

**CHUYÊN ĐỀ ĐẠO HÀM**

**1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm**

- Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a; b)$  và  $x_0 \in (a; b)$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$(\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))$$

- Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại  $x_0$  thì nó liên tục tại điểm đó.

**2. Ý nghĩa của đạo hàm**

- **Ý nghĩa hình học:**

+  $f'(x_0)$  là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại  $M(x_0; f(x_0))$ .

+ Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại  $M(x_0; f(x_0))$  là:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- **Ý nghĩa vật lí:**

+ Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s = s(t)$  tại thời điểm  $t_0$  là  $v(t_0) = s'(t_0)$ .

+ Cường độ tức thời của điện lượng  $Q = Q(t)$  tại thời điểm  $t_0$  là  $I(t_0) = Q'(t_0)$ .

**3. Quy tắc tính đạo hàm**

$$(C)' = 0 \qquad (x)' = 1 \qquad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (uv)' = u'v + v'u \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$(ku)' = ku' \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

• Đạo hàm của hàm số hợp: Nếu  $u = g(x)$  có đạo hàm tại  $x$  là  $u'_x$  và hàm số  $y = f(u)$  có đạo hàm tại  $u$  là  $y'_u$  thì hàm số hợp  $y = f(g(x))$  có đạo hàm tại  $x$  là:  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

**4. Đạo hàm của hàm số lượng giác**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1 \quad (\text{với } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0)$$

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

**5. Vi phân**

- $dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$
- $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

**6. Đạo hàm cấp cao**

$$f''(x) = [f'(x)]'; \quad f'''(x) = [f''(x)]'; \quad f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 4)$$

- **Ý nghĩa cơ học:**

Gia tốc tức thời của chuyển động  $s = f(t)$  tại thời điểm  $t_0$  là  $a(t_0) = f''(t_0)$ .

**VẤN ĐỀ 1: Tính đạo hàm bằng định nghĩa**

Để tính đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$  bằng định nghĩa ta thực hiện các bước:

Cách 1:

B1: Giả sử  $\Delta x$  là số gia của đối số tại  $x_0$ .

Tính  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

B2: Tính  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Cách 2 : Tính  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$  thì  $f'(x_0) = L$  (1)

**Quan hệ giữa tính liên tục và sự có đạo hàm**

+ Hàm số liên tục thì có thể có đạo hàm. Ta thường gặp bài toán CM hs liên tục nhưng không có đạo hàm.

+ Hàm số có đạo hàm tại  $x_0$  thì liên tục tại  $x_0$ .

Vậy hàm số không có đạo hàm khi :  $f(x)$  không liên tục tức là  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$  hoặc  $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$

**Baøi 1:** Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra:

1)  $y = f(x) = 2x^2 - x + 2$  tại  $x_0 = 1$  ĐS:  $f'(1) = 3$

2)  $y = f(x) = \sqrt{3 - 2x}$  tại  $x_0 = -3$  ĐS:  $f'(-3) = -1/3$

3)  $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  tại  $x_0 = 2$  ĐS:  $f'(2) = -3$

4)  $y = f(x) = \sin x$  tại  $x_0 = \frac{\pi}{6}$  ĐS:  $f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5)  $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$  tại  $x_0 = 1$  ĐS:  $f'(1) = 1/3$

6)  $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$  tại  $x_0 = 0$  ĐS:  $f'(0) = -2$

7)  $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-1997)$  tại  $x_0 = 0$  ĐS :  $f'(0) = -1997!$

8)  $f(x) = x(x+1)(x+2)...(x+2013)$  tại  $x_0 = -1000$  ĐS:  $f'(-1000) = 1000!.1013!$

9)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$  tại  $x_0 = 0$  ĐS:  $f'(0) = 1$

10)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$  tại  $x = 0$  ĐS:  $f'(0) = 0$

11)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$  tại điểm  $x_0 = 0$  ĐS:  $f'(0) = 0$

12)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$  tại  $x = 0$  ĐS:  $f'(0) = 1/2$

13)  $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$  tại  $x_0 = 0$  ĐS:  $f'(0) \text{ k}\exists$ . HD: tính đạo hàm trái và phải nếu bằng nhau thì

có đạo hàm tại  $x_0$ .

14)  $f(x) = x|x| + 2$  tại  $x_0 = 0$  ĐS:  $f'(0) = 0$

15)  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$  tại  $x_0 = 0$  ĐS:  $f'(0) = 1$

16)  $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$  tại  $x_0 = 0$  ĐS:  $f'(0) \text{ k}\text{đ}$ . ĐH trái khác ĐH phải.

17)  $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x < 0 \\ x^2 & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$  tại  $x_0 = 0$  ĐS:  $f'(0) = 0$

18) (ĐHHH – 1997): Chứng minh rằng hàm số  $y = \frac{x^2 - 2|x + 3|}{3x - 1}$  liên tục tại  $x = -3$  nhưng không có đạo hàm tại điểm ấy. ĐS: kxđ vì  $53/100 \neq 13/100$

19) Cho  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$  và  $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a. Xét tính liên tục của  $f(x)$ ,  $g(x)$  tại  $x=0$  ĐS: đều liên tục tại  $x=0$

b. Tính  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  tại  $x=0$ . ĐS:  $f'(0)$  kxđ;  $g'(0)=0$

20) Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  nhưng không có đạo hàm tại  $x = 0$ . ĐS: gh kẹp; giới hạn không hội tụ tới 1 số cụ thể.

21) Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$ . ĐS: Giới hạn kẹp

b) Hàm số có đạo hàm tại  $x = 0$  không? Tại sao? ĐS: vì  $\cos(a)$  luôn thuộc đoạn  $[-1;1]$  và không tiến tới một số cụ thể nào.

22) Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Tìm  $a, b$  để hàm số có đạo hàm tại  $x = 1$  ĐS:  $a=1; b=0$  HD:  $b$  1 hàm số phải liên tục tại  $x=1$ .  $b$ 2: có đạo hàm tại  $x=1$  (đạo hàm trái bằng đạo hàm phải tại  $x=1$ ).

23) Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Tìm  $a, b$  để hàm số có đạo hàm tại  $x = 0$  ĐS:  $a=6; b=0$

24) Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{khi } x \leq 3 \\ 4x - 1 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$

Tìm  $a$  để hàm số không có đạo hàm tại  $x = 3$ . ĐS :  $a \neq 2$  HD : có ĐH khi  $a=2$  vậy ngược lại sẽ không có.

25) Cho hàm số:  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ . Tìm  $a, b$  để  $f(x)$  có đạo hàm tại điểm  $x = 1$  ĐS:  $a=2; b=-1$

26) Cho hàm số:  $f(x) = \begin{cases} p \cos x + q \sin x & \text{khi } x \leq 0 \\ px + q + 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ . Chứng tỏ rằng với mọi cách chọn  $p, q$  hàm  $f(x)$

không thể có đạo hàm tại điểm  $x = 0$  ĐS: hàm số liên tục :  $p=q+1$ ; hs có ĐH thì  $p=q$ . nên kxđ đc  $p, q$ .

