Bồi d- ỡng học sinh giỏi toán 6

DÃY SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT

Bài toán 1 : Tính các tổng sau

1. $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$
2. $B = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{100}$

Giải :

1. $2A = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{10} + 2^{11}$. Khi đó : $2A - A = 2^{11} - 1$

2. $3B = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100} + 3^{101}$. Khi đó : $3B - B = 2B = 3^{101} - 1$.

Vậy $B = \frac{3^{101}-1}{2}$

Ta nghĩ tới bài toán tổng quát là :

Tính tổng $S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n$, $a \in Z^+$, $a > 1$ ***và*** $n \in Z^+$

Nhân 2 vế của S với a ta có $aS = a + a^2 + a^3 + a^4 + ... + a^n + a^{n+1}$ ***. Rồi trừ cho S ta được :***

$aS - S = (a - 1)S = a^{n+1} - 1$ ***. Vậy :*** $\boxed{1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}}$.

Từ đó ta có công thức : $\boxed{a^{n+1} - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n)}$.

Bài tập áp dụng : Tính các tổng sau:

a) $A = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{2007}$

b) $B = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^{100}$

c) Chứng minh rằng : $14^{14} - 1$ chia hết cho 3

d) Chứng minh rằng : $2009^{2009} - 1$ chia hết cho 2008

Bài toán 2 : Tính các tổng sau

1) $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + ... + 3^{100}$
2) $B = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + 7^9 + ... + 7^{99}$

Giải :

1) $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + ... + 3^{100}$. Vấn đề đặt ra là nhân hai vế của A với số nào để khi trừ cho A thì một loạt các lũy thừa bị triệt tiêu ?.Ta thấy các số mũ liền nhau cách nhau 2 đơn vị nên ta nhân hai vế với 3^2 , rồi trừ cho A ta đ- ợc :

$$\begin{array}{rl} & 3^2A = 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + ... + 3^{100} + 3^{102} \\ - & A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + ... + 3^{100} \\ \hline & 3^2A - A = 3^{102} - 1 \end{array}$$

$3^2A - A = 3^{102} - 1$. Hay $A(3^2 - 1) = 3^{102} - 1$. Vậy $A = (3^{102} - 1): 8$

Từ kết quả này suy ra 3^{102} chia hết cho 8

2) T- ơng tự nh- trên ta nhân hai vế của B với 7^2 rồi trừ cho B , ta đ- ợc :

$$\begin{array}{l} 7^2B = 7^3 + 7^5 + 7^7 + 7^9 + ... + 7^{99} + 7^{101} \\ B = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + 7^9 + ... + 7^{99} \\ \hline \end{array}$$

$7^2B - B = 7^{101} - 7$, hay $B(7^2 - 1) = 7^{101} - 7$. Vậy $B = (7^{101} - 7) : 48$

T- ơng tự nh- trên ta cũng suy ra $7^{101} - 7$ chia hết cho 48 ; 7^{100}- 1 chia hết cho 48

Bài tập áp dụng : Tính các tổng sau :

$A = 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 + ... + 2^{2009}$

$B = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} + ... + 2^{200}$

$C = 5 + 5^3 + 5^5 + 5^7 + 5^9 + ... + 5^{101}$

$D = 13 + 13^3 + 13^5 + 13^7 + 13^9 + ... + 13^{99}$

Tổng quát : Tính *

b) $S_1 = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + ... + a^{2n}$, với ($a \geq 2$, $n \in N$)

c) $S_2 = a + a^3 + a^5 + ... + a^{2n+1}$, với ($a \geq 2$, $n \in N^*$)

Bài tập khác : Chứng minh rằng **:**

a. $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + .. + 2^{60}$ chia hết cho 21 và 15
b. $B = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{11}$ chia hết cho 52
c. $C = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + .. + 5^{12}$ chia hết cho 30 và 31

Bài toán 3 : Tính tổng A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10

Lời giải 1 :

Nhận xét : Khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng là 1. Nhân 2 vế của A với 3 lần khoảng cách này ta được :

3A = 3.(1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10)
= 1.2.(3 - 0) + 2.3.(4 - 1) + 3.4.(5 - 2) + 4.5.(6 - 3) + 5.6.(7 - 4) + 6.7.(8 - 5) + 7.8.(9 - 6) + 8.9.(10 - 7) + 9.10.(11 - 8)
= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - … + 8.9.10 - 8.9.10 + 9.10.11
= 9.10.11 = 990.

A = 990/3 = 330

Ta chú ý tới đáp số 990 = 9.10.11, trong đó 9.10 là số hạng cuối cùng của A và 11 là số tự nhiên kề sau của 10, tạo thành tích ba số tự nhiên liên tiếp. Ta có kết quả tổng quát sau :

$$\boxed{A = 1.2 + 2.3 + \ldots + (n-1).n = (n-1).n.(n+1)/3}$$

Lời giải khác :

Lời giải 2 :

3.A = 3.(1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10)
= 3.(0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10)
= [1.(0 + 2) + 3.(2 + 4) + 5.(4 + 6) + 7.(6 + 8) + 9.(8 + 10)].3
= 3.(1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + 7.7.2 +9.9.2) = $(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2).2.3$
= $(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2).6 = 990 = 9.10.11$

Ta chưa biết cách tính tổng bình phương các số lẻ liên tiếp bắt đầu từ 1, nhưng liên hệ với lời giải 1, ta có :

$(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2).6 = 9.10.11$, hay
$(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2) = 9.10.11/6$

Ta có kết quả tổng quát :

$$\boxed{P = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n+1)^2 = (2n+1)(2n+2)(2n+3)/6}$$

Bài tập vận dụng : Tính các tổng sau :

1. $P = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ... + 99^2$

2. $Q = 11^2 + 13^2 + 15^2 + \dots + 2009^2$.
3. M = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + 99.100

Bài toán 3 : Cho A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10
C = A + 10.11. Tính giá trị của C.

