CHUYÊN ĐỀ LỚP 11

CHỦ ĐỀ: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa:

a) ***Định nghĩa 1:*** Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

b) ***Định nghĩa 2:*** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là a hay (u_n) dần tới a khi n dần tới vô cực ($n \to +\infty$), nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a)=0$. Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

❖ ***Chú ý:*** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\lim(u_n)$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt.

a) $\lim\frac{1}{n}=0$, $\lim\frac{1}{n^k}=0$, $n\in\mathbb{N}^*_+$

b) $\lim(q^n)=0$ với $|q|<1$.

c) Lim(u_n)=c (c là hằng số) => Lim(u_n)=limc=c.

3. Một số định lý về giới hạn của dãy số.

a) ***Định lý 1:*** Cho dãy số (u_n),(v_n) và (w_n) có : $v_n \le u_n \le w_n \ \forall n\in\mathbb{N}^*$ và $\lim(v_n)=\lim(w_n)=a \Rightarrow \lim(u_n)=a$.

b) ***Định lý 2:*** Nếu lim(u_n)=a , lim(v_n)=b thì:

$$\lim(u_n \pm v_n)=\lim(u_n)\pm\lim(v_n)=a\pm b$$

$$\lim(u_n.v_n)=\lim u_n.\lim v_n=a.b$$

$$\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim(u_n)}{\lim(v_n)}=\frac{a}{b} \ ,\left(v_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*;b\neq 0\right)$$

$$\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{\lim(u_n)}=\sqrt{a}\ ,(u_n\ge 0\ ,a\ge 0)$$

4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội q ,với $|q|<1$.

$$\lim S_n=\lim\frac{u_1}{1-q}$$

5. Dãy số dần tới vô cực:

a) Ta nói dãy số (u_n) dần tới vô cực $(u_n \to +\infty)$ khi n dần tới vơ cực $(n\to+\infty)$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kỳ, kể từ số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: lim(u_n)=$+\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n\to+\infty$.

b) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n\to+\infty$ nếu $\lim(-u_n)=+\infty$.Ký hiệu: lim(u_n)=$-\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n\to+\infty$.

c) Định lý:

- Nếu : $\lim(u_n)=0$ $\left(u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ thì $\lim \frac{1}{u_n}=\infty$
- Nếu : $\lim(u_n)=\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n}=0$

B. **PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**.

1. **Giới hạn của dãy số (u_n) với** $u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}$ **với P,Q là các đa thức:**

- Nếu bậc P = bậc Q = k, hệ số cao nhất của P là a_0, hệ số cao nhất của Q là b_0 thì chia tử số và mẫu số cho n^k để đi đến kết quả : $\lim(u_n)=\frac{a_0}{b_0}$.
- Nếu bậc P nhỏ hơn bậc Q = k, thì chia tử và mẫu cho n^k để đi đến kết quả :$\lim(u_n)=0$.
- Nếu k = bậc P > bậc Q, chia tử và mẫu cho n^k để đi đến kết quả :$\lim(u_n)=\infty$.

2. **Giới hạn của dãy số dạng:** $u_n=\frac{f(n)}{g(n)}$ **, f và g là các biển thức chứa căn.**

- Chia tử và mẫu cho n^k với k chọn thích hợp.
- Nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp.

C. **CÁC VÍ DỤ.**

1. $\lim \frac{3n^2+2n+5}{7n^2+n-8}=\lim \frac{\frac{3n^2+2n+5}{n^2}}{\frac{7n^2+n-8}{n^2}} \lim \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{7+\frac{1}{n}-\frac{8}{n^2}}=\frac{3}{7}$

2. $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+4n}{3n-2}=\lim \frac{\frac{\sqrt{n^2+1}+4n}{n}}{\frac{3n-2}{n}}=\lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+4}{3-\frac{2}{n}}=\frac{1+4}{3}=\frac{5}{3}$

3. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)=\lim \frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\lim \frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$

$$=\lim \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\lim \frac{2n+3}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1\right)}=\lim \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\boxed{\sqrt{n^2+2n+3}+n \text{ là biểu thức liên hợp của } \sqrt{n^2+2n+3}-n}$$

4. $1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{8}\right)+...+\left(-\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}+...=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=-\frac{1}{2}$ và số hạng đầu $u_1=1$.

5. $\lim\frac{n^3-2n+1}{2n^2-n+3}=\lim\frac{\frac{n^3-2n+1}{n^3}}{\frac{2n^2-n+3}{n^3}}=\lim\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=+\infty$.

