

CHUYÊN ĐỀ LƯỢNG GIÁC LƯỢNG GIÁC

I. CÔNG THỨC

I. 1. Công thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}, a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan a \cdot \cot a = 1, a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \qquad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}, a \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

I. 2. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

a. Cung đối: α và $-\alpha$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \qquad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \qquad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

b. Cung bù: α và $\pi - \alpha$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \qquad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \qquad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

c. Cung phụ: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

d. Cung hơn kém π : α và $(\alpha + \pi)$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha \qquad \tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha \qquad \cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$$

Chú ý: *cos đối, sin bù, phụ chéo, hơn kém π tan và cot*

I. 3. Công thức cộng

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Chú ý: *sin bằng sin.cos, cos.sin; cos bằng cos.cos, sin.sin giữa trừ; tan bằng tan tổng chia 1 trừ tích tan.*

I. 4. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

I. 5. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

I. 6. Công thức tính theo $t = \tan \frac{\alpha}{2}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2} \quad \left(\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

I. 7. Công thức nhân ba

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \quad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \quad \tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$$

I. 8. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\begin{aligned} \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} & \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} & \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \tan a + \tan b &= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b} \left(a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) & \tan a - \tan b &= \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} \left(a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \end{aligned}$$

I. 9. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} \cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)] \end{aligned}$$

I. 10. Bảng giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

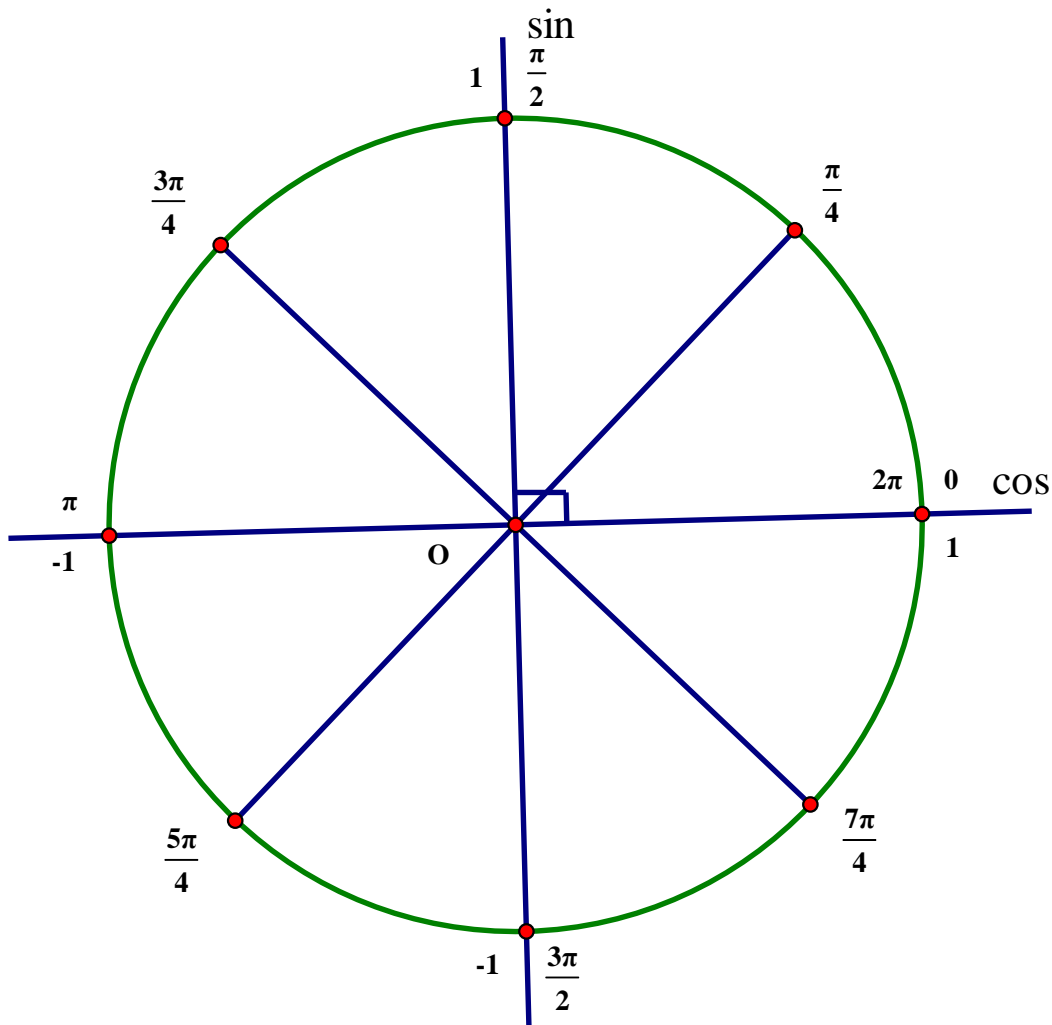
Cung	$0^0 (0)$	$30^0 \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^0 \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^0 \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^0 \left(\frac{\pi}{2}\right)$	$120^0 \left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$135^0 \left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$150^0 \left(\frac{5\pi}{6}\right)$	$180^0 (\pi)$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	