Giải :

Theo cách tính A của bài toán 2, ta được kết quả là : C = 10.11.12/3

Theo cách giải 2 của bài toán 2, ta lại có :

C = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11
= (1.2 + 2.3) + (3.4 + 4.5) + (5.6 + 6.7) + (7.8 + 8.9) + (9.10 + 10.11)
= 2(1 + 3) + 4(3 + 5) + 6(5 + 7) + 8 (7 + 9) + 10(9 + 11)
= 2.4 + 4.8 + 6.12 + 8.16 + 10.20 = 2.2.2 + 2.4.4 + 2.6.6 + 2.8.8 + 2.10.10
$= 2.2^2 + 2.4^2 + 2.6^2 + 2.8^2 + 2.10^2 = 2.(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2)$

Vậy $C = 2.(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2) = 10.11.12/3$ .Từ đó ta có :

$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 10.11.12/6$

Ta lại có kết quả tổng quát là :

$$\boxed{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = 2n.(2n + 1).(2n + 2)/6}$$

Bài tập áp dụng :

1. Tính tổng : $20^2 + 22^2 + \dots + 48^2 + 50^2$.
2. Cho n thuộc N*. Tính tổng :
$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + \dots + (n + 100)^2$.

Hướng dẫn giải : Xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ .Bài toán có một kết quả duy nhất, không phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của n.

3.Tính tổng A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ..+ 999.1000

Bài toán 4 : Chứng minh rằng :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n.(n + 1)(2n + 1)/6$

Lời giải 1 :

Xét trường hợp n chẵn :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (n - 1)^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + n^2)$
= [(n – 1).n.(n + 1) + n.(n + 1).(n + 2)]/6
= n.(n + 1).(n -1 + n + 2)/6 = n.(n + 1).(2n + 1)/6

Tương tự với trường hợp n lẻ, ta có

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + n^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (n - 1)^2)$
= n(n + 1)(n + 2)/6 + (n – 1)n(n + 1)/6
= n(n + 1)(n + 2 + n – 1)/6
= n(n + 1)(2n + 1) /6 (đpcm)

Lời giải 2 :

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$

S = 1.1 + 2.2 + 3.3 +4.4 + … + n.n = 1.(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + 4(5-1) + …n[(n+1)-1]
= 1.2 – 1+ 2.3 – 2 + 3.4 – 3 + 4.5 – 4 +…+ n(n + 1) – n
= 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + …+ n(n + 1) – (1 + 2 + 3 +4 + … + n)

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).\left(\frac{n+2}{3} - \frac{1}{2}\right) = n(n+1)\frac{2n+4-3}{6}$$

Vậy $S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Vậy ta có công thức tính tổng của dãy số chính ph- ơng bắt đầu từ 1 là :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n.(n + 1)(2n + 1)/6$$

Bài tập áp dụng : Tính giá trị của các biểu thức sau:

$N = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + 99^2$

$A = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \ldots + 10000$

$B = - 1^2 + 2^2 – 3^2 + 4^2 - \ldots - 19^2 + 20^2$.

Gợi ý:

Tách $B = (2^2 + 4^2 + \ldots + 20^2) – (1^2 + 3^2 + \ldots + 19^2)$; tính tổng các số trong mỗi ngoặc đơn rồi tìm kết quả của bài toán.

Bài toán 5 . Tính : A = 1.3 + 3.5 + 5.7 + …+ 97.99

Giải

Nhận xét : Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 2 , nhân hai vế của A với 3 lần khoảng cách này ta được :

6A = 1.3.6 + 3.5.6 + 5.7.6 + …+ 97.99.6

= 1.3.(5 + 1) + 3.5.(7 - 1) + 5.7(9 - 3) + …+ 97.99(101 - 95)

= 1.3.5 + 1.3 + 3.5.7 - 1.3.5 + 5.7.9 - 3.5.7 + … + 97.99.101 - 95.97.99

= 1.3.5 + 3 + 3.5.7 - 1.3.5 + 5.7.9 - 3.5.7 + …+ 97.99.101 - 95.97.99

= 3 + 97.99.101

$$A = \frac{1 + 97.33.101}{2} = 161\,651$$

Trong bài toán 2 ta nhân A với 3. Trong bài toán 5 ta nhân A với 6 Ta có thể nhận thấy để làm xuất hiện các hạng tử đối nhau ta nhân A với 3 lần khoảng cách k giữa 2 thừa số trong mỗi hạng tử.

Bài toán 6 : Tính A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7 + 6.7.8 + 7.8.9 + 8.9.10.