6. $\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=\lim\frac{n+2-n}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$$

$$=\lim\frac{2}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=0$$

D. BÀI TẬP

1. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\frac{7n^2+n}{5n^2+2}$

b) $\lim\frac{2n+1}{n+2}$

c) $\lim\frac{3n^2+1}{n^2+4}$

d) $\lim\frac{6n^3+3n-1}{7n^3+2n}$

e) $\lim\frac{n^2+2n-4}{7n^3-2n+9}$

f) $\lim\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{4n^2-2}}$

g) $\lim\frac{\sqrt[3]{8n^3+1}}{2n-5}$

h) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-3}-n\right)$

i) $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{1+2+3+4+...+n}{n^2+3}$

b) $\lim\frac{5\sin(n)+7\cos(n)}{2n+1}$

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$

b) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$

d) $\lim\dfrac{1+a+a^2+a^3+a^4+...+a^n}{1+b+b^2+b^3+b^4+...+b^n}$ $|a|<1,\ |b|<1$

e) $\lim\dfrac{2n^3}{n^4+3n^2+2}$

f) $\lim\dfrac{n+(-1)^n}{2n^2+(-1)^{(n+1)}}$

g) $\lim\left(1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}\right)$

h) $\lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$

i) $\lim\dfrac{\left(2n\sqrt{n}+1\right)\left(\sqrt{n}+3\right)}{(n+1)(n+2)}$

j) $\lim\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

k) $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

4. Tìm tổng các cấp số nhân lùi vô hạn sau:

a) $\lim\dfrac{2n^3-11n+1}{n^2-2}$

b) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$

c) $\lim\left[n\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)\right]$

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa:**Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng K.Ta nói rằng hàm số f(x) có giới hạn là L khi x dần tới a nếu với mọi dãy số (x_n), $x_n \in K$ và $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ mà $\lim(x_n)=a$ đều có $\lim[f(x_n)]=L$.Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=L$.

2. **Một số định lý về giới hạn của hàm số:**

a) **Định lý 1:**Nếu hàm số có giới hạn bằng L thì giới hạn đó là duy nhất.

b) **Định lý 2:**Nếu các giới hạn: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=L$, $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]=M$ thì:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]\pm\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]=L\pm M$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right].\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]=L.M$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]}{\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]}=\frac{L}{M}\ ,\ M\neq 0$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]}=\sqrt{L}\ ;\ f(x)\geq 0, L\geq 0$$

c) Cho ba hàm số f(x), h(x) và g(x) xác định trên khoảng K chứa điểm a (có thể trừ điểm a), g(x)≤f(x)≤h(x) $\forall x\in K, x\neq a$ và $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}\left[h(x)\right]=L\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=L$.

3. Mở rộng khái niệm giới hạn hàm số:

a) Trong định nghĩa giới hạn hàm số , nếu với mọi dãy số (x_n), $\lim(x_n) = a$, đều có $\lim[f(x_n)]=\infty$ thì ta nói f(x) dần tới vô cực khi x dần tới a, kí hiệu: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=\infty$.

b) Nếu với mọi dãy số (x_n) , $\lim(x_n) = \infty$ đều có $\lim[f(x_n)] = L$, thì ta nói f(x) có giới hạn là L khi x dần tới vô cực, kí hiệu: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\right]=L$.

c) Trong định nghĩa giới hạn hàm số chỉ đòi hỏi với mọi dãy số (x_n), mà $x_n > a$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, thì ta nói f(x) có giới hạn về bên phải tại a, kí hiệu : $\lim\limits_{x\to a^+}\left[f(x)\right]$. Nếu chỉ đòi hỏi với mọi dãy số (x_n), $x_n < a$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì ta nói hàm số có giới hạn bên trái tại a , kí hiệu: $\lim\limits_{x\to a^-}\left[f(x)\right]$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Khi tìm giới hạn hàm số ta thường gặp các dạng sau:

1. Giới hạn của hàm số dạng: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

- Nếu f(x) , g(x) là các hàm đa thức thì có thể chia tử số , mẫu số cho (x-a) hoặc $(x-a)^2$.
- Nếu f(x) , g(x) là các biểu thức chứa căn thì nhân tử và mẫu cho các biểu thức liên hợp.