**Baøi 2:** Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau:

1)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

2)  $f(x) = x^3 - 2x$

3)  $f(x) = \sqrt{x+1}, (x > -1)$

4)  $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

5)  $f(x) = \sin x$

6)  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

7)  $f(x) = \cos 2x$

8)  $f(x) = \cos x$

**VẤN ĐỀ 2: Tính đạo hàm bằng công thức**

Để tính đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  bằng công thức ta sử dụng các qui tắc tính đạo hàm.

Chú ý qui tắc tính đạo hàm của hàm số hợp.

**Baøi 1:** Tính đạo hàm của các hàm số sau: (Tổng, hiệu, tích, thương)

1)  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + a^3$

2)  $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$

3)  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

4)  $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

5)  $y = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$  ĐS:  $y' = \frac{-6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$  AD:  $y = \frac{m}{x^n} \Rightarrow y' = \frac{-mn}{x^{n+1}}$  Tính:  $y = \frac{-2}{x^5}; y = \frac{1}{2x^5}; y = \frac{1}{3x}$

6)  $y = (x+1)(x+2)(x+3)$  ĐS:  $y' = 3x^2 + 12x + 11$

7)  $y = (x^3 - 2)(1 - x^2)$  ĐS:  $y' = 3x^2 - 5x^4 + 4x$

8)  $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$  ĐS:  $y' = 6x^5 - 56x^3 + 88x$

9)  $y = (x^2 + 3x)(2 - x)$  ĐS:  $y' = -3x^2 - 2x + 6$

10)  $y = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)$  ĐS:  $y' = 7x^6 - 10x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 4x + 3$

11)  $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$  ĐS:  $y = \frac{-1}{2\sqrt{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

12)  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  (ad-bc ≠ 0) AD:  $y = \frac{2x+1}{1-3x}; y = \frac{x+1}{2x-3}; y = \frac{2x-5}{x+2}; y = \frac{x+3}{2x-1}; y = \frac{3}{2x+1}$

13)  $y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q}$  AD:  $y = \frac{x^2+x+2}{x-1}; y = \frac{2x^2+3x-1}{x+2}; y = \frac{x^2-2x-2}{x-1}; y = \frac{x^2-3x-3}{x+2}$

14)  $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$  ĐS:  $y = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

18)  $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$  ĐS:  $y = \frac{2-4x}{(x^2-x+1)^2}$

15)  $y = \frac{2x^2-4x+1}{x-3}$  ĐS:  $y = \frac{2x^2-12x+11}{(x-3)^2}$

19)  $y = \frac{x^3-2x}{x^2+x+1}$  ĐS:  $y = \frac{x^4+2x^3+5x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$

16)  $y = \frac{2x}{x^2-1}$  ĐS:  $y = \frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2}$

20)  $y = \frac{2x^2}{x^2-2x-3}$  ĐS:  $y = \frac{-4x^2-12x}{(x^2-2x-3)^2}$

17)  $y = \frac{5x-3}{x^2+x+1}$  ĐS:  $y = \frac{-5x^2+6x+8}{(x^2+x+1)^2}$

**Baøi 2:** Tính đạo hàm của các hàm số sau: (Hàm số hợp:  $y=f^2 u \cdot u^x$ )

1)  $y = (x^2+x+1)^4$  ĐS:  $4(x^2+x+1)^3(2x+1)$

2)  $y = (1-2x^2)^5$  ĐS:  $-20x(1-2x^2)^4$

3)  $y = (8x-3x^2)^5$  ĐS:  $5(8-6x)(8x-3x^2)^4$

4)  $y = (3-2x^2)^4$  ĐS:  $-16x(3-2x^2)^3$

5)  $y = \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}$  ĐS:  $\frac{-2(2x-2)}{(x^2-2x+5)^3}$

6)  $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$  ĐS:  $\frac{-9}{(x-1)^2} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$

7)  $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$  ĐS:  $-\frac{x^2+4x+3}{(x-1)^4}$

**Baøi 3:** Tính đạo hàm của các hàm số sau; Tìm x để  $y'=0$

1)  $y = \sqrt{9-3x}$

2)  $y = \sqrt{3x-5}$

3)  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{-x+9}$  ĐS:  $x=5$

4)  $y = \sqrt{6-x} + \sqrt{4+x}$  ĐS:  $x=1$

- 5)  $y = x + \sqrt{4 - x^2}$  ĐS:  $x = \sqrt{2}$
- 6)  $y = -2x + 3\sqrt{x^2 + 1}$  ĐS:  $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$
- 7)  $y = 3x - \sqrt{9x^2 + 6x + 5}$  ĐS: vô nghiệm
- 8)  $y = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$  ĐS: VN
- 9)  $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$  ĐS:  $y' = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$ ; VN.
- 10)  $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$  ĐS:  $y' = 2x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ;  $y' = 0$  khi  $x = 0$
- 11)  $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$  ĐS:  $x = 5/4$
- 12)  $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$  ĐS:  $y' = 0$  khi  $x = 0$
- 13)  $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$  ĐS:  $x = -1$
- 14)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$  ĐS:  $y = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$ ; VN
- 15)  $y = (x - 1)\sqrt{x^2 + 2}$  ĐS:  $y = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}$ ;  $x = -2$
- 16)  $y = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$  ĐS:  $y = \frac{1 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ;  $x = 1/3$
- 17)  $y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$  ĐS:  $y = \frac{-x(x + 2)}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ ;  $x = 0$ ;  $x = -2$
- 18)  $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 3}$  ĐS:  $y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3}}$ , VN
- 19)  $y = \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 2}}$  ĐS:  $y = \frac{8 - x}{\sqrt{x^2 + 2}}$
- 20)  $y = \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  ĐS:  $y = \frac{3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- 21)  $y = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$  ĐS:  $y = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$
- 22)  $y = x\sqrt{1 - x^2}$  ĐS:  $y = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$
- 23)  $y = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x}$  ĐS:  $y = \frac{-4}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}$
- 24)  $y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}$  ĐS:  $y' = \frac{x^2 - 1}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{x^2 + 1}}$ ;  $x = \pm 1$
- 25)  $y = \sqrt{\frac{x^2}{x - 1}}$  ĐS:  $y' = \frac{x^2 - 2x}{2(x - 1)^2} \sqrt{\frac{x - 1}{x^2}}$ ;  $x = 2$
- 26)  $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$  ĐS:  $y = \frac{3 - x}{2\sqrt{1 - x}}$ ; VN
- 27)  $y = \sqrt{(x - 2)^3}$  ĐS:  $y = \frac{3}{2}\sqrt{(x - 2)}$

