ĐH - D - 2004)</u>*** Cho hàm số y = x^3 – $3mx^2$ + 9x + 1

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 2

b. Tìm m để nghiệm của phương trình y''= 0 thuộc đường thẳng y = x+ 1

Bài 11. Cho hàm số y = (x -1)(x^2 + mx + m)

a. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

b. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m= 4

Bài 12. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m =2

b. Với giá trị nào của m hàm số có cực đại, cực tiểu.

Bài 13. (ĐH 2006- D) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Gọi d là đường thẳng qua điểm A(3; 20) và có hệ số góc m. Tìm m để đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

(Gợi ý đường thẳng d qua M(x_0;y_0) có hệ số góc m có dạng: y = m(x - x_0) + y_0)

Bài 14. Cho hàm số y = $(x - m)^3$ - 3x

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 1

b. Tìm m để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ x = 0

Bài 15. Cho hàm số y = (x -1)(x^2 + mx + m)

a. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

b. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m= 4

Bài 16. Cho hàm số y = $x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m =1;

b. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại x = 1

Bài 17. **(Đại học quốc gia 1998 D)** Cho hàm số f(x) = $x^3 + 3x^2 - 9x + m$

1,khảo sát và vẽ đồ thị với m = 1 2,Tìm m để pt f(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 18. **(Đại học bách khoa 1999)**

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm $y = x^3 - 3x + 2$

2,Giải và biện luận theo m số nghiệm của pt

$$x^3 - 3x + 2 = 2\left(\frac{m^2+1}{m}\right)$$

Bài 19. **(Học viện quan hệ qt 2000)**

1.Ks và vẽ đồ thị của hàm số (C) $y = 4x^3 - 3x$

2,Tìm số nghiệm của pt $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$

Bài 20. **(ĐH Mỏ 1997)** Cho C_m :$y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m = 0

2,Tìm m để hàm số có CĐ và CT

Bài 21. (**HVCNBCVT-2001**) Cho hàm số $y=x^3 - 3x$ (C)

a, Khảo sát hàm số

b,CMR khi m thay đổi thì đường thẳng y = m(x+1)+2 luôn cắt đồ thị tại một điểm A cố định. Hãy xác định m để đường thẳng cắt (C) tại 3 điểm A,B,C khác nhau sao cho tiếp tuyến tại B và C vuông góc với nhau.

Bài 22. (**ĐHL-ĐHD-2001**) Cho hàm số $y= x^3 - 3(a-1)x^2 + 3a(a-1)x + 1$

a,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

b,Với giá trị nào của a thì hàm số đồng biến trên tập sao cho $1 \le |x| \le 2$.

Bài 23. (**ĐHBK-99**) Cho hàm số $y = x^3 + ax + 2$

a, Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

b, Tìm a để đồ thị cắt *Ox* tại đúng 1 điểm (*ý khác :*Tiếp xúc,cắt tại 3 điểm phân biệt).

Bài 24. **☹ĐHCĐ A 2002**.cho hàm số $y=-x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ (1)

1, Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m=1

2, Tìm k để pt $-x^3 + 3x + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

3, Viết pt đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Bài 25. **ĐHCĐ 2002 Dự bị**:

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3}$ (1) với *m* là tham số

Cho *m* =1/2

* Hãy khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

* Viết pt tiếp tuyến của đồ thị (C) biết rằng tiếp tuyến song song với (d):y=4x+2

Bài 26. **ĐHCĐ-B-2003**: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$

1,Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc toạ độ

2.Khảo sát và vẽ đồ thị khi m = 2

Bài 27. **ĐHCĐ dự bị 2003** Cho hàm số $y=(x-1)(x^2+mx+m)$ với m là tham số

1,Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục ox tại 3 điểm phân biệt

2,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 4

Bài 28. **ĐHCĐ dự bị 2003**

1,Khảo sát $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ (C)

2, Gọi d_k là đường thẳng đi qua M(0:1) và có hệ số góc bằng k.Tìm k để đường thẳng cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt.

Bài 29. **ĐHCĐ B 2004** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (1) có đồ thị (C)

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C)

2,Viết pt tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm uốn .CM hệ số góc của Δ là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C)

Bài 30. **ĐHCĐ D 2004** Cho hàm số $y=x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$ (1) Với m là tham số.