2. Giới hạn của hàm số dạng: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

- Chia tử và mẫu cho x^k với k chọn thích hợp. Chú ý rằng nếu $x\to+\infty$ thì coi như x>0, nếu $x\to-\infty$ thì coi như x<0 khi đưa x ra hoặc vào khỏi căn bậc chẵn.

3. Giới hạn của hàm số dạng: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x).g(x)\right]\ \left(0.\infty\right)$. Ta biến đổi về dạng: $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

4. Giới hạn của hàm số dạng: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right]\ \left(\infty\text{-}\infty\right)$

- Đưa về dạng: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}$

C. CÁC VÍ DỤ

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\dfrac{(-2)^2-3(-2)+2}{(-2)-2}=-\dfrac{12}{4}=-3$

2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x-1)=2-1=1$.Chia tử và mẫu cho (x-2).

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{3x}-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{\left(\sqrt{3x}-3\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{3x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1-4)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{\left(3x-3^2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{3(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{3x}+3\right)}{3\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3.3}+3\right)}{3\left(\sqrt{3+1}+2\right)}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}=\infty$ (vì tử dần về 1 còn mẫu dần về 0).Cụ thể: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}=-\infty\end{cases}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^3-4x^2+5x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(2x^2+x+1\right)}{(x-1)^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x^2+x+1\right)}{(x-1)(x-2)}=\infty$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2x^2-x+3}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{1}=2$

7. $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=-1.$

10. Cho hàm số : $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3 & (x\le 1)\\ \dfrac{x+a}{x} & (x>1)\end{cases}$. Tìm a để hàm số có giới hạn khi x dần tới 1 và tìm giới hạn đó.

Giải

Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-x+3\right)=3.$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+a}{x}=a+1$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\right]=3\Leftrightarrow a+1=3\Leftrightarrow a=2$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$. Dạng $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{2x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^3+2x-1}{x^3}}{\dfrac{2x^3+1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{2}$. Dạng $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x.\sqrt[3]{x^3+1}}\right)(3x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(3x^2-x+1)}{x.\sqrt[3]{x^3+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2(3x^2-x+1)}{x^2}}{\dfrac{x.\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\left(3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}}=\dfrac{6}{1}=6$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+3}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+3-x^2}{\sqrt{x^2+x+3}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x+3}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}+x}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$. Dạng $(\infty-\infty)$.

D. BÀI TẬP.

1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(x^3+4x^2+10)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-7x)$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5}{x+5}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}$

h) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x^2-3x-3}}{x+2}$

2. Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x-1}}{3x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3-x^2-x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^6-5x^5+x}{(1-x)^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2-2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2.(7x+2)^2}{(2x+1)^4}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+1)(5x+3)}{(2x^3-1)(x+1)}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(2x)+2\cos(x)}{x^2+x+1}$.

4. Tìm giới hạn bên phải, bên trái của hàm số f(x) tại x=x₀ và xét xem $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]$ có tồn tại không trong các trường hợp sau:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x} & (x>1)\\ 5x+3 & (x\le 1)\end{cases}$ tại $x_0 = 1$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & (x>1)\\ x^2+x+1 & (x\le 1)\end{cases}$ tại $x_0 = 1$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{x-2} & (x<2)\\ 1-2x & (x\ge 2)\end{cases}$ tại $x_0 = 2$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}$ tại $x_0 = 1$

5. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-x+3}+x\right)$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số liên tục tại một điểm trên một khoảng:

- Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a;b). Hàm số được gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in$ (a;b) nếu: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]=f(x_0)$.Điểm x_0 tại đó f(x) không liên tục gọi là điểm gián đoạn của hàm số.
- f(x) xác định trên khoảng (a;b) liên tục tại điểm $x_0 \in$ (a;b) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]=f(x_0)$.
- f(x) xác định trên khoảng (a;b) được gọi là liên tục trên khoảng (a;b) nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng ấy.
- f(x) xác định trên khoảng [a;b] được gọi là liên tục trên khoảng [a;b] nếu nó liên tục trên khoảng (a;b) và $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\left[f(x)\right]=f(a)\\ \lim\limits_{x\to b^-}\left[f(x)\right]=f(b)\end{cases}$

2. Một số định lý về hàm số liên tục:

- **Định lý 1:** f(x) và g(x) liên tục tại x_0 thì: $f(x)\pm g(x)$, $f(x).g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x)\neq 0\right)$ cũng liên tục tại x_0 .
- **Định lý 2:** Các hàm đa thức, hàm hữu tỷ, hàm lượng giác liên tục trên tập xác định của chúng.
- **Định lý 3:** f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì nó đạt GTLN, GTNN và mọi giá trị trung giữa GTLN và GTNN trên đoạn đó.
    - Hệ quả: Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f(a).f(b)<0 thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in$(a;b) sao cho f(c) = 0 . Tức là có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (a;b).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

1. Xét tính liên tục của hàm số dạng: $f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\neq x_0)\\ a & (x=x_0)\end{cases}$

- Tìm $\lim\limits_{x\to x_0}\left[g(x)\right]$.Hàm số liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left[g(x)\right]=a$.