Lời giải :

Trở lại bài toán 2. mỗi hạng tử của tổng A có hai thừa số thì ta nhân A với 3 lần khoảng cách giữa hai thừa số đó. Học tập cách đó , trong bà i nà y ta nhân hai vế của A với 4 lần khoảng cách đó vì ở đây mỗi hạng tử có 3 thừa số .Ta giải được bài toán nh- sau :

A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7 + 6.7.8 + 7.8.9 + 8.9.10

4A = (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7 + 6.7.8 + 7.8.9 + 8.9.10).4

4A = [1.2.3.(4 – 0) + 2.3.4.(5 – 1) + … + 8.9.10.(11 – 7)]

4A = (1.2.3.4 – 1.2.3.4 + 2.3.4.5 – 2.3.4.5 + … + 7.8.9.10 – 7.8.9.10 + 8.9.10.11)

4A = 8.9.10.11 = 1980.

Từ đó ta có kết quả tổng quát

$$A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + (n – 1).n.(n + 1).= (n -1).n.(n + 1)(n + 2)/4$$

Bài tập áp dụng : Tính các tổng sau :

A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ...+ 99.100.101

Bài toán 7 : Tính : A = 1.3.5 + 3.5.7 + …+ 5.7.9 + …+ 95.97.99

Giải :

8A = 1.3.5.8 + 3.5.7.8 + 5.7.9.8 + …+ 95.97.99.8

= 1.3.5(7 + 1) + 3.5.7(9 - 1) + 5.7.9(11 - 3) + …+ 95.97.99(101 - 93)
= 1.3.5.7 + 15 + 3.5.7.9 - 1.3.5.7 + 5.7.9.11 - 3.5.7.9 + … + 95.97.99.101 - 93.95.97.99
= 15 + 95.97.99.101

$$A = \frac{15 + 95.97.99.101}{8} = 11\,517\,600$$

Trong bài 6 ta nhân A với 4 (bốn lần khoảng cách). Trong bài 7 ta nhân A với 8 (bốn lần khoảng cách) vì mỗi hạng tử của A cũng có 3 thừa số.

Bài toán 8 : Tính A = 1.2 + 3.4 + 5.6 + …+ 99.100

Giải

A = 2 + (2+ 1).4 + (4 + 1)6 + …+ (98 + 1).100
= 2 + 2.4 + 4 + 4.6 + 6 + …+ 98.100 + 100
= (2.4 + 4.6 + …+ 98.100) + (2 + 4 + 6 + 8 + …+ 100)
= 98.100.102 : 6 + 102.50:2
= 166600 + 2550
= 169150

Cách khác :

A = 1.(3 - 1) + 3(5 - 1) + 5(7 - 1) + …+ 99(101 - 1)
= 1.3 - 1 + 3.5 - 3 + 5.7 - 5 + …+ 99.101 - 99
= (1.3 + 3.5 + 5.7 + …+ 99.101) - (1 + 3 + 5 + 7 + …+ 99)
= 171650 – 2500
= 169150

Trong bài toán này ta không nhân A với một số mà tách ngay một thừa số trong mỗi số hạng làm xuất hiện các dãy số mà ta đã biết cách tính hoặc dễ dàng tính đ□ợc.

Bài tập áp dụng

1. Tính A = 1.2.3 + 3.4.5 + 5.6.7 + …+ 99.99.100

Giải :

A = 1.3.(5 – 3) + 3.5.(7 – 3) + 5.7.(9 - 3) + …+ 99.101.(103 – 3)
= (1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + …+ 99.101.103) – (1.3.3 + 3.5.3 + …+ 99.101.3)
= (15 + 99.101.103.105): 8 – 3(1.3 + 3.5 + 5.7 +…+ 99.101)
= 13517400 – 3.171650
= 13002450

2. Tính A = $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + … + 99.100^2$

Giải :

A = 1.2.(3 - 1) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 1) + …+ 99.100.(101 - 1)
= 1.2.3 - 1.2 + 2.3.4 - 2.3 + 3.4.5 - 3.4 + …+ 99.100.101 - 99.100
= (1.2.3 + 2.3.4 + …+ 99.100.101) - (1.2 + 2.3 + 3.4 + …+ 99.100)
= 25497450 – 333300
= 25164150

Bài tập áp dụng :

1. Tính A = $1^2 + 4^2 + 7^2 + … + 100^2$.
2. Tính B = $1.3^2 + 3.5^2 + 5.7^2 + … + 97.99^2$.
3. Tính A = 1.99 + 2.98 + 3.97 + …+ 49.51+ 50.50
4. Tính B = 1.3 + 5.7 + 9.11 + …+ 97.101

5. Tính $C = 1.3.5 - 3.5.7 + 5.7.9 - 7.9.11 + \ldots - 97.99.101$
6. Tính $D = 1.99 + 3.97 + 5.95 + \ldots + 49.51$
7. Tính $E = 1.3^3 + 3.5^3 + 5.7^3 + \ldots + 49.51^3$
8. Tính $F = 1.99^2 + 2.98^2 + 3.97^2 + \ldots + 49.51^2$

Bài toán 9 : Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + n^3$

Lời giải :

Trước hết ta chứng minh một kêt quả sau đây : với n là số tự nhiên thì ta có

$n^2 - n = (n-1)(n+1)$. Thật vậy : $n^2 - n = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) =$
$n[(n^2 - n) + (n-1)] = n[n(n-1) + (n-1)] = (n-1)n(n+1)$ đpcm