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m =2

2,Tìm m để điểm uốn của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng y=x +1

Bài 31. **ĐHCĐ D 2005** Gọi(C_m) là đồ thị hàm số

$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{3}$ (*)

1.Khảo sát và vẽ đồ thị với m= 2

2.Gọi điểm M thuộc đồ thị có hoành độ = -1,tim m sao cho tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng 5 x – y = 0

Bài 32. **CĐ SP Hà Nam A 2005** Cho hàm số

$y=x^3+mx^2-x-m$ (1) có đồ thị (C_m)

1.Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m =1

2.tìm m để đồ thị hàm số cắt trục ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng

3.Tìm các điểm mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi giá trị của m.

Bài 33. **CĐSP KT 2005** Cho hàm số $y=x^3+3x^2+4$ (1)

1,Khảo sát và vẽ đò thị hàm số

2.Chứng minh đồ thị hàm số luôn có tâm đối xứng

3,Viết pttt của đồ thị hàm số đi qua A(0:1).

Bài 34. **ĐHCĐ D 2006** Cho hàm số $y=x^3-3x+2$

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

2.Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A(3;20) có hệ số góc m.Tim m để d cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt.

Bài 35. **ĐHCĐ A 2006**

1.Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=2x^3-9x^2+12x-4$

2.Tim m để pt sau có 6 nghiệm phân biệt

$2|x|^3-9x^2+12|x|=m$.

CÁC BÀI TOÁN VỀ HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

Bài 36. (TNTHPT-2008) Cho hàm số $y=x^4-2x^2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ x = -2

Bài 37. Cho hàm số $y=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m =0

b. Với giá trị nào của m hàm số có 3 cực trị

Bài 38. Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m =1

b. Tìm m để đồ thị hàm số có ba cực trị là ba đỉnh của tam giác vuông cân.

Bài 39. (ĐH Đà Lạt - 2002)

a. Giải phương trình $x^4-2x^2+1=0$

b. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số y = x^4-2x^2+1

c. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^4-2x^2+1-m=0$

Bài 40. (ĐH Thái Nguyên - 2002) Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2$ (C_m)

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 1

b. Hãy xác định m để hàm số đồ thị hàm số có 3 cực trị

Bài 41. (ĐH Vinh - 2002)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=-x^4+5x^2-4$
2. Xác định m để phương trình $x^4-5x^2-m^2+\sqrt{3}=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 42. Cho hàm số $y=\frac{x^4}{4}-2x^2-\frac{9}{4}$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b. Biện luận theo k số giao điểm của (C) với đồ thị (P) của hàm số $y=k-2x^2$

Bài 43. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1

b. Xác định m để đồ thị (C_m) của hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành tại 2 điểm

Bài 44. (ĐH Cần thơ - 2002) Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2 - m$ (C_m)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 0

b. Tìm các giá trị của m để đồ thị (C_m) của hàm số chỉ có hai điểm chung với Ox

Chứng minh với mọi m tam giác có 3 đỉnh là ba cực trị là một tam giác vuông cân.

Bài 45. ***(ĐH KB 2009***) Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2. Với các giá trị nào của m, phương trỗnh $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

Bài 46. ***(ĐH KD 2009***) Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đó cho khi m = 0.

2. Tìm m để đường thẳng y = -1 cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Bài 47. ***ĐHQG TPHCM 1996*** Cho C_m : $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số ứng với m = 1,

2,Tìm m để hàm số tiếp xúc với trục hoành tại 2 điểm phân biệt

Bài 48. ***ĐH Huế 1998*** Cho C_m : $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m =1

2,CMR C_m luôn đi qua 2 điểm A B cố định.

3.Tìm m để các tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau.

Bài 49. ***Đề 122 I*** .Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 1$

Bài 50. ***ĐHNN 1999***

1,Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

2.Viết pt tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại các giao điểm của nó với trục Ox.

Bài 51. ***ĐH Huế 2000***

1,Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$

2.Tìm m để đường thẳng y = m cắt đồ thị 3 đoạn thẳng bằng nhau.

