CÁC DẠNG TOÁN 12 VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I.Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên D, với D là một khoảng, một đoạn hoặc nửa khoảng.

1.Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên D nếu $\forall x_1,x_2\in D, x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

2.Hàm số $y=f(x)$ được gọi là nghịch biến trên D nếu $\forall x_1,x_2\in D, x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

II.Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D

1.Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên D thì $f'(x)\ge 0,\forall x\in D$

2.Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên D thì $f'(x)\le 0,\forall x\in D$

III.Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:

1.Định lý 1. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a,b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a,b)$ sao cho: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

2.Định lý 2. Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D

1.Nếu $f'(x)\ge 0,\forall x\in D$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc D thì hàm số đồng biến trên D

2.Nếu $f'(x)\le 0,\forall x\in D$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc D thì hàm số nghịch biến trên D

3.Nếu $f'(x)=0,\forall x\in D$ thì hàm số không đổi trên D

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1.Xét chiều biến thiên của hàm số $y=f(x)$

Phương pháp : Xét chiều biến thiên của hàm số $y=f(x)$

1.Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$

2.Tính $y'=f'(x)$ và xét dấu y' (Giải phương trình y' = 0)

3.Lập bảng biến thiên

4.Kết luận

Ví dụ : Xét tính biến thiên của các hàm số sau:

1.y = $-x^3+3x^2-3x+1$

2. y= $2x^4+5x^2-2$

3. y= $(x+2)^2(x-2)^2$

4. y=$\dfrac{-3x+2}{2x-1}$

5. $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

6. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-10}$

7. $y=\sqrt{x^2-6x+10}$

8. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x+3}}{2x+1}$

9.y=$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-x}$

10.y=2x + $\sqrt{x^2-1}$

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước .

Ví dụ:

1.Tìm m để hàm số y= $2x^3-3mx^2+2(m+5)x-1$ đồng biến trên R

2.Tìm m để hàm số y=$\dfrac{x^2+x+m}{mx+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó

3.Tìm m để hàm số y= 3mx+$\sqrt{x^2+2}$ đồng biến trên R

4.Tìm m để hàm số $y=f(x)=mx^3-3x^2+(m-2)x+3$ nghịch biến trên R

5. Tìm m để hàm số $y=f(x)=-x^3+(m+1)x^2-(m^2+2)x+m$ nghịch biến trên R

6. Tìm m để hàm số $y=f(x)=\left(\dfrac{1-m}{3}\right)x^3-2(2-m)x^2+2(2-m)x+5$ nghịch biến trên R

7. Tìm m để hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}(m-1)x^3+mx^2+(3m-2)x$ tăng trên R

8.Tìm m để hàm số y= $3x^3-2x^2+mx-4$ tăng trên $(-1;+\infty)$

9.Tìm m để hàm số y= $4mx^3-6x^2+(2m-1)x+1$ tăng trên (0;2)

10.Tìm m để hàm số y= $\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ giảm trên $(1;\ +\infty)$

11.Tìm m để hàm số y=mx^4-4x^2+2m-1 giảm trên (0;3)

12.Tìm m để hàm số y= $x^3+3x^2+(m+1)x+4m$ giảm trên (-1;1)

13.Tìm m để hàm số y= $\dfrac{-2x^2-3x+m}{2x+1}$ giảm trên $(-\dfrac{1}{2};+\infty)$

14.Cho hàm số y= $\dfrac{x^2-mx+2m-1}{x+2}$

Tìm m để hàm số tăng trên từng khoảng xác định

15.Tìm giá trị của tham số m để hàm số sau nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 1

$$y=f(x)=x^3+3x^2+mx+m$$

16. Tìm m để hàm số $y=f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-4$ tăng trên $(0,3)$

17. Tìm m để hàm số $y=f(x)=x^3+3x^2+(m+1)x+4m$ giảm trên $(-1,1)$

18. Tìm m để hàm số $y=f(x)=\dfrac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty,1)$

19. Tìm m để hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\dfrac{1}{3}$ tăng trên $(2,+\infty)$

20. Tìm m để hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+(m+1)x+4m^2-4m-2}{x-(m-1)}$ đồng biến trên $(0,+\infty)$