28)  $y = |x - 1|$  với  $x \neq 1$  ĐS:  $y' = -1$  với  $x < 1$ ;  $y' = 1$  với  $x > 1$

29)  $y = |x^2 - 3x + 2|$  với  $x \neq 1; x \neq 2$  ĐS:  $y' = 2x - 3$  với  $x < 1; x > 2$ ;  $y' = 3 - 2x$  với  $1 < x < 2$

**Bài 4:** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1)  $y = 5\sin x - 3\cos x$  ĐS:  $y' = 5\cos x + 3\sin x$

2)  $y = \sin 3x \cdot \cos 5x$  ĐS:  $y' = 3\cos 3x \cdot \cos 5x - 5\sin 3x \cdot \sin 5x$

3) Chứng minh rằng hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc  $x$ : HD: biến đổi rồi tính đạo hàm

a.  $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$  ĐS:  $y' = 0$

b.  $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$  ĐS:  $y = 1; y' = 0$

4)  $y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}}$  Với  $x \in (0; \pi)$  ĐS:  $y = \cos(x/8); y' = -1/8\sin(x/8)$

5)  $y = \cos^4 x + \sin^4 x$  ĐS:  $y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x; y' = -\sin 4x$

6)  $y = 8\cos^3 x \sin^3 x$  ĐS:  $y' = 6\sin^2 2x \cdot \cos 2x$

7)  $y = \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x}$  ĐS:  $y = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right); y' = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

8)  $y = \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$  ĐS:  $y = \frac{1}{\cos 2x}; y' = \frac{2\sin 2x}{\cos^2(2x)}$

9)  $y = \sqrt{\cot 2x}$  ĐS:  $y' = \frac{-1}{\sin^2 2x \sqrt{\cot 2x}}$

10)  $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$  ĐS:  $y' = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + 2\tan x}}$

11)  $y = \frac{1}{|\cos x|}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$  ĐS:  $y' = \frac{\sin x}{\cos x |\cos x|}$

12)  $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2$  ĐS:  $y' = \frac{2\sin x}{(1 + \cos x)^2}$

13)  $y = x \cdot \cos x$  ĐS:  $y' = \cos x - x \sin x$

14)  $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$  ĐS:  $y' = (2x - 3)\cos(x^2 - 3x + 2)$

15)  $y = \sin^3(2x + 1)$  ĐS:  $y' = 6\sin^2(2x + 1) \cdot \cos(2x + 1)$

16)  $y = \cos \sqrt{2x + 1}$  ĐS:  $y' = \frac{-\sin \sqrt{2x + 1}}{\sqrt{2x + 1}}$

17)  $y = \sin \sqrt{2 + x^2}$  ĐS:  $y' = \frac{x \cos \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{2 + x^2}}$

18)  $y = \sqrt{\sin x + 2x}$  ĐS:  $y' = \frac{\cos x + 2}{2\sqrt{\sin x + 2x}}$

19)  $y = \tan 2x + \frac{2}{3}\tan^3 2x + \frac{1}{5}\tan^5 2x$  ĐS:  $y' = \frac{2}{\cos^2 2x} [1 + 2\tan^2 2x + \tan^4 2x] = \frac{2}{\cos^6 2x}$

20)  $y = 2\sin^2 4x - 3\cos^3 5x$  ĐS:  $y' = 16\sin 4x \cos 4x + 45\cos^2 5x \sin 5x$

21)  $y = (2 + \sin^2 2x)^3$  ĐS:  $y' = 12(2 + \sin^2 2x)^2 \cdot \sin 2x \cos 2x$

22)  $y = \sin(\cos^2 x \tan^2 x)$  ĐS:  $y' = \sin 2x \cos(\sin^2 x)$

$$23) y = \cos^2\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right) \quad \text{ĐS: } y = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin 2\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right)$$

**Baøi 5:** a) Cho hàm số  $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ . Tính  $f'(0)$ ;  $f'(\pi)$ ;  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ;  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$  ĐS: -1; -1; 1/2;  $3\sqrt{2} - 8$

b) Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ . Chứng minh:  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$  ĐS:  $f'(x) = \frac{-8 \sin 2x}{(3 - \cos 2x)^2}$

**Baøi 6:** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

Chú ý: Tính đạo hàm rồi rút gọn cũng hay vì bậc của ẩn giảm.

+ Rút gọn rồi tính đạo hàm càng hay vì tính đạo hàm sẽ đơn giản hơn.

1)  $y = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  ĐS:  $y=1$ ;  $y'=0$

2)  $y = \cos^4 x(2\cos^2 x - 3) + \sin^4 x(2\sin^2 x - 3)$  ĐS:  $y=-1$ ;  $y'=0$

3)  $y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$  ĐS:

4)  $y = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cdot (1 + \sin x)}{\sin x}$  ;

5)  $y = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x}$

6)  $y = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos x}}}$  ,  $\left(x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$ .

**Baøi 7:** Cho hàm số  $y = x \sin x$  chứng minh :

a)  $xy - 2(y' - \sin x) + x(2\cos x - y) = 0$

b)  $\frac{y'}{\cos x} - x = \tan x$

**Baøi 8:** Cho các hàm số :  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$  ,  $g(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$  . Chứng minh :  $3f'(x) - 2g'(x) = 0$  .

**Baøi 9:** a) Cho hàm số  $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$  . Chứng minh :  $2\sqrt{1 + x^2} \cdot y' = y$  .

b) Cho hàm số  $y = \cot 2x$  . Chứng minh :  $y' + 2y^2 + 2 = 0$  .

**Baøi 10:** Giải phương trình  $y' = 0$  biết :

a)  $y = \sin 2x - 2\cos x$

b)  $y = \cos^2 x + \sin x$

c)  $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 10x$

**Baøi 11:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + mx - 4$  . Tìm  $m$  để :

a)  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt ; ĐS:  $m$  tùy ý

b)  $y'$  có thể viết được thành bình phương của nhị thức . ĐS:  $\Delta = 0$  vô nghiệm . Không có giá trị nào.

c)  $y' \geq 0$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  ; ĐS: không có giá trị nào.

d)  $y' < 0$  ,  $\forall x \in (1; 2)$  ĐS:  $m > 0$

e)  $y' > 0$  ,  $\forall x > 0$  . ĐS:  $m > 0$

**Baøi 12:** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 - mx + 3$  . Xác định  $m$  để :

a)  $y' \leq 0$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  . ĐS:  $m \geq 1/2$





b. Biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng ( $\Delta$ ):  $x - 4y + 3 = 0$ . ĐS:  $y = \frac{1}{4}x + 1$

**Baøi 4:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:  $y = \frac{x-1}{x+1}$ , biết hoành độ tiếp điểm là  $x_0 = 0$   
ĐS:  $y = 2x - 1$