Chú ý:

- $\sin \alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$ với $\alpha = 0^0; 30^0; 45^0; 60^0; 90^0$ ứng với $n=0; 1; 2; 3; 4$.

- Công thức đổi từ độ sang radian và ngược lại: $\frac{a^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$

I. 11. Đường tròn lượng giác



II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

II. 1. Phương trình lượng giác cơ bản:

II.1.1. Phương trình $\sin x = a$

⊕ $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm

⊕ $|a| \leq 1$

$$\bullet \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\bullet \sin x = \sin \beta^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^0 + k360^0 \\ x = 180^0 - \beta^0 + k360^0 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\bullet \sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Tổng quát: $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

* Các trường hợp đặc biệt

⊕ $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

⊕ $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

⊕ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \sin \frac{\pi}{12}$

b) $\sin 2x = -\sin 36^0$

c) $\sin 3x = \frac{1}{2}$

d) $\sin x = \frac{2}{3}$

Giải

$$a) \sin x = \sin \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \sin 2x = -\sin 36^0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-36^0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -36^0 + k360^0 \\ 2x = 180^0 - (-36^0) + k360^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -36^0 + k360^0 \\ 2x = 216^0 + k360^0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -18^0 + k180^0 \\ x = 108^0 + k180^0 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$c) \sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$d) \sin x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

II.1.2. Phương trình $\cos x = a$

⊕ $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm

⊕ $|a| \leq 1$

- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = \cos \beta^0 \Leftrightarrow x = \pm \beta^0 + k360^0 (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Tổng quát: $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

* Các trường hợp đặc biệt

- ⊕ $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
- ⊕ $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
- ⊕ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

$$a) \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \qquad b) \cos(x + 45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad c) \cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad d) \cos x = \frac{3}{4}$$

Giải

$$a) \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \cos(x + 45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x + 45^0) = \cos 45^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 45^0 = 45^0 + k360^0 \\ x + 45^0 = -45^0 + k360^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45^0 + k360^0 \\ x = -90^0 + k360^0 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$c) \cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 4x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$d) \cos x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{3}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

II.1.3. Phương trình $\tan x = a$

- ⊕ $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- ⊕ $\tan x = \tan \beta^0 \Leftrightarrow x = \beta^0 + k180^0 (k \in \mathbb{Z})$
- ⊕ $\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Tổng quát: $\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

$$a) \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \qquad b) \tan 4x = -\frac{1}{3} \qquad c) \tan(4x - 20^0) = \sqrt{3}$$

Giải

$$a) \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \tan 4x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 4x = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + k\frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$c) \tan(4x - 20^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(4x - 20^\circ) = \tan 60^\circ \Leftrightarrow 4x - 20^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow 4x = 80^\circ + k180^\circ \\ \Leftrightarrow x = 20^\circ + k45^\circ, (k \in \mathbb{Z})$$