3.Tìm m để y = m cắt đồ thị hàm số tại bốn điểm phân biệt,

Bài 52. ***ĐH Y TPHCM 1998*** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$

A,Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với m = -2

B,Tìm m để đồ thị hàm số cắt ox tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Bài 53. ***ĐHNT 1994*** Cho hàm số $y = x^4 - 4mx^3 + (3-3m)x^2 + 3$

A,khảo sát và vẽ đồ thị với m =1

B,Tìm m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

Bài 54. ***ĐHSP II 1997***. Cho hàm số y= (1-m) x^4-mx^3 +2m-1

A,Khảo sát và vẽ đồ thị với m = -2

B,Tìm m để hàm số cắt ox tại 4 điểm phân biệt.

C,Tìm m để hàm số có đúng một cực trị.

D,Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu mà tổng bình phương các hoành độ bằng 27.

Bài 55. ***ĐHCĐ B 2002*** cho hàm số y= mx^4 + (m^2-9) x^2 +10

1,Ksvđt với m=1

2,Tìm m để hàm số có 3 cực trị.

Bài 56. ***ĐHCĐ dự bị.2002*** Cho hàm số y=x^4 –mx^2+ m -1

1, Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m=8.

2.Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục ox tại 4 điểm phân biệt.

Bài 57. **Đề tham khảo 2005**

1,Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số y= x^4-6 x^2+5

2.Tìm m để pt sau có 4 nghiệm x^4 -6 x^2 –$\log_2$m =0

Bài 58. Cho hàm số y= x^4-2 m^2x^2+1

1,Khảo sát và vẽ đồ thị với m=1

2.Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân.

CÁC BÀI TOÁN VỀ HÀM PHÂN THỨC BẬC 1/ BẬC 1

Bài 59. ***Đại học thương mại 1999*** cho hàm số (C): $y = \dfrac{-2x-4}{x+1}$

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

2,Giải và biện luận số giao điểm của (l) 2x-y +m=0 với (C). Khi chúng có hai giao điểm M và N. Hãy tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

Bài 60. ***Đại học an ninh 1997***

1, Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$

2, Tìm M$\in$(C) để tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất.

Bài 61. ***Đại học ngoại thương tp.HCM 1997***

1, Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$

2, Tìm M$\in$(C) để tổng khoảng cách từ M đến 2 trục toạ độ là nhỏ nhất.

Bài 62. ***[38 III]***

1,Khảo sát và vẽ đồ thị (C) $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$

2,CMR đường thẳng y=-x+m luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B.Tìm m để AB đạt giá trị nhỏ nhất.

3,Tìm m để phương trình $\frac{2\sin x+1}{\sin x+2}=m$ có đúng 2 nghiệm

$x\in[0;\Pi]$

Bài 63. ***[40 I]*** Cho (C_m) $y=\frac{(m+1)x+m}{x+m}$

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số ứng với m=1

2.Tìm M $\in(C)$ để tổng khoảng cách đến 2 đường tiệm cận nhỏ nhất.

3.CMR $\forall m\neq 0$ đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Bài 64. ***[ĐHQG.TP.HCM1997]***

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$

2,Tìm M$\in(C)$ với x_M=m.Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B .Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận .CMR M là trung điểm của AB và diện tích tam giác (IAB) không đổi $\forall m$.

Bài 65. ***Đại học quốc gia 1997 D***

1,Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{3x-1}{x-3}$

2,Tìm Max y và Min y = ?

Bài 66. ***Đại học Thái Nguyên 1997 D***

1,Khảo sát và vẽ đồ thị (C)hàm số $y=\frac{3x+2}{x-1}$

2,Tìm trên (C) các điểm có toạ độ nguyên.

3.CMR không tồn tại tiếp tuyến của đồ thị đi qua giao điểm của 2 đường tiệm cận.

Bài 67. ***Đại học cảnh sát 1997***

1,Khảo sát,vẽ $y=\frac{3x+2}{x+2}$

2,Viết pt tiếp tuyến với hệ số góc =4.Tìm tiếp điểm.

Bài 68. ***Đại học quốc gia 1998***.

1.Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$

2.Tìm trên oy các điểm kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị

.

Bài 69. ***[CĐSP-TP.HCM 1998]***

1,Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$

2,CMR đường thẳng 2x-y+m=0 luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A,B nằm về 2nhánh của đồ thị.

3,Tìm m sao cho AB nhỏ nhất.

MỤC LỤC