**Baøi 5:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x+2}$ , biết tung độ tiếp điểm là  $y_0 = 2$ .  
ĐS:  $y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$

**Baøi 6:** Cho hàm số (C):  $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ . Viết phương trình tiếp với (C):

a) Tại điểm có hoành độ  $x_0 = 1$ . ĐS:  $y = 2$

b) Song song với đường thẳng  $4x - 2y + 5 = 0$ . ĐS:  $y = 2x - 1$

c) Vuông góc với đường thẳng  $x + 4y = 0$ . ĐS:  $y = 4x - 6$

d) Vuông góc với đường phân giác thứ nhất của góc hợp bởi các trục tọa độ. ĐS:  $y = -x + \frac{1}{4}$

**Baøi 7:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{2-x+x^2}{x-1}$  (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(2; 2)$ . ĐS:  $y = 2$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc  $k = 1$ . ĐS: Không có tiếp tuyến

**Baøi 8:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{3x+1}{1-x}$  (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $A(2; -7)$ . ĐS:  $y = 4x - 15$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành. ĐS:  $y = \frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung. ĐS:  $y = 4x + 1$

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với d:  $y = \frac{1}{4}x + 100$ .

ĐS:  $y = \frac{x}{4} - \frac{21}{4}$ ;  $y = \frac{x}{4} - \frac{5}{4}$

e) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với  $\Delta: 2x + 2y - 5 = 0$ .

ĐS:  $y = x - 8$ ;  $y = x$

**Baøi 9:** Cho hàm số (C):  $y = x^3 - 3x^2$ .

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm  $I(1, -2)$ . ĐS:  $y = -3x + 1$

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác của (C) không đi qua I. HD: CM chỉ có 1 tt đi qua I.

**Baøi 10:** Cho (C):  $y = \sqrt{1-x-x^2}$ . Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm có hoành độ  $x_0 = \frac{1}{2}$ . ĐS:  $y = -2x + \frac{3}{2}$

b) Song song với đường thẳng  $x + 2y = 0$ . ĐS:  $y = -\frac{x}{2} + 1$

**Baøi 11:** Cho hai hàm số  $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$  và  $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$ . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số đã

cho tại giao điểm của chúng. Tính góc giữa hai tiếp tuyến kể trên. ĐS:  $y = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ ;  $y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $90^\circ$

**Baøi 12:** Cho Parabol (P):  $y = x^2$ . Gọi  $M_1$  và  $M_2$  là hai điểm thuộc (P) lần lượt có hoành độ  $x_1 = -2$  và  $x_2 = 1$ . Hãy tìm trên (P) một điểm C sao cho tiếp tuyến tại C song song với cát tuyến  $M_1M_2$ . Viết phương trình tiếp tuyến đó. ĐS:  $y = x - \frac{1}{4}$

**Baøi 13:** Cho hàm số (C):  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ .

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng ( $\Delta$ ):  $3x - 5y - 4 = 0$

ĐS:  $y = -\frac{5x}{3} + \frac{29}{27}; y = -\frac{5x}{3} + \frac{61}{27}$

**Baøi 14:**Viết phương trình tiếp tuyến của Parabol  $y = x^2$ , biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm  $A(0; -1)$

ĐS:  $y = 2x - 1; y = -2x - 1$

**Baøi 15:** Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  biết:

1)  $f(x) = 3x - 4x^3$  và tiếp tuyến đi qua điểm  $A(1; 3)$  ĐS:  $y=3x; y=-24x+27$

2)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$  và tiếp tuyến đi qua điểm  $B(0; \frac{3}{2})$  ĐS:  $y = \frac{3}{2}; y = 4x + \frac{3}{2}; y = -4x + \frac{3}{2}$

3)  $f(x) = x + \frac{1}{x - 1}$  và tiếp tuyến đi qua điểm  $C(0; 3)$  ĐS:  $y = 3; y = -8x + 3$

4)  $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$  và tiếp tuyến đi qua điểm  $A(0; -5)$ . ĐS:  $y = -5; y = -8x - 5$

**Baøi 16:**Cho hàm số  $y = x + \frac{1}{x + 1}$  (C). Chứng minh rằng qua điểm  $A(1; -1)$  kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ

thị và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau. ĐS:  $x^2+3x+1=0$  có 2 nghiệm;  $k_1.k_2=-1$ .

**Baøi 17:** Tìm m để từ  $M(m; 0)$  kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = \frac{x + 2}{x - 1}$  sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của:

1) Trục Ox. ĐS: PT  $x_0^2 + 4x_0 - 3m - 2 = 0; m \in (-2; -2/3) \cup (1/3; +\infty) \setminus \{1\}$ .

2) Trục Oy: ĐS:  $m \in (-2/3; +\infty) \setminus \{1\}$ .

3) Đường thẳng  $x+y-1=0$  ĐS:  $m \in (-5/3; +\infty) \setminus \{1\}$ .

**Baøi 18:** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x-1}$  (C). Cho điểm  $A(0; a)$ . Xác định a để từ A kẻ

được hai tiếp tuyến tới (C) sao cho hai tiếp điểm thẳng hàng song song với hai

phần trục Ox. ĐS:  $-\frac{2}{3} < a \neq 1$

**Baøi 19:** Cho hàm số  $y = \cos^2 x + m \sin x$  (m là tham số) có đồ thị là (C). Tìm m trong mỗi trường hợp sau:

a. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ  $x = \pi$  có hệ số góc bằng 1. ĐS:  $m=1$

b. Tiếp tuyến của (C) tại các điểm có các hoành độ  $x = -\frac{\pi}{4}$  và  $x = \frac{5\pi}{4}$  song song hoặc trùng nhau.

ĐS:  $m = -\sqrt{2}$

**Baøi 20:** Tìm giao điểm của hai đường cong (P):  $y = x^2 - x + 1$  và (H):  $y = \frac{1}{x+1}$ . Chứng minh rằng hai đường

cong đó có tiếp tuyến chung tại giao điểm của chúng. ĐS:  $M(0; 1); tt: y = -x + 1$

**Baøi 21:**\* Cho hàm số (C):  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ . Tìm các điểm thuộc đồ thị (C) mà qua đó kẻ được một và chỉ một tiếp tuyến với đồ thị (C). ĐS:  $M(0; -2)$

**Baøi 22:** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ .

a. Chứng minh rằng trên đồ thị không tồn tại hai điểm sao cho hai tiếp tuyến tại hai điểm đó của đồ thị là vuông góc với nhau. ĐS: hệ số góc luôn dương.  $y' = 3(x+1)^2$

b. Xác định k để trên đồ thị có ít nhất một điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng  $y = kx$ .