II.1.4. Phương trình $\cot x = a$

$$\oplus \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\oplus \cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\oplus \cot x = a \Leftrightarrow x = \arccot a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Tổng quát: $\cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

$$a) \cot 3x = \cot \frac{3\pi}{7}$$

$$b) \cot 4x = -3$$

$$c) \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Giải

$$a) \cot 3x = \cot \frac{3\pi}{7} \Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \cot 4x = -3 \Leftrightarrow 4x = \arctan(-3) + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\arctan(-3) + k\frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$c) \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

Bài tập đề nghị:

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$1) \sin(2x-1) = \sin(3x+1)$$

$$2) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$3) \tan(2x+3) = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$4) \cot(45^\circ - x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$5) \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$6) \cos(2x+25^\circ) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$7) \sin 3x = \sin x$$

$$8) \cot(4x+2) = -\sqrt{3}$$

$$9) \tan(x+15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$10) \sin(8x+60^\circ) + \sin 2x = 0$$

$$11) \cos \frac{x}{2} = -\cos(2x-30^\circ)$$

$$12) \sin x - \cos 2x = 0$$

$$13) \tan x = \cot\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$14) \sin 2x = \cos 3x$$

$$15) \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$16) \sin 4x = -\cos x$$

$$17) \sin 5x = -\sin 2x$$

$$18) \sin^2 2x = \sin^2 3x$$

$$19) \tan(3x+2) + \cot 2x = 0$$

$$20) \sin 4x + \cos 5x = 0$$

$$21) 2\sin x + \sqrt{2}\sin 2x = 0$$

$$22) \sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

$$23) \sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 6x \cdot \cos 2x$$

$$24) \cos x - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$25) \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cot(5x - \pi) = 1$$

$$26) \tan 5x \cdot \tan 3x = 1$$

$$27) \sin\left(\frac{\pi}{4} \cos x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$28) \tan\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + 1)\right] = 1$$

Bài 2: Tìm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho: $\tan(3x+2) = \sqrt{3}$.

Bài 3: Tìm $x \in (0; 3\pi)$ sao cho: $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$18) \sin^2 2x = \sin^2 3x \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 + \cos 6x}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = -\cos 6x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 6x)$$

.....

$$22) \sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 6x$$

.....

$$23) \sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 6x \cdot \cos 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 8x) = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 8x) \Leftrightarrow \sin 2x = \sin 4x$$

....

$$24) \cos x - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x - (1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

....

$$25) \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cot(5x - \pi) = 1 \quad (25)$$

Vì $\tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ hoặc $\cot(5x - \pi) = 0$ không là nghiệm của pt (25) nên ta có:

$$\tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cot(5x - \pi) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cot(5x - \pi)} \Leftrightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan(5x - \pi)$$

...

$$26) \tan 5x \cdot \tan 3x = 1 \quad (26)$$

Vì $\tan 5x = 0$ hoặc $\tan 3x = 0$ không là nghiệm của pt (26) nên ta có:

$$\tan 5x \cdot \tan 3x = 1 \Leftrightarrow \tan 5x = \frac{1}{\tan 3x} \Leftrightarrow \tan 5x = \cot 3x \Leftrightarrow \tan 5x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

....

II.2. Một số phương trình lượng giác thường gặp:

II.2.1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác:

II.2.1.1. Định nghĩa: phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng $at + b = 0$ trong đó a, b là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một trong các hàm số lượng giác.

Ví dụ: $2 \sin x - 1 = 0$; $\cos 2x + \frac{1}{2} = 0$; $3 \tan x - 1 = 0$; $\sqrt{3} \cot x + 1 = 0$

II.2.1.2. Phương pháp:

Đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

Giải

$$a) \quad 2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \quad \cos 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$c) \quad 3 \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \arctan \frac{1}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$d) \quad \sqrt{3} \cot x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

II.2.1.3. Phương trình đưa về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác:

Ví dụ: Giải phương trình sau: $2 \cos x - \sin 2x = 0$

Giải

$$\cos x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - 2 \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Bài tập đề nghị: Giải các phương trình sau:

29) $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$

30) $\sqrt{3} \tan 3x - 3 = 0$

II.2.2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác:

II.2.2.1. Định nghĩa: Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng $at^2 + bt + c = 0$, trong đó a, b, c là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một trong các hàm số lượng giác.