Dạng 3. *Sử dụng tính đơn điệu để giải PT,BPT,BĐT*

Ví dụ:

1.Giải phương trình $\sqrt{x^3+3x}=-x^2-4x+7$ (ĐK $x^3+3x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$)

2.Giải phương trình $x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4=0$

3.Giải phương trình $2^{x-1}-2^{x^2-x}=(x-1)^2$

4. Giải phương trình sinx =x

5.Tìm m để phương trình có nghiệm $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=m$

6.Tìm để phương trình có nghiệm m$\sqrt{x^2+1}$ - x = 0

7.Chứng minh rằng $\forall x>0: 1-\frac{x^2}{2}<\cos x$ (*HD* xét hàm số $y=f(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x$)

8.Chứng minh rằng $\forall x>0: e^x>\frac{x^2}{2}+x+1$ (*HD* xét hàm số $y=f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1$)

9.Chứng minh rằng $\forall x\in(0;\frac{\pi}{2}): \tan x>x+\frac{x^3}{3}$

10.Chứng minh rằng : Nếu $x+y=1$ thì $x^4+y^4\geq\frac{1}{8}$ (*HD* xét hàm số $y=f(x)=x^4+(1-x)^4$)

11.Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+1=y^3+y^2+y\\2y+1=z^3+z^2+z\\2z+1=x^3+x^2+x\end{cases}$

<u>*HD*</u>. Xét hàm đặc trưng $y=f(x)=t^3+t^2+t, t\in\mathbb{R}$. Chứng minh hàm số tăng trên R .ĐS $\begin{cases}x=y=z=1\\x=y=z=-1\end{cases}$

12.Giải hệ phương trình $\begin{cases}x=\frac{y^3}{6}+\sin y\\y=\frac{z^3}{6}+\sin z\\z=\frac{x^3}{6}+\sin x\end{cases}$

<u>Chủ đề 2.</u> CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

<u>PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT</u>

<u>I.Định nghĩa:</u> Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $D\subset R$ và $x_0\in D$

1. x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ nếu tồn tại một (a,b) chứa điểm x_0 sao cho $(a,b)\subset D$ và $f(x)<f(x_0), \forall x\in(a,b)\backslash\{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số và $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của hàm số .

2. x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ nếu tồn tại một (a,b) chứa điểm x_0 sao cho $(a,b)\subset D$ và $f(x)>f(x_0), \forall x\in(a,b)\backslash\{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số và $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số .

3.Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là cực trị của hàm số

<u>II.Điều kiện cần để hàm số có cực trị :</u> Giả sử hàm số $y=f(x)$ có cực trị tại x_0.Khi đó, nếu $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0)=0$.

<u>III.Điều kiện đủ để hàm số có cực trị :</u>

1.Định lý 1. (Dấu hiệu 1 để tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a,b) chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng (a, x_0) và (x_0, b). Khi đó :

+ Nếu f'(x) đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0

+ Nếu f'(x) đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0

2.Định lý 2. (Dấu hiệu 2 để tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a,b) chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f(x) có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0. Khi đó:

+ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0

+ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số

***Phương pháp1.** (Quy tắc 1)Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$*

1.Tìm tập xác định của hàm số

2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm thuộc tập xác định

3.Lập bảng biến thiên

4.Kết luận

Ví dụ1: Dùng quy tắc 1 tìm cực trị của hàm số

1. y = $\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$ 2.y = x^4+2x^2-3

2. y = $\frac{3x-1}{2x+4}$ 4.y = $\frac{x^2-3x+3}{x-1}$

3. y= $\sqrt{2x^2-4x+5}$ 6. y=(2x+1)$\sqrt{9-x^2}$

7. y = $\sqrt{3+x}+\sqrt{1-x}$ 8. y= $\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$