2. **Xét tính liên tục của hàm số dạng:** $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x<x_0) \\ a & (x=x_0) \\ h(x) & (x>x_0) \end{cases}$

- Tìm : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[g(x)\right] \\ \lim\limits_{x\to x_0^+}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[g(x)\right] \\ f(x_0) \end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x = x_0$

  $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[f(x)\right]=f(x_0)=a.$

3. **Chứng minh phương trình f(x) = 0 có nghiệm trong khoảng (a;b).**
- Chứng tỏ f(x) liên tục trên đoạn [a;b].
- Chứng tỏ f(a).f(b)<0

  Khi đó f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm thuộc (a;b).

  Nếu chưa có (a;b) thì ta cần tính các giá trị f(x) để tìm a và b. Muốn chứng minh f(x)=0 có hai , ba nghiệm thì ta tìm hai , ba khoảng rời nhau và trên mỗi khoảng f(x)=0 đều có nghiệm.

C. CÁC VÍ DỤ.

1. **Cho hàm số:** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$ **a là hằng số. Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 1$.**

Giải

Hàm số xác định với mọi x thuộc R.

Ta có f(1) = a.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

Nếu a=2 thì hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

Nếu $a\neq 2$ thì hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$.

2. **Cho hàm số:** $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x>0) \\ x & (x\leq 0) \end{cases}$. **Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 0$.**

Giải

Hàm số xác định với mọi x thuộc R.

Ta có f(0) = 0

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+1\right)=1 \neq 0=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}x$.

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0 = 0$.

3. **Cho hàm số:** $f(x)=\begin{cases} ax+2 & (x\geq 1) \\ x^2+x-1 & (x<1)\end{cases}$ **. Xét tính liên tục của hàm số trên toàn trục số.**

Giải

$x>1$ ta có $f(x) = ax +2$ hàm số liên tục.
$x<1$ ta có $f(x) = x^2+x-1$ hàm số liên tục.
Khi $x = 1$:
Ta có $f(1) = a+2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+2)=a+2$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x-1\right)=1$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ nếu $a = -1$.
Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$ nếu $a \neq -1$.

Vậy hàm số liên tục trên toàn trục số nếu $a = -1$.Hàm số liên tục trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ nếu $a \neq -1$.

D. BÀI TẬP

1. **Xét xem các hàm số sau có liên tục tại mọi x không, nếu chúng không liên tục thì chỉ ra các điểm gián đoạn.**

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

b) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-3x+2}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & (x\neq 4)\\ 8 & (x=4)\end{cases}$

2. **Cho hàm số:** $f(x)=\begin{cases} ax^2 & (x\leq 2)\\ 3 & (x>2)\end{cases}$ **a là hằng số . Tìm a để f(x) liên tục tại mọi x, khi đó hãy vẽ đồ thị của hàm số.**

3. **Chứng minh rằng phương trình:**

a) $3x^2+2x-2=0$ có ít nhất một nghiệm
b) $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1;1)$.
c) $x^3-3x+1=0$ có ba nghiệm phân biệt.
d) $x^4-x-3=0$ có một nghiệm thuộc $(1;2)$.
e) $2x^3-6x+1=0$ có ba nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$.

4. **Xác định a để các hàm số sau liên tục trên R:**

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}}{x-2} & (x>2)\\ ax+\dfrac{1}{4} & (x\le 2)\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ x+a & (x\ge 0)\end{cases}$

5. Xét tính liên tục tại x_0 của các hàm số f(x) trong các trường hợp sau:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & (x\neq 2)\\ 1 & (x=2)\end{cases}$ tại $x_0 = 2$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & (x\neq 1)\\ 4 & (x=1)\end{cases}$ tại $x_0 = 1$.

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)} & (x^2-3x\neq 0)\\ a & (x=0)\\ b & (x=3)\end{cases}$ tại ại $x_0 = 0$ và tại $x_0 = 3$.