□p dụng kết quả trên để tính S

Ta có $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + n^3$

$S = 1^3 - 1 + 2^3 - 2 + 3^3 - 3 + 4^3 - 4 + 5^3 - 5 + \ldots + n^3 - n + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

$S = 0 + 2(2^2 - 1) + 3(3^2 - 1) + 4(4^2 - 1) + \ldots + n(n^2 - 1) + (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)$

$S = 0 + 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \ldots + (n-1)n(n+1) + (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)$

$$S = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\left[\frac{(n-1)(n+2)}{4} + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= n(n+1).\frac{n^2+n-2+2}{4} = n(n+1).\frac{n(n+1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Nhận xét Vì $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$, nên ta có kết quả rất quan trọng sau đây :

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n)^2}$$

Bài toán 10 : Tính các tổng sau :

a) $A = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{10 \text{ chữ số } 9}$

b) $B = 1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{10 \text{ chữ số } 1}$

c) $C = 4 + 44 + 444 + 4444 + \ldots + \underbrace{444\ldots4}_{10 \text{ chữ số } 4}$

Giải :

a) $A = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{10 \text{ chữ số } 9}$

$= 10^1 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \ldots + 10^{10} - 1 = 10^1 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{10} - 10$

$= (10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots + 10^{10}) - 10 = \underbrace{111\ldots11}_{10 \text{ số } 1}0 - 10 = \underbrace{111\ldots1}_{9 \text{ số } 1}00$

b) $B = 1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{100 \text{ chữ số } 1}$

$9B = 9.(1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{10 \text{ chữ số } 1}) = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{10 \text{ chữ số } 9}$

$9B = \underbrace{111...1}_{9\ số\ 1}00$ (Theo kết quả của câu a)

Vậy $B = \underbrace{111...1}_{9\ số\ 1}00 / 9$

c) $C = 4 + 44 + 444 + 4444 + ... + \underbrace{444...4}_{10\ chữ\ số\ 4} = 4(1 + 11 + 111 + 1111 + ... + \underbrace{111...1}_{10\ chữ\ số\ 1})$

$9C = 9.4.(1 + 11 + 111 + 1111 + ... + \underbrace{111...1}_{10\ chữ\ số\ 1})$

$= 4.(9 + 99 + 999 + 9999 + ...+ \underbrace{999...9}_{10\ chữ\ số\ 9}) = 4. \underbrace{111...1}_{9\ số\ 1}00 = \underbrace{444...4}_{9\ số\ 4}00$

Vậy $C = \underbrace{444...4}_{9\ số\ 4}00 / 9$

Bài tập áp dung :

Tính các tổng sau :

$A = 2 + 22 + 222 + 2222 + ... + \underbrace{222...2}_{10\ chữ\ số\ 2}$

$B = 3 + 33 + 333 + 3333 + ... + \underbrace{333...3}_{20\ chữ\ số\ 3}$

$C = 5 + 55 + 555 + 5555 + ... + \underbrace{555...5}_{10\ chữ\ số\ 5}$

Bài toán 1. Tính $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 99.100$

Để tính A ta biến đổi A để xuất hiện các hạng tử đối nhau. Muốn vậy ta cần tách một thừa số trong mỗi hạng tử thành một hiệu : a = b - c

Giải:

$3A = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \ldots + 99.100.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4 - 1) + 3.4.(5 - 2) + \ldots + 99.100.(101 - 98)$

$= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \ldots + 99.100.101 - 98.99.100$

$= 99.100.101$

$\Rightarrow A = 33.100.101 = 333\ 300$

2) Một số dãy số dễ dàng tính đ�ợc

$1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$a + (a + k) + (a + 2k) + \ldots + (a + nk)$ k là hằng số

II) Khai thác bài toán 1

Trong bài toán 1 . Các thừa số trong mỗi hạng tử hơn kém nhau 1 hay cách nhau 1 đơn vị. Thay đổi khoảng cách giữa các thừa số trong mỗi hạng tử ta có bài toán 2.

Bài toán 2 . Tính :$A = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + 97.99$

Giải

$6A = 1.3.6 + 3.5.6 + 5.7.6 + \ldots + 97.99.6$

$= 1.3.(5 + 1) + 3.5.(7 - 1) + 5.7(9 - 3) + \ldots + 97.99(101 - 95)$

$= 1.3.5 + 1.3 + 3.5.7 - 1.3.5 + 5.7.9 - 3.5.7 + \ldots$

$+ 97.99.101 - 95.97.99$

$= 1.3.5 + 3 + 3.5.7 - 1.3.5 + 5.7.9 - 3.5.7 + \ldots$

$+ \ 97.99.101 \ - \ 95.97.99$

$= 3 \ + \ 97.99.101$

$$\Rightarrow \ A = \frac{1+97.33.101}{2}$$

$= 161\,651$

Trong bài toán 1 ta nhân A với 3 (a = 3) . Trong bài toán 2 ta nhân A với 6 (a = 6). Ta có thể nhận thấy để làm xuất hiện các hạng tử đối nhau ta nhân A với 3 lần khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi hạng tử.