9. y = $\frac{-2x^2+x+2}{2x+1}$ 10. $y = x^4-6x^2+8x+25$

11. $y = (x+2)^2(x-2)^2$ 12. $y = 15x^5-15x^3+2$

***Phương pháp 2.** (Quy tắc 2)Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$*

1.Tìm tập xác định của hàm số

2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm $x_i\ (i = 1,2,3...)$ thuộc tập xác định

3.Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$

4.Kết luận

+Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i

+Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i

Ví dụ 2: Dùng quy tắc II tìm cực trị của hàm số

1.y= $3x^5-20x^3+1$ 2. y = $5x-6\sqrt{x^2+4}$

3.y = $\cos^2 3x$

4. y = $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}$

5.y = -2sin3x+3sin2x-12sinx

6. y= $\sin^3 x + \cos^3 x$ ($0 \le x \le 2\pi$)

7. $y = x\sqrt{9-x^2}$

8. $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}$

9. $y = |x^3 - 3x|$

10. $y = \sin x + \cos x, x \in [-\pi, \pi]$

***Dạng 2**.Tìm điều kiện của tham số để hàm số có cực trị thõa mãn điều kiện cho trước*

VD1: Tìm điều kiện của m sao cho :

1. y= $x^3 - mx^2 + 2(m+1)x - 1$ đạt cực đại tại x= -1
2. y= $\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực tiểu tại x=2
3. y= $-\sqrt{2}x^4 - mx^2 - 2m^2$ đạt cực đại tại x= $\sqrt{2}$

VD2:Cho hàm số y= $\frac{1}{3}x^3 - (7m+1)x^2 + 16x - m$ .Tìm m để

a. Hàm số có cực đại và cực tiểu
b. Hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu tại $x_1, x_2 \in (1;+\infty)$

VD3:Cho hàm số y= $x^3 - mx^2 + (m+36)x - 5$ .Tìm m để

a. Hàm số không có cực trị
b. Hàm số đạt cực đại ,cực tiểu tại các điểm x_1, x_2 và $|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}$

VD3:Cho hàm số y= $\frac{2x^2+mx+2m-1}{x+1}$ .Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu

VD4:Cho hàm số y= $2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$

Tìm m để các điểm cực đại ,cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng y=x+2

Dạng 3. Một số bài toán liên quan đến điểm cực trị của đồ thị hàm số

b. Hàm số có cực đại ,cự tiểu và các điểm cực đại ,cực tiểu cách đều đường thẳng y=x-1

VD6:Cho hàm số $y = \frac{x^2-(3m+1)x+4m}{2x-1}$ .Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: x + y + 1 = 0$.

VD1: Cho hàm số y= $x^3 + mx^2 - x$

a. CMR hàm số có cực đại cực tiểu với mọi m
b. Xác định m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số song song với đường thẳng (d) y=-2x

VD2:Cho hàm số y= $\frac{x^2-(3m+2)x+m+4}{x-1}$

a. Tìm m để hàm số có CĐ,CT và CĐ,CT và điểm M(-2;1) thẳng hàng
b. Tìm m để hàm số có CĐ,CT và trung điểm của đoạn nối 2 điểm CĐ,CT cách gốc O một khoảng bằng 3

VD3.Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Tìm giá trị của tham số m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của (C) ở về hai phía khác nhau của đường tròn : $x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

VD4.Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$.Tìm giá trị của tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại, cực tiểu lập thành một tam giác đều .

VD5.Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 2}{x - 1}$.Tìm để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm trên Parabol (P) $y = x^2 + x - 4$

VD6.Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+2)x + 3m + 2}{x + 1}$

a. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu
b. Giả sử hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu là $y_{CĐ}$, y_{CT} . Chứng minh rằng : $y_{CD}^2 + y_{CT}^2 > \dfrac{1}{2}$.