ĐS: Pt  $y' \cdot k = -1$  có nghiệm tức là:  $3(x+1)^2 \cdot k = -1$  có nghiệm khi  $k < 0$

**Baøi 23:** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + 10x - 3$  (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. ĐS:  $y' = 3(x+1)^2 + 7$ . Hệ số góc nhỏ nhất bằng 7 khi  $x = -1$ . Tt là  $y = 7x - 4$

**Baøi 24:** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{2}{3}$  (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến có hệ số

góc lớn nhất. ĐS:  $y' = -(x-2)^2 + 4$ . Hệ số góc lớn nhất bằng 4 khi  $x = 2$ . Tt là  $y = 4x - 4$

**Bài 25:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (m+4)x + \frac{1}{3} - m$  (C). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất đi qua điểm A(3;-1). ĐS: m=-2

**Bài 26:** Cho hàm số  $y = x^3 - mx^2 + m + 1$  (1) m là tham số.  
 Tìm tham số m để đồ thị của hàm số (1) có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x=1 tiếp xúc với đường tròn (C):  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$ . ĐS: m=3; m=4/3.

**Bài 27:** Cho hàm số  $y = -x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1$  (1) m là tham số.  
 Tìm tham số m để đồ thị của hàm số (1) có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x=0 cắt đường tròn (C):  $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 10$  tại A, B phân biệt. Sao cho:

- 1) Khoảng cách từ tâm I của đường tròn (C) đến AB bằng  $\sqrt{5}$ . ĐS: m=2; m=-1/2.
- 2) Diện tích tam giác IAB lớn nhất. ĐS: m=2; m=-1/2.

**Bài 28:** Cho hàm số  $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$  (1) m là tham số.  
 Tìm tham số m để đồ thị của hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng d:  $x + y + 7 = 0$  góc  $\alpha$ , biết  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$ . ĐS:  $m \leq -\frac{1}{4}$  và  $m \geq \frac{1}{2}$

**Bài 29:** Cho hàm số  $y = -\frac{2}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (3m-2)x - \frac{5}{3}$  có đồ thị  $(C_m)$ , m là tham số.  
 Tìm m để trên  $(C_m)$  có hai điểm phân biệt  $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$  thỏa mãn  $x_1 \cdot x_2 > 0$  và tiếp tuyến của  $(C_m)$  tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng d:  $x - 3y + 1 = 0$ . ĐS:  $m < -3$  và  $-1 < m < -\frac{1}{3}$ .

**Bài 30:** Cho hyperbol (H) có phương trình  $y = \frac{1}{x}$ .

- a. Tìm phương trình tiếp tuyến (T) của (H) tại tiếp điểm A có hoành độ a (với  $a \neq 0$ ). ĐS:  $y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$
- b. Giả sử (T) cắt trục Ox tại điểm I và cắt trục Oy tại điểm J. Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng IJ. Từ đó, suy ra hệ số góc tiếp tuyến (T) bằng  $k = -\frac{OJ}{OI}$ . ĐS: I(2a;0); J(0;2/a).
- c. Chứng minh rằng diện tích  $\Delta OIJ$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm A. ĐS:  $S = \frac{1}{2} OI \cdot OJ = 2$  (đvdt)

**Bài 31:** Cho hàm số  $y = \frac{x-3}{x+1}$  của đồ thị (C)

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B sao cho OA = 4OB. ĐS:

$$y = \frac{1}{4}(x-3); y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$$

**Bài 32:** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{2x+3}$  của đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B sao cho  $\Delta OAB$  vuông cân tại gốc tọa độ O. ĐS:  $y = -x; y = -x - 2$

**Bài 33:** Cho hàm số  $y = \frac{2x}{x-1}$  của đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B sao cho  $\Delta OAB$  có  $AB = OA\sqrt{5}$  với O là gốc tọa độ. ĐS:  $y = -2x; y = -2x + 8$

**Bài 34:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  của đồ thị (C)

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tâm  $O$  tại điểm  $M$  sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. ĐS: TT:  $y = -\frac{x}{(a-1)^2} + \frac{2a-1}{(a-1)^2}$ ;  $a=3/4$

$y = \frac{1}{4}(x-3); y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$

**Bài 35:** Tìm một điểm trên đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{x-1}$  sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo

thành một tam giác có diện tích bằng 2. ĐS: TT:  $y = -\frac{x}{(a-1)^2} + \frac{2a-1}{(a-1)^2}$ ;  $a=3/4$

**Bài 36:** Cho hàm số:  $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$  (C)

Tìm những điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng  $4x + y = 0$ . ĐS:  $M(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}); M(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$

**Bài 37:** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm  $I(1;2)$  đến tiếp tuyến bằng  $\sqrt{2}$ . ĐS:  $x + y - 1 = 0; x + y - 5 = 0$

**Bài 38:** Cho hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  (C)

Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết rằng tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng đi qua điểm M và điểm  $I(1; 1)$ . ĐS:  $M(0; 0); M(2; 2)$ . Từ Hsg suy ra giá vtcp của  $tt \perp MI$

**Bài 39:** Cho hàm số:  $y = \frac{2x+3}{x-2}$  (C)

Tìm m để đường thẳng (d):  $y = 2x + m$  cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau. ĐS:  $m=-2$

**Bài 40:** Cho hàm số  $y = \frac{2x-2}{x+1}$  (C). Tìm tọa độ các điểm M sao cho khoảng cách từ điểm  $I(-1;2)$  tới tiếp tuyến của (C) tại M lớn nhất. ĐS: HD chia cả tử và mẫu cho  $|x_0+1|$ ;  $M(1;0); M(-3;4)$

**Bài 41:** Cho hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  (C).

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C), biết rằng khoảng cách từ  $I(1; 1)$  của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất. ĐS:  $y = -x; y = -x+4$

**Bài 42:** Cho hàm số  $y = \frac{2x-4}{x+1}$  (C)

Tìm trên đồ thị (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết  $M(-3; 0)$  và  $N(-1; -1)$ . Viết phương trình tiếp tuyến tại hai điểm đó. ĐS:  $A(0; -4); B(2; 0); y=6x-4; y=(2x-4)/3$

**Bài 43:** Cho hàm số  $(H_m): y = \frac{x-4m}{2(mx-1)}$

- a. Cmr với mọi  $m \neq \pm \frac{1}{2}$ , các đường cong  $(H_m)$  đều đi qua hai điểm cố định A và B. ĐS:  $A(-2; 1), B(2; -1)$
- b. Chứng minh rằng tích các hệ số góc của các tiếp tuyến với  $(H_m)$  tại hai điểm A và B là một hằng số khi m biến thiên. ĐS:  $k.k'=1/4$ .

**VẤN ĐỀ 4: Tính đạo hàm cấp cao**

- 1. Để tính đạo hàm cấp 2, 3, 4, ... ta dùng công thức:  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ .
- 2. Để tính đạo hàm cấp n:
  - Tính đạo hàm cấp 1, 2, 3, ... từ đó dự đoán công thức đạo hàm cấp n
  - Dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh công thức đúng.