Ví dụ:

- a) $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$ là phương trình bậc hai đối với $\sin x$.
- b) $\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$ là phương trình bậc hai đối với $\cos 2x$.
- c) $2\tan^2 x - \tan x - 3 = 0$ là phương trình bậc hai đối với $\tan x$.
- d) $3\cot^2 3x - 2\sqrt{3}\cot 3x + 3 = 0$ là phương trình bậc hai đối với $\cot 3x$.

II.2.2.2. Phương pháp: Đặt ẩn phụ t là một trong các hàm số lượng giác đưa về phương trình bậc hai theo t giải tìm t , đưa về phương trình lượng giác cơ bản (chú ý điều kiện $-1 \leq t \leq 1$ nếu đặt t bằng sin hoặc cos).

Giải

a) $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0(1)$

Đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \leq 1$. Phương trình (1) trở thành:

$$2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhân)} \\ t = \frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t=1$, ta được $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0(2)$

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \leq 1$. Phương trình (2) trở thành:

$$t^2 + 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \text{ (nhân)} \\ t = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ ta được $\cos x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Các câu còn lại giải tương tự

II.2.2.3. Phương trình đưa về phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác:

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a) $3\sin^2 x + 7\cos 2x - 3 = 0$

b) $7\tan x - 4\cot x = 12$

Giải

a) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(1 - \cos^2 2x) + 7\cos 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 2x - 7\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(3\cos 2x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 3\cos 2x - 7 = 0 \end{cases}$

*) Giải phương trình: $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

*) Giải phương trình: $3\cos 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{7}{3}$

Vì $\frac{7}{3} > 1$ nên phương trình $3\cos 2x - 7 = 0$ vô nghiệm.

Kết luận: vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

b) $7 \tan x - 4 \cot x = 12 \quad (1)$

Điều kiện: $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 7 \tan x - 4 \cdot \frac{1}{\tan x} - 12 = 0 \Leftrightarrow 7 \tan^2 x - 12 \tan x - 4 = 0$$

Đặt $t = \tan x$, ta giải phương trình bậc hai theo t: $7t^2 - 4t - 12 = 0$

Bài tập đề nghị: Giải các phương trình sau:

31) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

32) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$

33) $2 \cos 2x - 4 \cos x = 1$

34) $2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$

35) $2 \cos 2x + 2 \cos x - \sqrt{2} = 0$

36) $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 2 = 0$

37) $\sqrt{3} \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x = 0$

38) $24 \sin^2 x + 14 \cos x - 21 = 0$

39) $\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$

40) $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} - 1) \cos x + \sqrt{3} = 0$

II.2.3. Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$:

II.2.3.1. Định nghĩa: Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x = d$ ($a, b, c \neq 0$)

II.2.3.2. Phương pháp:

⊕ Kiểm tra $\cos x = 0$ có là nghiệm không, nếu có thì nhận nghiệm này.

⊕ $\cos x \neq 0$ chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ đưa về phương trình bậc hai theo $\tan x$:

$$(a - d) \tan^2 x + b \tan x + c - d = 0$$

Ví dụ: Giải phương trình sau

Bài tập đề nghị:

41) $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2$

42) $2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \sin 2x - 4 \sin^2 x = -4$

43) $25 \sin^2 x + 15 \sin 2x + 9 \cos^2 x = 25$

44) $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$

45) $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x = 0$

46) $4 \sin^2 x - 6 \cos^2 x = 0$

II.2.4. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$:

II.2.4.1. Định nghĩa: Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng $a \sin x + b \cos x = c$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$

Ví dụ: $\sin x + \cos x = 1; \quad 3 \cos 2x - 4 \sin 2x = 1;$

II.2.4.2. Phương pháp: Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• Nếu $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| > 1$: Phương trình vô nghiệm.

• Nếu $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$ thì đặt $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\text{(hoặc } \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{)}$$

Đưa phương trình về dạng: $\sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (hoặc $\cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$) sau đó giải phương trình lượng giác cơ bản.