$3k\,n(n \ + \ k) = n(n \ + \ k)(r \ + \ 2k) \ - \ (n \ - \ k)\,n\,(n \ + \ k)$

Thay đổi số các thừa số trong tích ta có bài toán 3

Bài toán 3 : Tính $A = 1.2.3 \ + 2.3.4 \ + \ldots + \ 98.99.100$

Giải :

$4A = 1.2.3.4 \ + \ 2.3.4.4 \ + \ 3.4.5.4 \ + \ldots + \ 98.99.100.4$

$= 1.2.3.4 \ + \ 2.3.4(5 \ - \ 1) \ + \ 3.4.5(6 \ - \ 2) \ + \ldots + \ 98.99.100(101 \ - \ 97)$

$= 1.2.3.4 \ + \ 2.3.4.5 \ - \ 1.2.3.4 \ + \ 3.4.5.6 \ - \ 2.3.4.5 \ + \ldots$

$+ \ 98.99.100.101 \ - \ 97.98.99.100$

$= 98.99.100.101$

$\Rightarrow \ A = 98.99.25.101$

$= 24\,497\,550$

Thay đổi khoảng cách giữa các thừa số trong mỗi hạng tử ở bài 3 ta có bài toán:

Bài toán 4 : Tính :

$$A = 1.3.5 \ + \ 3.5.7 \ + \ldots + \ 5.7.9 \ + \ldots + \ 95.97.99$$

Giải :

$8A = 1.3.5.8 \ + \ 3.5.7.8 \ + \ 5.7.9.8 \ + \ldots + \ 95.97.99.8$

$= 1.3.5(7 + 1) \ + \ 3.5.7(9 - 1) \ + \ 5.7.9(11 - 3) \ + \ldots + \ 95.97.99(101 - 93)$

$= 1.3.5.7 + 15 \ + \ 3.5.7.9 \ - \ 1.3.5.7 \ + \ 5.7.9.11 - \ 3.5.7.9 \ + \ldots$

$+ \ 95.97.99.101 - 93.95.97.99$

$= 15 + 95.97.99.101$

$$\Rightarrow \ A = \frac{15 + 95.97.99.101}{8}$$

$= 11\ 517\ 600$

Trong bài 3 ta nhân A với 4 (bốn lần khoảng cách). Trong bài 4 ta nhân A với 8 (bốn lần khoảng cách). Nh- vậy để giải bài toán dạng $\sum_{n=1}^{n} n(n+k)(n+2k)$ ta nhân với 4k (4 lần khoảng cách) sau đó tách

$$4kn(n + k)(n + 2k) = n(n + k)(n + 2k)(n + 3k) - (n - k)(n + k)n(n + 2k)$$

Thay đổi sự kế tiếp lặp lại ở các thừa số trong bài toán 1 ta có bài toán:

Bài toán 5 : Tính

$$A = 1.2 + 3.4 + 5.6 + \ldots + 99.100$$

Giải

$A = 2 + (2+ 1).4 + (4 + 1)6 + \ldots + (98 + 1).100$

$= 3 + 2.4 + 4 + 4.6 + 6 + \ldots + 98.100 + 100$

$= (2.4 + 4.6 + \ldots + 98.100) + (2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100)$

$= 98.100.102 : 6 + 102.50:2$

$= 166600 + 2550$

$= 169150$

Cách khác

$A = 1.(3 - 1) + 3(5 - 1) + 5(7 - 1) + \ldots + 99(101 - 1)$

$= 1.3 - 1 + 3.5 - 3 + 5.7 - 5 + \ldots + 99.101 - 99$

$= (1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + 99.101) - (1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 99)$

$= \ 171650 - \ 2500$

$= 169150$

Trong bài toán này ta không nhân A với một số hạng mà tách ngay một thừa số trong tích làm xuất hiện các dãy số mà ta đã biết cách tính hoặc dễ dàng tính đ- ợc. Làm t- ơng tự với các bài toán:

Bài toán 6 : Tính

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 100^2$$

Giải :

$A = 1 + 2(1 + 1) + 3(2 + 1) + 4(3 + 1) + \ldots + 100(99 + 1)$

$= 1 + 1.2 + 2 + 2.3 + 3 + 3.4 + 4 + \ldots + 99.100 + 100$

$= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 99.100) + (1 + 2 + 3 + \ldots + 100)$

$= 333300 + 5050$

$= 338350$

Thay đổi khoảng cách giữa các cơ số trong bài 6 ta có bài toán:

Bài toán 7: Tính

$$A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2$$

Giải :

$A = 1 + 3(2 + 1) + 5(2 + 3) + 7(2 + 5) + \ldots + 99(2 + 97)$

$= 1 + 2.3 + 1.3 + 2.5 + 3.5 + 2.7 + 5.7 + \ldots + 2.99 + 97.99$

$= 1 + 2(3 + 5 + 7 + \ldots + 99) + (1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + 97.99)$

$= 1 + 4998 + 161651$

$= 166650$

Trong bài toán 5 và 7 có thể sử dụng : $(n - a) \times ((n + a) = n^2 - a^2$

$$\Rightarrow n^2 = (n - a)(n + a) + a^2$$

a là khoảng cách giữa các cơ số

Bài toán 8 Tính

$$A = 1.2.3 + 3.4.5 + 5.6.7 + \ldots + 99.99.100$$

Giải :

$A = 1.3.(5 - 3) + 3.5.(7 - 3) + 5.7.(9 - 3) + \ldots + 99.101.(103 - 3)$

$= (1.3.5 + 3.5.7 + \ldots + 5.7.9 + \ldots + 99.101.103)$

$- (1.3.3 + 3.5.3 + \ldots + 99.101.3)$

$= (15 + 99.101.103.105) : 8 - 3(1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + 99.101)$

$= 13517400 - 3.171650$

$= 13002450$

Thay đổi số mũ của bài toán 7 ta có bài toán:

Bài toán 9 : Tính

$$A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3$$

Giải

Sử dụng : $(n - 1)n(n + 1) = n^3 - n$

$\Rightarrow n^3 = n + (n - 1)n(n + 1)$

$\Rightarrow A = 1 + 2 + 1.2.3 + 3 + 2.3.4 + \ldots + 100 + 99.100.101$

$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 100) + (1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + 99.100.101)$

$= 5050 + 101989800 = 101994850$

Thay đổi khoảng cách giữa các cơ số ở bài toán 8 ta có bài toán .

Bài toán 10: Tính

$$A = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 99^3$$

Giải : Sử dụng $(n - 2)n(n + 2) = n^3 - 4n$

$\Rightarrow n^3 = (n - 2)n(n + 2) + 4n$

$\Rightarrow A = 1 + 1.3.5 + 4.3 + 3.5.7 + 4.5 + \ldots + 97.99.101 + 4.99$

$= 1 + (1.3.5 + 3.5.7 + \ldots + 97.99.101) + 4(3 + 5 + 7 + \ldots + 99)$

$= 1 + 12487503 + 9996 = 12497500$

Với khoảng cách là a ta tách : $(n - a)n(n + a) = n^3 - a^2n$.

□ bài toán 8, 9 ta có thể làm nh- bài toán 6, 7.

Thay đổi số mũ của một thừa số trong bài toán 1 ta có:

Bài toán 11: Tính

$A = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots + 99.100^2$

Giải :

$A = 1.2.(3 - 1) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 1) + \ldots + 99.100.(101 - 1)$

$= 1.2.3 - 1.2 + 2.3.4 - 2.3 + 3.4.5 - 3.4 + \ldots + 99.100.101 - 99.100$

$= (1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + 99.100.101) - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 99.100)$

$= 25497450 - 333300$

$= 25164150$

Với cách khai thác nh- trên ta có thể khai thác, phát triển các bài toán trên thành rất nhiều bài toán hay mà trong quá trình giải đòi hỏi học sinh phải có sự linh hoạt, sáng tạo.

Trong các bài toán trên ta có thể thay đổi số hạng cuối cùng của dãy bằng số hạng tổng quát theo quy luật của dãy.

*Vận dụng cách giải trên hãy giải các bài toán sau:

1. *Tính* $A = 1.99 + 2.98 + 3.97 + \ldots + 49.51 + 50.50$

2. *Tính* $B = 1.3 + 5.7 + 9.11 + \ldots + 97.101$

3 *Tính* $C = 1.3.5 - 3.5.7 + 5.7.9 - 7.9.11 + \ldots - 97.99.101$

4. *Tính* $D = 1.99 + 3.97 + 5.95 + \ldots + 49.51$

5. *Tính* $E = 1.3^3 + 3.5^3 + 5.7^3 + \ldots + 49.51^3$

6. *Tính* $F = 1.99^2 + 2.98^2 + 3.97^2 + \ldots + 49.51^2$

M□T S□ PH□□NG PH□P T□NH T□NG

I > PH□ƠNG PHÁP DỰ ĐOÁN VÀ QUY NẠP :

Trong một số tr- ờng hợp khi gặp bài toán tính tổng hữu hạn

$Sn = a_1 + a_2 + ... a_n$ (1)

Bằng cách nào đó ta biết đ- ợc kết quả (dự đoán , hoặc bài toán chứng minh khi đã cho biết kết quả). Thì ta nên sử dụng ph- ơng pháp này và hầu nh- thế nào cũng chứng minh đ- ợc .

Ví dụ 1 : Tính tổng $S_n = 1+3+5 +... + (2n -1)$

Thử trực tiếp ta thấy : $S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 3 = 2^2$

$S_3 = 1+ 3+ 5 = 9 = 3^2$

... ...

Ta dự đoán $Sn = n^2$

Với n = 1;2;3 ta thấy kết quả đúng

giả sử với n= k ($k \geq 1$) ta có $S_k = k^2$ (2)

ta cần phải chứng minh $S_k + 1 = (k +1)^2$ (3)

Thật vậy cộng 2 vế của (2) với 2k +1 ta có

$1+3+5 +... + (2k - 1) + (2k +1) = k^2 + (2k +1)$

vì $k^2 + (2k +1) = (k +1)^2$ nên ta có (3) tức là $S_{k+1} = (k +1)^2$

theo nguyên lý quy nạp bài toán đ- ợc chứng minh

vậy $Sn = 1+3=5 + ... + (2n -1) = n^2$

T- ơng tự ta có thể chứng minh các kết quả sau đây bằng ph- ơng pháp quy nạp toán học .

1, $1 + 2+3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2, $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3, $1^3+2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4, $1^5 + 2^5 + ... + n^5 = \frac{1}{12}.n^2 (n + 1)^2 (2n^2 + 2n - 1)$

II > Ph□ơng pháp khử liên tiếp :

Giả sử ta cần tính tổng (1) mà ta có thể biểu diễn a_i , i = 1,2,3...,n , qua hiệu hai số hạng liên tiếp của 1 dãy số khác , chính xác hơn , giả sử : $a_1 = b_1 - b_2$

$a_2 = b_2 - b_3$

....

$a_n = b_n - b_{n+1}$

khi đó ta có ngay :

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + ... + (b_n - b_{n+1})$$

$$= b_1 - b_{n+1}$$

Ví dụ 2 : tính tổng :

$$S = \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + ... + \frac{1}{99.100}$$

Ta có : $\frac{1}{10.11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{11}$, $\frac{1}{11.12} = \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$, $\frac{1}{99.100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$

Do đó :

$$S = \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$$

- Dạng tổng quát

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n > 1)$$

$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

Ví dụ 3 : tính tổng

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Ta có $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Ví dụ 4 : tính tổng

S_n = 1! +2.2 ! + 3.3 ! + ... + n .n! (n! = 1.2.3 ....n)

Ta có : 1! = 2! -1!

2.2! = 3 ! -2!

3.3! = 4! -3!

....

n.n! = (n + 1) – n!

Vậy S_n = 2! - 1! +3! – 2 ! + 4! - 3! +...... + (n+1) ! – n!

= (n+1) ! - 1! = (n+ 1) ! - 1

Ví dụ 5 : tính tổng

$$S_n = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + ... + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$$

Ta có : $\frac{2i+1}{[i(i+1)]^2} = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}$; i = 1 ; 2 ; 3; ....; n

Do đó $S_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

III > Ph�ơng pháp giải ph�ơng trình với ẩn là tổng cần tính:

<u>Ví dụ 6</u> : Tính tổng

$S = 1+2+2^2 + \ldots\ldots. + 2^{100}$ (4)

ta viết lại S nh- sau :

$S = 1+2\ (1+2+2^2 + \ldots\ldots. + 2^{99})$

$S = 1+2\ (\ 1 +2+2^2+ \ldots\ldots + 2^{99} + 2^{100} - 2^{100}\ )$

$\Rightarrow S= 1+2\ (\ S - 2^{100}\ )$ (5)

Từ (5) suy ra $S = 1+ 2S - 2^{101}$

⇨ $S = 2^{101} - 1$

<u>Ví dụ 7</u> : tính tổng

$S_n = 1+ p + p^2 + p^3 + \ldots.. + p^n\ (\ p \neq 1)$

Ta viết lại S_n d- ới dạng sau :

$S_n = 1+p\ (\ 1+p+p^2 + \ldots. + p^{n-1}\ )$

$S_n = 1 + p\ (\ 1+p + p^2 + \ldots.. + p^{n-1} + p^n - p^n\ )$

⇨ $S_n = 1+p\ (\ S_n - p^n\ )$

⇨ $S_n = 1 + p.S_n - p^{n+1}$

⇨ $S_n\ (\ p - 1\ ) = p^{n+1} - 1$

⇨ $S_n = \frac{P^{n+1} - 1}{p - 1}$

<u>Ví dụ 8</u> : Tính tổng

$S_n = 1+ 2p + 3p^2 + \ldots. + (\ n+1\ )\ p^n\ ,\ (\ p \neq 1)$

Ta có : $p.S_n = p + 2p^2 + 3p^3 + \ldots.. + (\ n+ 1)\ p^{n+1}$

$= 2p - p + 3p^2 - p^2 + 4p^3 - p^3 + \ldots\ldots + (n+1)\ p^n - p^n + (n+1)p^n - p^n + (\ n+1)\ p^{n+1}$

$= (\ 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots\ldots + (n+1)\ p^n\ ) - (\ p + p + p + \ldots.\ p^n\ ) + (\ n+1)\ p^{n+1}$

$= (\ 1+ 2p+ 3p^2+4p^3+ \ldots\ldots. + (\ n+1)\ p^n\ ) - (\ 1 + p+ p^2 + \ldots. + p^n) + (\ n +1\ )\ p^{n+1}$

$p.S_n = S_n - \frac{P^{n+1}-1}{P-1} + (n+1)P^{n+1}$ (theo VD 7)

Lại có $(p-1)S_n = (n+1)p^{n+1} - \frac{p^{n+1}-1}{P-1}$

⇨ $S_n = \frac{(n+1)P^{n+1}}{p-1} - \frac{p^{n+1}-1}{(P-1)^2}$

IV > Ph□ơng pháp tính qua các tổng đã biết

- Các kí hiệu : $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$
- Các tính chất :

1, $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

2, $\sum_{i=1}^{n} a.a_i = a\sum_{i=1}^{n} a_i$

Ví dụ 9 : Tính tổng :

$S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1)$

Ta có : $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n}(i^2 + i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$

Vì :

$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (Theo I)

cho nên : $S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Ví dụ 10 : Tính tổng :

$S_n = 1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n-1)$

ta có : $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(3i-1) = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 - i)$

$= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i==1}^{n} i$

Theo (I) ta có :

$$S_n = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$$

Ví dụ 11 . Tính tổng

$S_n = 1^{3+} + 2^3 + 5^3 + ... + (2n+1)^3$

ta có :

$S_n = [(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + (2n+1)^3] - [2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + (2n)^3]$

$= [1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + (2n+1)^3] - 8(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3)$

$$S_n = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} - \frac{8n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{(theo (I) – 3)}$$