**Bài 1:** Cho hàm số  $f(x) = 3(x+1) \cos x$ .

- a) Tính  $f'(x), f''(x)$                       b) Tính  $f''(\pi), f''\left(\frac{\pi}{2}\right), f''(1)$

**Bài 2:** Tính đạo hàm của các hàm số đến cấp được chỉ ra:

- a)  $y = \cos x, y''$                               b)  $y = 5x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 7, y''$   
 c)  $y = \frac{x-3}{x+4}, y''$                               d)  $y = \sqrt{2x-x^2}, y''$   
 e)  $y = x \sin x, y''$                               f)  $y = x \tan x, y''$   
 g)  $y = (x^2+1)^3, y''$                               h)  $y = x^6 - 4x^3 + 4, y^{(4)}$   
 i)  $y = \frac{1}{1-x}, y^{(5)}$

**Bài 3:** Cho  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

- a)  $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$                       b)  $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$   
 c)  $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

**Bài 4:** Tính đạo hàm cấp  $n$  của các hàm số sau:

- a)  $y = \frac{1}{x+2}$                               b)  $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$                               c)  $y = \frac{x}{x^2-1}$   
 d)  $y = \frac{1-x}{1+x}$                               e)  $y = \sin^2 x$                               f)  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

**Bài 5:** Chứng minh rằng:

- a. Hàm số  $y = \tan x$  thỏa mãn hệ thức  $y' - y^2 - 1 = 0$ .  
 b. Hàm số  $y = \cot 2x$  thỏa mãn hệ thức  $y' + 2y^2 + 2 = 0$ .

**Bài 6:** Cho hàm số  $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$ . Chứng minh rằng với mọi  $x$  ta có  $|f'(x)| \leq 8$ . Tìm giá trị của  $x$  để đẳng thức xảy ra.

**Bài 7:** Chứng minh các hệ thức sau với các hàm số được chỉ ra:

- 1)  $\begin{cases} y = x \sin x \\ xy'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0 \end{cases}$   
 2)  $\begin{cases} y = \sqrt{2x-x^2} \\ y^3 y'' + 1 = 0 \end{cases}$   
 3)  $\begin{cases} y = x \tan x \\ x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y) = 0 \end{cases}$   
 4)  $\begin{cases} y = \frac{x-3}{x+4} \\ 2y'^2 = (y-1)y'' \end{cases}$

**Bài 8:** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$  bằng đạo hàm; tính giá trị hàm số đó.

$$A = \sin^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

**Bài 9:** Chứng minh rằng với mọi  $x$  ta đều có:

$$\cos^2(x-a) + \sin^2(x-b) - 2\cos(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b) = \cos^2(a-b)$$

**VẤN ĐỀ 5: Tính giới hạn dạng  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)}$**

Ta sử dụng các công thức lượng giác để biến đổi và sử dụng công thức:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$  (với  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ )

**Bài 1:** Tính các giới hạn sau:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$        $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$       e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$       f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$       h)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$

**VẤN ĐỀ 6: Các bài toán khác**

**Baøi 1:** Giải phương trình  $f'(x) = 0$  với:

- 1)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 1$
- 2)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x - 3$
- 3)  $y = \sin 2x - 2\cos x$
- 4)  $f(x) = 3\cos x - 4\sin x + 5x$
- 5)  $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 10x$
- 6)  $y = \cos^2 x + \sin x$
- 7)  $y = \tan x + \cot x$
- 8)  $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x + 2x - 1$
- 9)  $f(x) = \sin^2 x + 2\cos x$
- 10)  $f(x) = \sin x - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 6x}{6}$
- 11)  $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos \frac{3\pi + x}{2}$
- 12)  $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x + 3(\cos x - \sqrt{3}\sin x)$

**Baøi 2:** Giải phương trình  $f'(x) = g(x)$  với:

- a)  $\begin{cases} f(x) = \sin^4 3x \\ g(x) = \sin 6x \end{cases}$       b)  $\begin{cases} f(x) = \sin^3 2x \\ g(x) = 4\cos 2x - 5\sin 4x \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} f(x) = 2x^2 \cos^2 \frac{x}{2} \\ g(x) = x - x^2 \sin x \end{cases}$       d)  $\begin{cases} f(x) = 4x \cos^2 \frac{x}{2} \\ g(x) = 8\cos \frac{x}{2} - 3 - 2x \sin x \end{cases}$

**Baøi 3:** Giải bất phương trình  $f'(x) > g'(x)$  với:

- 1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, g(x) = 0$
- 2)  $f(x) = 3x; g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
- 3)  $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}, g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$
- 4) b)  $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}, g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$
- 5) c)  $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = x - x^3$

**Baøi 4:** Cho hàm số  $y = mx^3 + x^2 + x - 5$ . Tìm m để:

- a.  $y'$  bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất.
- b.  $y'$  có hai nghiệm trái dấu.
- c.  $y' > 0$  với mọi  $x$ .

**Baøi 5:** Xác định m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $f'(x) > 0$  và  $f(x) = \frac{mx^3}{3} - 3x^2 + mx - 5$

b)  $f'(x) < 0$  với  $f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (m+1)x - 15$

**Bài 6:** Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + mx - 3$ . Tìm m để:

- a)  $f'(x)$  bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất.
- b)  $f'(x) \geq 0$  với mọi x.

**Bài 7:** Cho hàm số  $f(x) = -\frac{mx^3}{3} + \frac{mx^2}{2} - (3-m)x + 2$ . Tìm m để:

- a)  $f'(x) < 0$  với mọi x.
- b)  $f'(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.
- c) Trong trường hợp  $f'(x) = 0$  có hai nghiệm, tìm hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

**VẤN ĐỀ 7: Dùng Đạo hàm để tính giới hạn**

**Lời dẫn:** Việc tính đạo hàm thì dễ xong việc tính giới hạn trực tiếp lại khó. Khi đó ta nhớ áp dụng tính chất này của đạo hàm thì tính giới hạn lại cực dễ.

**Phương pháp áp dụng**

Giả sử cần xác định giới hạn:

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} Q(x),$$

ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một hàm  $f(x) \Rightarrow f(x_0)$

Xác định  $f'(x) \Rightarrow f'(x_0)$ .

Bước 2: Khéo léo biến đổi giới hạn trên về một trong các dạng:

Dạng 1:  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Dạng 2:  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot P(x) = f'(x_0) \cdot P(x_0)$  với  $P(x_0) \neq \infty$

Dạng 3:  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$  với  $g'(x_0) \neq 0$ .