Chú ý: Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$ có nghiệm khi $c^2 \leq a^2 + b^2$.

Giải

Ví dụ: giải các phương trình sau:

a) $\sin x + \cos x = 1$;

b) $3 \cos 2x - 4 \sin 2x = 1$;

Bài tập đề nghị: Giải các phương trình sau:

47) $2 \sin x - 2 \cos x = \sqrt{2}$

48) $3 \sin x + 4 \cos x = 5$

49) $3 \sin(x+1) + 4 \cos(x+1) = 5$

50) $3 \cos x + 4 \sin x = -5$

51) $2 \sin 2x - 2 \cos 2x = \sqrt{2}$

52) $5 \sin 2x - 6 \cos^2 x = 13; (*)$

53) $\sin^4 x + \cos^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} (*)$

54) $\sin x = \sqrt{3} \cos x$

III. BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau:

55. $\sin 2x = \frac{1}{2}$

56. $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

57. $\tan(x+30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

58. $\cot\left(\frac{\pi}{8} - 5x\right) = \frac{1}{5}$

59. $\sin 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

60. $\cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$

61. $\cos(2x+20^\circ) = \sin(60^\circ - x)$

62. $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

63. $\tan^2 5x = \frac{1}{3}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

64. $2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$

65. $\cos^2 2x - \cos 2x = 0$

66. $(\tan x + 1) \cos x = 0$

67. $2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0$

68. $4 \sin^2 x + 4 \cos x - 1 = 0$

69. $\tan x + 2 \cot x - 3 = 0$

70. $2 \cot^4 x - 6 \cot^2 x + 4 = 0$

71. $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos x - 2$

72. $(1 - \cos 4x) \sin 4x = \sqrt{2} \sin^2 2x (*)$

73. $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

74. $\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1$

75. $\sin^2 2x + \sin 4x - 2 \cos^2 2x = \frac{1}{2}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

76. $3 \sin x + 4 \cos x = 5$

77. $2 \sin 2x - 2 \cos 2x = -\sqrt{2}$

78. $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$

79. $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

80. $\cos 2x + 9 \cos x + 5 = 0$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

81) $\sin 6x + \sqrt{3} \cos 6x = \sqrt{2}$

- 82) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$
 83) $3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$
 84) $5 \cos 2x - 12 \sin 2x = 13$
 85) $\sin^2 x + \sin 2x = \frac{1}{2}$
 86) $\cos^2 x - \sin x = 2$
 87) $4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4$
 88) $24 \sin^2 x + 14 \cos x - 21 = 0$
 89) $\tan\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + \cot\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + 3 = 0$
 90) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$
 91) $3 \sin^2 x + 8 \sin x \cos x + (8\sqrt{3} - 9) \cos^2 x = 0$
 92) $2 \sin 3x + \sqrt{2} \sin 6x = 0$
 93) $3 \cos^2 x - 5 \sin^2 x = 1$
 94) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$
 95) $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} - 1) \cos x + \sqrt{3} = 0$
 96) $\sin^2 x - 10 \sin x \cos x + 21 \cos^2 x = 0$
 97) $\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2} \sin 2x = 1$
 98) $\cos 4x + \sin 3x \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos 3x$
 99) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$

Dành cho HS khá – giỏi

100) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 3x$

101) $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$

HD:

$$\tan x + \tan 2x = \tan 3x \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \Leftrightarrow \sin 3x \left(\frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} - \frac{1}{\cos 3x} \right) = 0$$

Giải phương trình

$$\frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} - \frac{1}{\cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x - \cos x \cdot \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - \cos x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x - 2\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos^2 x - 1) = 0$$

...

102) $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$

103) $(1 - \cos 2x)\sin 2x = \sin^2 x$

Hướng dẫn:

$$(1 - \cos 2x)\sin 2x = \sin^2 x$$

104) $\cos x(1 - \tan x)(\sin x + \cos x) = \sin x$

105) $\cot x - \tan x = \sin x + \cos x$

Hướng dẫn

$$\cot x - \tan x = \sin x + \cos x, \text{ (điều kiện } \sin x \neq 0 \text{ và } \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\sin x + \cos x)\sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0(91a) \\ \cos x - \sin x - \sin x \cos x = 0(91b) \end{cases}$$

HD giải pt 91b):

$$\cos x - \sin x - \sin x \cos x = 0$$

$$\text{Đặt } t = \cos x - \sin x \Rightarrow t^2 = (\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow -\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Thay vào phương trình, ta được:

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 - \sqrt{2} \vee t = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Ta giải 2 phương trình: } \cos x - \sin x = -1 - \sqrt{2}; \cos x - \sin x = -1 + \sqrt{2}$$

106) $\sin^2 2x - 2\cos^2 x + \frac{3}{4} = 0$

HD: $\sin^2 2x - 2\cos^2 x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x - (1 + \cos 2x) + \frac{3}{4} = 0$

Giải phương trình bậc hai đối với hàm số $\cos 2x$

107) $2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$

HD:

$$2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 17x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 17x + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right) = 0$$

...

108) $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$

109) $\tan(2x + 45^\circ) \cdot \tan\left(180^\circ - \frac{x}{2}\right) = 1$

200) $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$

b) $\cos 2x + \sin x + \cos x = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

52) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13; (*)$

$\Leftrightarrow 5\sin 2x - 3(1 + \cos 2x) = 13$

$\Leftrightarrow \sin 2x - 3\cos 2x = 16$

.....

53) $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left[\frac{1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + (1 - \sin 2x)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x = 1$

$\Leftrightarrow 1 - \cos 2x - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin\frac{\pi}{4}$

...

72) $(1 - \cos 4x)\sin 4x = \sqrt{2}\sin^2 2x$

$(1 - \cos 4x)\sin 4x = \sqrt{2}\sin^2 2x$

\Leftrightarrow

$$85) \sin^2 x + \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = 0$$

...

$$87) \cos x + \sqrt{3} \sin x = \cos 3x$$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = \cos 3x$$

BÀI TẬP BỔ SUNG:

Giải các phương trình sau:

$$201) \cos 5x \sin 4x = \cos 3x \sin 2x$$

$$202) \cos^2 x + \cos^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$203) \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

$$204) \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$$

$$205) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1 (*)$$

$$206) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x\right) = 2\sin^3\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) (*) \text{ (hay)}$$

$$HD: t = \frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x = 3t - 2\pi \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x\right) = \sin 3t$$

$$207) \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

III. ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG QUA CÁC NĂM

$$1) \cos^2 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$$

(Khối A - 2005)

$$2) 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

(Khối B - 2005)

$$3) \cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$$

(Khối D - 2005)

$$4) \frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$$

(Khối A - 2006)

$$5) \cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) = 4$$

(Khối B - 2006)

$$6) \cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$$

(Khối D - 2006)

$$7) (1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$$

(Khối A - 2007)

$$8) 2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$$

(Khối B - 2007)

$$9) \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$$

(Khối D - 2007)

$$10) \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) \quad (\text{Khối A - 2008})$$

$$11) \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x \quad (\text{Khối B - 2008})$$

$$12) 2 \sin x (1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x \quad (\text{Khối D - 2008})$$

$$13) \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3} \quad (\text{Khối A - 2009})$$

$$14) \sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x) \quad (\text{Khối B - 2009})$$

$$15) \sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0 \quad (\text{Khối D - 2009})$$

$$16) \frac{1 + \sin x + \cos 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \quad (\text{Khối A - 2010})$$

$$17) (\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0 \quad (\text{Khối B - 2010})$$

$$18) \sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0 \quad (\text{Khối D - 2010})$$

$$19) \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = 2 \sin x \cdot \sin 2x \quad (\text{Khối A - 2011})$$

$$20) \sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x \quad (\text{Khối B - 2011})$$

$$21) \frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0 \quad (\text{Khối D - 2011})$$

$$22) \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1 \quad (\text{Khối A và } A_1 - 2012)$$

$$23) 2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1 \quad (\text{Khối B - 2012})$$

$$24) \sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x \quad (\text{Khối D - 2012})$$