$=(n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2$

$= (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$

V/ Vận dụng trực tiếp công thức tính tổng các số hạng của dãy số cách đều (Học sinh lớp 6)

- Cơ sở lý thuyết :

+ để đếm số hạng của 1 dãy số mà 2 số hạng liên tiếp của dãy cách nhau cùng 1 số đơn vị , ta dùng công thức:

Số số hạng = (số cuối – số đầu 0 : (khoảng cách) + 1

+ Để tính tổng các số hạng của một dãy số mà 2 số hạng liên tiếp cách nhau cùng 1 số đơn vị , ta dùng công thức:

Tổng = (số đầu – số cuối) .(số số hạng) :2

Ví dụ 12 :

Tính tổng A = 19 +20 +21 +.... + 132

Số số hạng của A là : (132 – 19) : 1 +1 = 114 (số hạng)m

A = 114 (132 +19) : 2 = 8607

Ví dụ 13 : Tính tổng

B = 1 +5 +9 +.......+ 2005 +2009

số số hạng của B là (2009 – 1) : 4 + 1 = 503

B = (2009 +1) .503 :2 = 505515

VI / Vân dụng 1 số công thức chứng minh đ- ợc vào làm toán

Ví dụ 14 : Chứng minh rằng : k (k+1) (k+20 -9k-1)k(k+1) = 3k (k +1)

Từ đó tính tổng S = 1..2+2.3 + 3.4 +...... + n (n + 1)

Chứng minh : cách 1 : VT = k(k+1)(k+2) – (k-1) k(k+1)

$= k(k+1) \left[(k+2)-(k-1)\right]$

= k (k+1) .3

= 3k(k+1)

Cách 2 : Ta có k (k +1) = k(k+1).$\frac{(k+2)-(k-1)}{3}$

$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} - \frac{k(k+1)(k-1)}{3}$ *

⇨ 3k (k-1) = k (k+1)(k+2) – (k-1) k(k+1)

=> $1.2 = \frac{1.2.3}{3} - \frac{0.1.2}{3}$

$2.3 = \frac{2.3.4}{3} - \frac{1.2.3}{3}$

....

$n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

S = $\frac{-1.2.0}{3} + \frac{(n+2)n(n+1)}{3} = \frac{(n+1)n(n+2)}{3}$

<u>Ví dụ 15</u> : Chứng minh rằng :

k (k+1) (k+2) (k+3) – (k-1) k(k+1) (k+2) =4k (k+1) (k+2)

từ đó tính tổng S = 1.2 .3 + 2.3 .4 +3.4.5 +.... + n(n+1) (n+2)

Chứng minh : VT = k(k+1) (k+2) $\left[(k+3)-(k-1)\right]$

= k(k+1) (k +2) .4

Rút ra : k(k+1) (k+2) = $\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} - \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}$

áp dụng : 1.2.3 = $\frac{1.2.3.4}{4} - \frac{0.1.2.3}{4}$

2.3.4 = $\frac{2.3.4.5}{4} - \frac{1.2.3.4}{4}$

....

n(n+1) (n+2) = $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$

Cộng vế với vế ta đ- ợc S = $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

*** BÀI TẬP ĐỀ NGHI :**

Tính các tổng sau

1, B = 2+ 6 +10 + 14 + ... + 202

2, a, A = $1+2+2^2+2^3+.....+2^{6.2}+2^{63}$

b, S = $5+5^2+5^3+.....+5^{99}+5^{100}$

c, C = 7 + 10 + 13 + ... + 76

3, D = 49 +64 + 81+ .... + 169

4, S = 1.4 + 2 .5 + 3.6 + 4.7 +.... + n(n +3) , n = 1,2,3 ,....

5, S = $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+........+\frac{1}{99.100}$

6, S = $\frac{4}{5.7}+\frac{4}{7.9}+....+\frac{4}{59.61}$

7, A = $\frac{5}{11.16}+\frac{5}{16.21}+\frac{5}{21.26}+......+\frac{5}{61.66}$

8, M = $\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{3^{2005}}$

9, S_n = $\frac{1}{1.2.3.}+\frac{1}{2.3.4}+.....+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

10, $S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + ... + \frac{2}{98.99.100}$

11, $S_n = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

12, $M = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99..... .....9}_{\text{50 chữ số 9}}$

13, Cho: $S_1 = 1+2$ $S_3 = 6+7+8+9$

$S_2 = 3+4+5$ $S_4 = 10 +11 +12 +13 + 14$

Tính S_{100} =?

Trong quá trình bồi d- ỡng học sinh giỏi , tôi đã kết hợp các dạng toán có liên quan đến dạng tính tổng để rèn luyện cho các em , chẳng hạn dạng toán tìm x :

14, a, (x+1) + (x+2) + (x+3) +...... + (x+100) = 5070

b, 1 + 2 + 3 + 4 +............+ x = 820

c, $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + ... + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991}$

Hay các bài toán chứng minh sự chia hết liên quan

15, Chứng minh : a, $A = 4+ 2^2 +2^3 +2^4 +..... + 2^{20}$ là luỹ thừa của 2

b, $B =2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{60} \vdots 3 ; 7; 15$

c, $C = 3 + 3^3 +3^5 + ...+ 3^{1991} \vdots 13 ; 41$

d, $D = 11^9 + 11^8 +11^7 +......+ 11 +1 \vdots 5$