VD7.Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$

a. Tìm m để hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía khác nhau của trục tung
b. Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu

VD8.Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$

a.Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m hàm số luôn đạt cực đại và cực tiểu tại x_1, x_2 và $x_2 - x_1$ không phụ thuộc vào tham số m.

b.Tìm m để $y_{CD} > 1$

VD9.Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$.Chứng minh rằng với mọi m hàm số đã cho luôn có cực đại cực tiểu .Hãy xác định m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị là nhỏ nhất .

VD10.Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x + 2}$.Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị hàm số cùng với gốc tọa độ O tạo thành tam giác vuông tại O. ***(A – 2007)***

VD11.Cho hàm số $y = f(x) = mx + \dfrac{1}{x}$.Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu và khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến tiệm cận xiên bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ***.(A – 2005)***

VD12.Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$.Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu và các điểm cực trị cách đều gốc tọa độ O. ***(B – 2007)***

VD13.Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$ (Cm) . CMR với mọi m (Cm) luôn có cực đại cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $\sqrt{20}$. ***(B – 2005)***

VD14.Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ .Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu và các điểm cực trị có hoành độ dương . ***(CĐ – D – 2009)***

VD15. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1) m là tham số

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m = 1

b. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A,B,C sao cho OA=BC; trong đó O là gốc tọa độ , A là điểm cực trị thuộc trục tung, B,C là hai điểm cực trị còn lại .

(B – 2011)

Chủ đề 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I.Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D \subseteq R$

1.Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \le f(x_0), \forall x \in D$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên D, ký hiệu $M = \underset{x\in D}{Max}\, f(x)$

Như vậy $M = \underset{x\in D}{Max}\, f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D,\ f(x) \le M \\ \exists x_0 \in D,\ f(x_0) = M \end{cases}$

2. Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \ge f(x_0), \forall x \in D$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) trên D, ký hiệu $m = \underset{x\in D}{Min}\, f(x)$

Như vậy $m = \underset{x\in D}{Min}\, f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D,\ f(x) \ge m \\ \exists x_0 \in D,\ f(x_0) = m \end{cases}$

II.Phương pháp tìm GTLN,GTNN của hàm số : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D \subseteq R$

Bài toán 1.Nếu $D = (a,b)$ thì ta tìm GTLN,GTNN của hàm số như sau:

1.Tìm tập xác định của hàm số
2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm thuộc tập xác định
3.Lập bảng biến thiên
4.Kết luận

Bài toán 2. Nếu $D = [a,b]$ thì ta tìm GTLN,GTNN của hàm số như sau:

1.Tìm tập xác định của hàm số
2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2 ...$ thuộc tập xác định
3.Tính $f(a), f(x_1), f(x_2)....f(b)$
4.Kết luận: Số lớn nhất là $M = \underset{x\in[a,b]}{Max}\, f(x)$ và số nhỏ nhất là $m = \underset{x\in[a,b]}{Min}\, f(x)$

Bài toán 3.*Sử dụng các bất đẳng thức thông dụng như : Cauchy, Bunhiacốpxki, ...*
Bài toán 4.*Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình, tập giá trị của hàm số*

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. *Tìm GTLN, GTNN của hàm số*

Ví dụ: Tìm GTLN,GTNN (nếu có) của các hàm số sau:

1. $y = f(x) = x^4 - 2x^2$

2. $y = f(x) = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên $[0;2]$

3. $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ (B-2003)

4. $y = f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên $[1, e^3]$ (B-2004)

5. $y = f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $[-1,2]$ (D-2003)

6. $y = f(x) = \dfrac{3x^2+10x+20}{x^2+2x+3}$ (SPTPHCM2000)

7. $y = f(x) = 5\cos x - \cos 5x$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$

8. $y = f(x) = 1 + \dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$

9. $y = f(x) = \sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+\cos x}$

10. $y = f(x) = -2\cos 2x + \cos x - 3$

11. $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{1+x} - \sqrt{-x^2+x+2}$

12. $y = 2\sin x.\cos x + \sin x - \cos x$

13. $y = \dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$ trên $(-1,+\infty)$

14. $y = \left|x^2-4x+3\right| + 3x - 1$ trên đoạn $\left[0,\dfrac{13}{4}\right]$

15. $y = \dfrac{1}{4}\left|x^3-3x^2\right|$ trên $[-2,4]$

16. $y = \left|\sin^3 x + \cos^3 x\right| + 3\sin 2x$

***Dạng 2**.Tìm GTLN,GTNN của hàm số có chứa tham số*

VD1 .Cho hàm số $y = \left|x^2+2x+a-4\right|$.Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2,1]$ đạt GTLN.

VD2. Cho hàm số $y = f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + m\sin x.\cos x$ .Tìm m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

VD3. Cho hàm số $y = \dfrac{k\cos x+1}{\cos x+2}$.Tìm k để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -1.

VD4. Tìm các giá trị của tham số a,b sao cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

VD5.Cho hàm số $y = f(x) = \left|2x^2+4x-2a+1\right|$ với $-3 \le x \le 4$.Xác định a để giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

***Dạng 3.**Ứng dụng của bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số*

VD1. Một tấm tôn hình vuông cạnh bằng a. Người ta phải cắt bỏ bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc để gò thành một bể chứa hình hộp chữ nhật không nắp, cạnh hình vuông cắt đi bằng bao nhiêu thì bể có thể tích lớn nhất . *ĐS. Cạnh hình vuông cắt đi bằng* $\dfrac{a}{6}$

VD2. Tìm các kích thước của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp đường tròn bán kính R cho trước.

ĐS.Các kích thước của hình chữ nhật là $R\sqrt{2}$ *(hình vuông)*

VD3. Trong các khối trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hãy xác định khối trụ có thể tích lớn nhất .

ĐS.Hình trụ có chiều cao $h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ *bán kính đáy* $r = \sqrt{R^2 - \dfrac{h^2}{4}}$

VD4. Cho đường (C) có phương trình $x^2 + y^2 = R^2$ .Hãy tìm các điểm H trên (C) sao cho tiếp tuyến tại đó cắt hai trục tọa độ tại A và B có độ dài đoạn AB nhỏ nhất .

VD5. Tìm hình thang cân có diện tích nhỏ nhất ngoại tiếp đường tròn bán kính R cho trước .

VD6. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm Max, Min của biểu thức $P = \dfrac{2(xy + y^2)}{2xy + 2x^2 + 1}$.

$$ĐS.\ MaxP = \frac{2+\sqrt{6}}{2}, MinP = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$$

VD7.Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$.Tìm Min của biểu thức $P = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1-y}}$

VD8.Cho hai số thực thay đổi x, y thõa mãn $x^2 + y^2 = 2$ .Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$

(CĐ Khối A – 2008)

VD9. Cho hai số thực thay đổi x,y thõa mãn $x^2 + y^2 = 1$.Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = \dfrac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$

(ĐH Khối B – 2008)

VD10.Cho hai số thực không âm x, y thay đổi và thõa điều kiện x + y = 1 .Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

(ĐH Khối D – 2009)

Chủ đề 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Đường tiệm cận đứng .

Đường thẳng (d): $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{Hoặc } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \text{ hoặc } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

2.Đường tiệm cận ngang .

Đường thẳng (d): $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$

3.Đường tiệm cận xiên .

Đường thẳng (d) $y = ax + b(a \neq 0)$ được gọi là tiệm cận xiên của đồ thị (C) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$$

Chú ý: Cách tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$

Đường thẳng (d) $y = ax + b(a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right] \text{ hoặc } a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - ax \right]$$

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. *Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số*

Ví dụ 1. Tìm các tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số sau:

1. $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ 2. $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2-4}$

3. $y = f(x) = \dfrac{3x}{x^3+27}$ 4. $y = f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5-x}}$

Ví dụ 2. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số sau:

1. $y = f(x) = 2x + 1 + \dfrac{2}{x+1}$ 2. $y = f(x) = \dfrac{-3x^2+5x-2}{3x+1}$

3. $y = f(x) = \dfrac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}$ 4. $y = f(x) = \dfrac{-2x^2+5x-1}{2x-3}$

Ví dụ 3.Tìm các tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

1. $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}$ 2. $y = f(x) = \dfrac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}$

3. $y = f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - x + 2}$ 4. $y = f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 4}$

Dạng 2. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số có chứa tham số

1.Đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x+2m-1}{x+m}$ có tiệm cận đứng qua điểm M(-3,1)

2.Đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}$ có tiệm cận xiên tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Ví dụ 2. Cho đường cong (Cm): $y = f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3 + \dfrac{2}{mx-1}$ và đường thẳng (dm) $y = mx - m + 2$. Xác định m biết rằng (Cm) có cực đại cực tiểu và tiệm cận xiên của nó tạo với đường thẳng (dm)một góc α có $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x+m}{mx-1}$.Tìm m sao cho đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm $M \in (C)$ để tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) là nhỏ nhất ?

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm $M \in (C)$ để khoảng cách từ M đến giao điểm hai tiệm cận là nhỏ nhất ?

Chủ đề 5. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.*Bài toán 1*. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) tại một điểm .

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(x_0, y_0) \in (C)$ có dạng :

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Trong đó $f'(x_0)$ được gọi là hệ số góc của tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(x_0, y_0)$.

2.*Bài toán 2*. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) có hệ số góc k cho trước.

1.Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $M \in (C) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

2.Vì hệ số góc của tiếp tuyến bằng k nên $f'(x_0) = k$, giải PT $f'(x_0) = k$ tìm được $x_0 \Rightarrow y_0$

3.Kết luận .

Chú ý: Nếu hai đường thẳng song song thì hai hệ số góc bằng nhau. Nếu hai đường thẳng vuông góc thì tích hai hệ số góc bằng -1

3.*Bài toán 3*. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) đi qua một điểm $A(x_A, y_A)$

1.Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A với hệ số góc k.

d: $y = k(x - x_A) + y_A$ (1)

2.d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi và chỉ khi hệ phương tình sao có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \quad \text{(I)}$$

3.Giải hệ (I) tìm k. Thay k vào (1) để viết phương tình tiếp tuyến .

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số*

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$ có đồ thị (C).

a.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại A có hoành độ là 2.

b.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (d) $4x - y - 1 = 0$.

c.Chứng minh rằng trên (C) không tồn tại hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Ví dụ 2.Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ có đồ thị (C).

a.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có tung độ bằng 3.

b.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với góc phần tư thứ hai.

c.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(0, -2)

Ví dụ 3.Cho hàm số $y = f(x) = -x^4 - x^2 + 6$.Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$ ***(Khối D – 2010)***

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm M(-1, -9). ***(Khối B – 2008)***

Ví dụ 5.Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$ biết :

b. Tung độ tiếp điểm bằng $\frac{5}{2}$
c. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : x + y - 3 = 0$
d. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta : 4x - y + 10 = 0$
e. Tiếp tuyến đi qua điểm M(2,0)

Ví dụ 1 Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (m là tham số). Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1.Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

(Khối D – 2005)

Ví dụ 2.Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ (C_m).

a.Tìm m để (Cm) cắt đường thẳng y = 1 tại ba điểm phan biệt A(0,1), B, C
b.Tìm m để các tiếp tuyến tại B và C vuông góc với nhau .

Ví dụ 3.Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ (C). Hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất .

Ví dụ 4.Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (C). Xác định m để đường thẳng d: y = 2x + m cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

Ví dụ 5.Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục Ox, Oy tại A,B và tam, giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$. ***(Khối D – 2007)***

Ví dụ 6.Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+2}{2x+3}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại A và B và tam giác OAB cân tại O. ***(Khối A – 2009)***

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. ***(Khối B – 2006)***

Ví dụ 8.Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) các điểm A để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A vuông góc với đường thẳng đi qua A và tâm đối xứng của đồ thị hàm số. ***(Đại học An Ninh – 2001)***

Ví dụ 9.Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C). Xác định m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

(CĐ-SPTPHCM – 2005)

Ví dụ 10.Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C). Viết phương trình Parabol đi qua các điểm cực trị của đồ thị (C) và tiếp xúc với đường thẳng $y = -2x + 2$ ***(Đại học An Ninh – 1999)***

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{4x - 3}{x - 1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với trục Ox một góc 45^0.

Ví dụ 13.Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x - 7}{-2x + 5}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết :

a. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - 2y + 2 = 0$
b. Tiếp tuyến tạo với $\Delta: y = -2x$ một góc 45^0
c. Tiếp tuyến tạo với $\Delta: y = -x$ một góc 60^0

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và điểm M bất kỳ thuộc (C). Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A và B.

a. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn AB
b. Chứng minh rằng diện tích tam giác IAB không đổi
c. Tìm tọa độ điểm M để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

Ví dụ 15. Cho hàm số $y = \dfrac{-x + 1}{2x - 1}$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại A và B .Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất .

(Khối A – 2011)

***Dạng 3**.Biện luận số tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua một điểm*

Phương pháp: Giả sử ta cần biện luận số tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) đi qua $A(x_A, y_A)$

1.Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A với hệ số góc k.

d: $y = k(x - x_A) + y_A$ *(1)*

2.d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi và chỉ khi hệ phương tình sao có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (I)$$

3.Số nghiệm của hệ phương trình này chính là số tiếp tuyến đi qua điểm A .

Ví dụ 1.Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ (C).Tìm trên đường thẳng x = 2 những điểm mà từ đó có thể kẻ đúng ba tiếp tuyến đến đồ thị (C) của hàm số .

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ (C).Tìm trên đường thẳng y= 2 những điểm mà từ đó có thể kẻ đúng ba tiếp tuyến đến đồ thị (C) của hàm số .

Ví dụ 3.Cho đường thẳng (d):x = 2 và hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C). Từ một điểm bất kỳ trên (d) có thể được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị (C).

Ví dụ 4.Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Tìm trên đường thẳng y = -2 các điểm mà từ đó kẻ được đến đồ thị (C) của hàm số hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Ví dụ 5.Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C)

a) Viết phương trình tiếp của (C) đi qua gốc tọa độ O.
b) Tìm điểm M thuộc (C) để tiếp tuyến với (C) tại M còn cắt (C) tại hai điểm A và B sao cho A là trung điểm của MB.
c) Tìm điểm M trên trục tung sao cho qua M có thể kẻ được 4 tiếp tuyến đến đồ thị (C)

Ví dụ 6.Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C). Tìm những điểm trên trục Ox sao cho từ đó có thể kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Ví dụ 7.Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ có đồ thị (C). Tìm trên đường thẳng $y = 2x - 1$ các điểm kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Ví dụ 8.Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Tìm trên đường thẳng $y = -3x + 2$ các điểm kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc đến đồ thị (C).

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C).Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết khoảng cách từ điểm I(1,1) đến tiếp tuyến này là lớn nhất.

Ví dụ 10.Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C).Tìm các điểm thuộc trục hoành mà từ đó có thể kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C), trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+m}{x-2}$. Tìm m để từ điểm A(1,2) kẻ được hai tiếp tuyến AB,AC đến đồ thị hàm số sao cho ΔABC đều (Với B, C là hai tiếp điểm).

Ví dụ 12.Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 1 - m(x+1)$ có đồ thị (C).

a.Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại giao điểm của (C) và trục Oy.

b.Tìm m để Δ chắn trên hai trục Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 8.

Chủ đề 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Giao điểm của hai đồ thị. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (C_2)

+ Hai đồ thị (C_1) và (C_2) cắt nhau tại điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow (x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

+Hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+Phương trình (1) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2)

+Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C_1) và (C_2)

2.Sự tiếp xúc của hai đường cong. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) và có đạo hàm tại điểm x_0.

+Hai đồ thị (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau tại một điểm chung $M(x_0, y_0)$ nếu tại điểm đó chúng có chung cùng một tiếp tuyến . Khi đó điểm M được gọi là tiếp điểm.

+Hai đồ thị (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ của tiếp điểm.