**Bài 1:** Tìm các giới hạn sau:

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  ĐS: đặt  $f(x) = x^2$ ;  $f(1) = 1$ ;  $f'(x) = 2x$ ;  $f'(1) = 2$  ta có:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x^2 + 2x - 3}$  ĐS: Đặt  $f(x) = \sqrt{x+8}$ ; ...,  $f'(1) = 1/6$  ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} = f'(1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2}$  ĐS : 1/12

4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1}$  ĐS: 3/2

5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$  ĐS: -11/24

6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[5]{x-2}}{x-1}$  ĐS: 7/10

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2001)\sqrt[7]{1-2x} - 2001}{x}$  ĐS: -3995/7

8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x}$  ĐS: 0

- 9)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$  ĐS:  $n(n+1)/2$
- 10)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x - 1)^2}$  ĐS:  $n(n-1)/2$
- 11)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3 - 24} + \sqrt{x+2} - 8\sqrt{2x-3}}{4 - x^2}$  ĐS:  $-65/16$
- 12)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$  ĐS:  $4/3$
- 13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+2x} - 1}{\sqrt[m]{1+3x} - 1}$  ĐS:  $2m/3n$
- 14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$  ĐS:  $1/3$
- 15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x \cdot \sin 2x}$  ĐS:  $-4$
- 16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt[3]{4x^2+1}}{1 - \cos x}$  ĐS:
- 17)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + \sqrt{1 + \sin 3x}}{1 + \sin 3x}$
- 18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$
- 19)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x^2+4x+19} - \sqrt{3x^2+46}}{x^2 - 1}$

## VẤN ĐỀ 8: RÚT GỌN BIỂU THỨC, CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

Chú ý : + bài toán thuận của phần này là tính đạo hàm.

+ bài toán ngược của phần này là biết đạo hàm  $f'(x)$  tìm  $f(x)$ .

**Bài 1:** Rút gọn biểu thức, tính tổng các biểu thức sau: (Biết  $f(x)$  tính  $f'(x)$  rồi chọn  $x$  thích hợp)

- Tính chất Cấp số nhân

- 1)  $A_1 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n$  HD:  $x^{n+2} - 1 = (x-1)(x^{n+1} + x^n + \dots + x^2 + x + 1)$  - Tính chất CSN
- 2)  $A_2 = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$
- 3)  $A_3 = 2nx^{2n-1} - (2n-1)x^{2n-2} + (2n-2)x^{2n-3} - \dots + 2x - 1$

**Bài 2:** Chứng minh các hệ thức sau (sử dụng đạo hàm của khai triển  $(a+b)^n$ ):

Chú ý: hệ số tăng hoặc mũ tăng dần thì  $(1 \pm x)^n$ ; hệ số giảm; mũ giảm thì  $(x \pm 1)^n$

- Tính chất nhị thức niu ton

- 1)  $S = 1.C_n^1 + 2.C_n^2 + \dots + n.C_n^n = n.2^{n-1}$  HD:  $[(1+x)^n]'$ , với  $x = 1$
- 2)  $S = 2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + \dots + n(n-1).C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$  HD:  $[(1+x)^n]''$ , với  $x = 1$
- 3)  $S = 1^2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + \dots + n^2.C_n^n = n(n+1).2^{n-2}$  HD c1:  $k^2.C_n^k = [k(k-1) + k].C_n^k$



c2: Khai triển  $(1+x)^n$  rồi  $[(1+x)^n]'$  rồi nhân 2 vế với x lại lấy đạo hàm lần 2, chọn x=1

4)  $S = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + \dots + nC_n^n = n \cdot 4^{n-1}$  HD:  $[(3+x)^n]'$ , với x = 1

**Bài 3:** Tính tổng các hệ thức sau (sử dụng đạo hàm của khai triển  $(a+b)^n$ ):

5)  $B = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n$ . HD: KT  $x(1+x)^n$  rồi lấy ĐH, chọn x=1

6)  $C = 3 \cdot 2C_n^0 + 4 \cdot 3C_n^1 + 5 \cdot 4C_n^2 + \dots + (n+3)(n+2)C_n^n$ . HD: KT  $x^3(1+x)^n$  rồi lấy ĐH 2 lần, chọn x=1

7)  $D = 2 \cdot 1C_n^2 - 3 \cdot 2C_n^3 + \dots + n(n-1)(-1)^n C_n^n$  HD:  $[(1-x)^n]''$ , chọn x = 1

8)  $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 \cdot 5 + 3C_n^3 \cdot 5^2 + \dots + nC_n^n \cdot 5^{n-1}$  HD:  $[(1+x)^n]'$ , chọn x = 5

9)  $S_2 = 2 \cdot 1 \cdot C_n^2 \cdot 2^{n-2} - 3 \cdot 2 \cdot C_n^3 \cdot 2^{n-3} + \dots + (-1)^n \cdot n(n-1) \cdot C_n^n$  HD:  $[(x-1)^n]''$ , chọn x = 2

10)  $S_3 = 1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + 3^2 \cdot C_n^3 + \dots + n^2 \cdot C_n^n$  HD: KT  $(1+x)^n$ , tính đh, nhân 2 vế với x, lại tính đh, chọn x=1

11)  $S_4 = 2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n+2)C_n^n$  HD:  $(3k+2)C_n^k = 3kC_n^k + 2C_n^k$  Khi đó

$S_4 = 3[0 \cdot C_n^0 + 1C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n] + 2[C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n]$

12)  $S_1 = 100C_{100}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101C_{100}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \dots - 199C_{100}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200C_{100}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{199}$ .

HD: Khai triển  $(x-1)^{100}$ ; nhân 2 vế với  $x^{100}$ ;  $[x^{100}(x-1)^{100}]'$ , chọn x = 1/2

13)  $S_2 = 2 \cdot 1 \cdot C_{20}^2 \cdot 2^{18} - 3 \cdot 2 \cdot C_{20}^3 \cdot 2^{17} + \dots + 380 \cdot C_{20}^{20}$ . HD: Kt  $(1-x)^{20}$  tính đh lần 2; chọn x=1/2 rồi quy đồng.

14)  $S_3 = 1^2 \cdot C_{2009}^1 - 2^2 \cdot C_{2009}^2 + 3^2 \cdot C_{2009}^3 - \dots + 2009^2 \cdot C_{2009}^{2009}$ . HD: KT  $(1-x)^n$ , tính đh, rồi nhân 2 vế với x, lại tính đh, chọn x=1.

15)  $S_4 = 3C_n^0 - 5C_n^1 + 7C_n^2 - \dots + 4023C_{2010}^{2010}$  HD: Cấp số cộng. 3,5,7,...,4023 là CSC có u1=3; d=2; 4023=2.2011+1

Ta tách thành :  $S_4 = 2[1 \cdot C_n^0 - 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 - \dots + 2011 \cdot C_{2010}^{2010}] + 1[C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + C_{2010}^{2010}]$

Kt  $(1-x)^{2010}$ ; nhân 2 vế với x lấy đh; chọn x=1.

**Bài 4:** Cho số nguyên n thỏa mãn đẳng thức  $\frac{A_n^3 + C_n^3}{(n-1)(n-2)} = 35, (n \geq 3)$ . Tính tổng :

$S = 2^2 \cdot C_n^2 - 3^2 \cdot C_n^3 + \dots + (-1)^n n^2 \cdot C_n^n$ . (Dự bị B1 - 2008).

ĐS: n=30; kt  $(1-x)^n$ ; tính đh; nhân 2 vế với x, tính đh; chọn x=1; n=30 là xong

**Bài 5:** Chứng minh rằng với n là số nguyên dương, ta luôn có :

$n \cdot 2^n \cdot C_n^n + (n-1) \cdot 2^{n-1} \cdot C_n^1 + (n-2) \cdot 2^{n-2} \cdot C_n^2 + \dots + 2 \cdot C_n^{n-1} = 2n \cdot 3^{n-1}$  (Dự bị D1 - 2008).

ĐS: kt  $(x+1)^n$ ; tính đh; chọn x=2; nhân 2 vế với 2.

**Bài 6:** Tìm số nguyên dương n sao cho :

$C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2C_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1) \cdot 2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2011$  (1)

( $C_n^k$  là số tổ hợp chập k của n phần tử).

ĐS: Kt  $(1-x)^{2n+1}$ ; tính đh 2 vế rồi chọn x=2 suy ra n=1005

**Bài 7:** Chứng minh đẳng thức sau

1)  $C_n^1 - 2C_n^2 + \dots + n(-1)^{n-1} C_n^n = 0$

2)  $C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 - \dots + (-1)^n \cdot 2^n C_n^n = (-1)^n$ .

3)  $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^k - {}^1_k C_n^k + \dots + (-1)^n - {}^1_n C_n^n = 0$

- 4)  $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$   
 5)  $2 \cdot 1 C_n^2 + 3 \cdot 2 C_n^3 + \dots + n(n-1)C_n^n = n(n-1) \cdot 2^{n-2}$   
 6)  $C_n^2 + 2C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^n > (n-2)2^{n-1}$   
 7) Với  $n$  là số nguyên dương, chứng minh rằng:  
 $(-1)^r C_r^r C_n^r + (-1)^{r+1} C_{r+1}^r C_n^{r+1} + \dots + (-1)^n C_n^r C_n^n = 0$ , với  $r$  nguyên dương và  $r \leq n$ .  
 8)  $n \cdot 3^{n-1} = C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + n2^{n-1} \cdot C_n^n$   
 9)  $n \cdot 3^{n-1} = n \cdot 4^{n-1} \cdot C_n^0 - (n-1) \cdot 4^{n-2} C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1}$   
 10)  $C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + n2^{n-1} \cdot C_n^n = n \cdot 4^{n-1} \cdot C_n^0 - (n-1) \cdot 4^{n-2} C_n^1 + (n-2) \cdot 4^{n-3} C_n^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1}$   
 11)  $n4^{n-1} C_n^0 - (n-1)4^{n-2} C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} = C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + n2^{n-1} C_n^n$   
 12)  $\frac{1}{n} (C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n) < n!$

**Bài 8:** Chứng minh các hệ thức sau (sử dụng khai triển  $(a+b)^n$ ):

a)  $S = 2C_n^0 + \frac{2^2}{2} C_n^1 + \frac{2^3}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}$  HD: khai triển  $f'(x) = (1+x)^n \Rightarrow f(x)$  rồi chọn  $x=2$

b)  $S = C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$  HD: khai triển  $f'(x) = (1+x)^n \Rightarrow f(x)$  rồi chọn  $x=1$

c)  $S = C_n^0 - \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1}$  HD: khai triển  $f'(x) = (1-x)^n \Rightarrow f(x)$  rồi chọn  $x=1$

d)  $S = \frac{1}{2} C_n^0 - \frac{1}{4} C_n^1 + \frac{1}{6} C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)} C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$  HD:  $S = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$

e)  $S = \frac{1}{2} C_n^0 + \frac{1}{4} C_n^1 + \frac{1}{6} C_n^2 + \dots + \frac{1}{2(n+1)} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2(n+1)}$  HD:  $S = \int_0^1 x(1+x^2)^n dx$

f)  $S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2} C_n^1 + \frac{2^2-1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1} C_n^n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$  HD:  $S = \int_1^2 (1+x)^n dx$

**BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG V**

**Bài 1:** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = x^3(x^2 - 4)$       b)  $y = (x+3)(x-1)$       c)  $y = x^6 - 2\sqrt{x} + 2$   
 d)  $y = \sqrt{x}(2x^2 - 1)$       e)  $y = (2x^2 + 1)(4x^3 - 2x)$       f)  $y = \frac{1+9x}{x+1}$   
 g)  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 3}$       h)  $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$       i)  $y = (3 - 2x^2)^2$

**Bài 2:** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 7}$       b)  $y = \sqrt{1 - x^2}$       c)  $y = \sqrt{x^2 - 3x - 2}$   
 d)  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$       e)  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$       f)  $y = \sqrt{\frac{x-3}{x}}$

**Bài 3:** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = \sin(x^3 - x + 2)$       b)  $y = \tan(\cos x)$       c)  $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$

d)  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

e)  $y = x \cot(x^2 - 1)$

f)  $y = \cos^2(x^2 + 2x + 2)$

g)  $y = \sqrt{\cos 2x}$

h)  $y = \cot^3 \sqrt{1 + x^2}$

i)  $y = \tan^2(3x^2 + 4x)$

**Bài 4:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của các hàm số, với:

a) (C):  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  tại điểm  $M(-1, -2)$ .

b) (C):  $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = 0$ .

c) (C):  $y = \sqrt{2x + 1}$  biết hệ số góc của tiếp tuyến là  $k = \frac{1}{3}$ .

**Bài 5:** Cho hàm số  $y = x^3 - 5x^2 + 2$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến đó:

a) Song song với đường thẳng  $y = -3x + 1$ .

b) Vuông góc với đường thẳng  $y = \frac{1}{7}x - 4$ .

c) Đi qua điểm  $A(0; 2)$ .

**Bài 6:** a) Cho hàm số  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$ . Tính giá trị của  $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

b) Cho hai hàm số  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$  và  $g(x) = \frac{1}{4}\cos 4x$ . So sánh  $f'(x)$  và  $g'(x)$ .

**Bài 7:** Tìm m để  $f'(x) > 0, \forall x \in R$ , với:

a)  $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + 2x + 1$ .

b)  $f(x) = \sin x - m \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + 2mx$

**Bài 8:** Chứng minh rằng  $f'(x) > 0, \forall x \in R$ , với:

a)  $f(x) = 2x + \sin x$ .

b)  $f(x) = \frac{2}{3}x^9 - x^6 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ .