

BÀI TẬP HÌNH HỌC NÂNG CAO MÔN TOÁN LỚP 12

1. **Hệ thức lượng trong tam giác vuông** : cho ΔABC vuông ở A ta có :

a) Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $BA^2 = BH.BC$; $CA^2 = CH.CB$

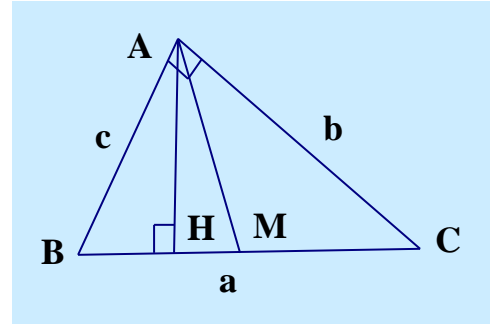
c) $AB.AC = BC.AH$; $AH^2 = BH.HC$

d) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

e) $BC = 2AM$

f) $\sin B = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$, $\tan B = \frac{b}{c}$, $\cot B = \frac{c}{b}$

g) $b = a. \sin B = a. \cos C$, $c = a. \sin C = a. \cos B$, $a = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C}$, $b = c. \tan B = c. \cot C$



2. **Hệ thức lượng trong tam giác thường**:

* Định lý hàm số Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

* Định lý hàm số Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

3. **Các công thức tính diện tích**.

a/ Công thức tính diện tích của tam giác:

$$S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} a.b \sin C = \frac{a.b.c}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Đặc biệt : * ΔABC vuông ở A : $S = \frac{1}{2} AB.AC$ * ΔABC đều cạnh a: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

* Đường cao tam giác đều = cạnh x $\frac{\sqrt{3}}{2}$ * Đường chéo hình vuông = cạnh x $\sqrt{2}$

b/ Diện tích hình vuông : $S = \text{cạnh} \times \text{cạnh}$ c/ Diện tích hình chữ nhật : $S = \text{dài} \times \text{rộng}$

d/ Diện tích hình thoi : $S = \frac{1}{2} (\text{chiều dài} \times \text{chiều ngắn})$ e/ Diện tích hình bình hành : $S = \text{đáy} \times \text{chiều cao}$

cao

f/ Diện tích hình thang : $S = \frac{1}{2} (\text{đáy lớn} + \text{đáy nhỏ}) \times \text{chiều cao}$

g. Diện tích hình tròn : $S = \pi.R^2$

4. Công thức thể tích

THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ: $V = B.h$ với { B : diện tích đáy; h : chiều cao

Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ với a, b, c là ba kích thước

Thể tích khối lập phương: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh

THỂ TÍCH KHỐI CHÓP: $V = \frac{1}{3} B.h$ với { B : diện tích đáy; h : chiều cao

TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN: Cho khối tứ diện SABC và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc

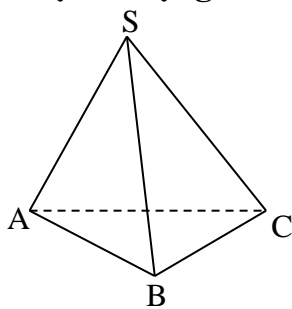
SA, SB, SC ta có: $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \frac{SB'}{SB} \frac{SC'}{SC}$

THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CỤT:

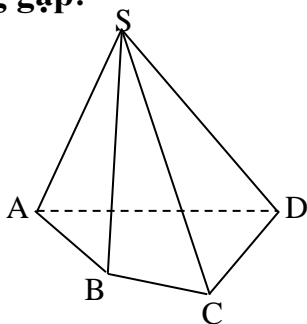
$$V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$$

với $\begin{cases} B, B' : \text{diện tích hai đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$

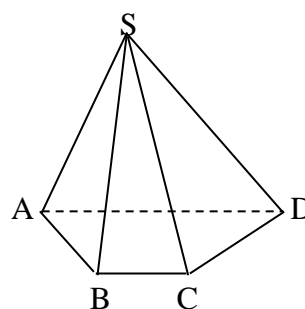
* Một số dạng hình thường gặp:



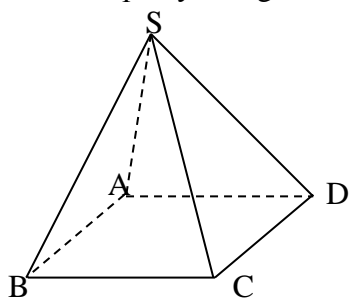
Hình chóp đáy tam giác



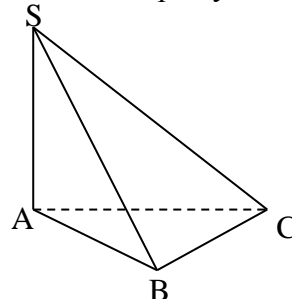
Hình chóp đáy tứ giác



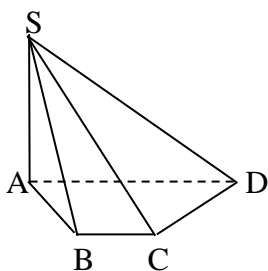
Hình chóp đáy hình thang



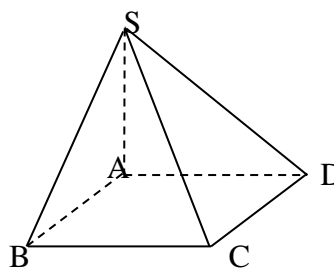
Hình chóp có đáy là hbh, ht, hcn, hv



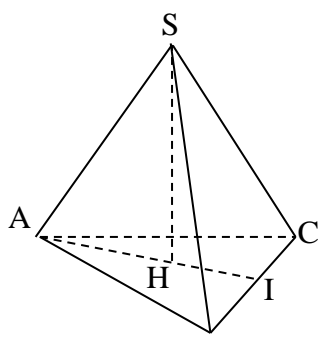
Hình chóp đáy tam giác có $SA \perp$ đáy



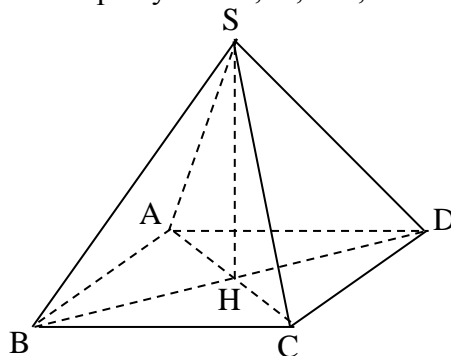
Hình chóp đáy hình thang có $SA \perp$ đáy



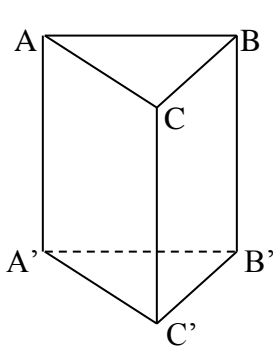
Hình chóp đáy là hbh, ht, hcn, hv có $SA \perp$ đáy



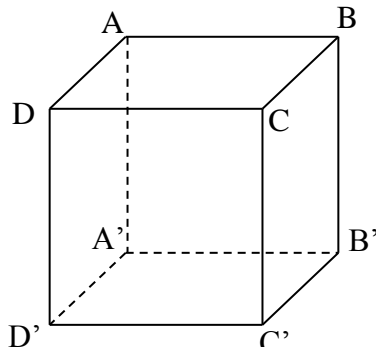
Hình chóp đều đáy tam giác



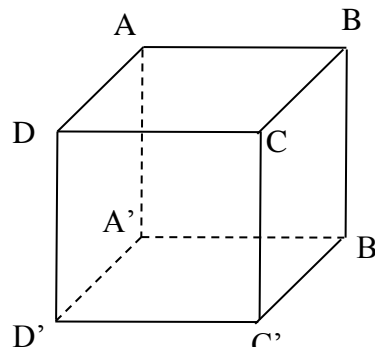
Hình chóp đều đáy tứ giác



Lăng trụ đứng tam giác



Hình hộp chữ nhật



Hình lập phương

BÀI TẬP

Bài 1: Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Các cạnh bên tạo với đáy một góc 60° .

Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Bài 2: Cho khối chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng 2a. Góc tạo bởi cạnh bên và đáy một góc 30° . Tính

thể tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = \frac{a^3 2\sqrt{3}}{9}$

Bài 3: Cho khối chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng 2a, cạnh bên bằng 2a. Tính thể tích của khối chóp

S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = \frac{a^3 2\sqrt{2}}{3}$

Bài 4: Cho khối chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Góc tạo bởi mặt bên và đáy một góc 60° . Tính thể

tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Bài 5: Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $SB \perp (ABCD)$. Biết $AB = 3a$,

$AC = 4a$, $SC = \sqrt{29}a$. Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = 4a^3$

Bài 6: Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Đs: $V_{D.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Bài 7: Cho khối chóp S.ABC có đường cao $SA = a$, đáy là tam giác vuông cân, $AB = BC = a$. B' là trung điểm của SB và C' là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}$

b. Chứng minh: $SC \perp (AB'C')$

c. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'. Đs: $V_{S.AB'C'} = \frac{a^3}{36}$

Bài 8: Cho hình chóp S.ABC, có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên cạnh SB, SC.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ b. Tính thể tích khối chóp S.AEF. Đs: $V_{S.AEF} = \frac{8a^3\sqrt{3}}{75}$

c. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S.AEF và ABCEF. Đs: $\frac{16}{9}$

Bài 9: Cho khối chóp tam giác đều S.ABC, có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng 2a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SB.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$ b. Tính thể tích khối chóp S.IJC. Đs: $V_{S.IJC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{48}$

Bài 10: Cho hình chóp S.ABC, có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh SA vuông góc với đáy ABC và cạnh SC tạo với đáy góc 30° . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của cạnh SB, SC.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{12}$ b. Tính thể tích khối chóp S.AIJ. Đs: $V_{S.AIJ} = \frac{a^3}{48}$

Bài 11: Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Góc $SAC = 45^\circ$. Tính thể tích hình chóp

S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Bài 12: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh SA vuông với đáy và

$SC = 2a$. Tính thể tích hình chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Bài 13: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 2a. Cạnh SB vuông với đáy và

$SC = 3a$. Tính thể tích hình chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD} = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$

Bài 14: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 2a. Cạnh $SB \perp (ABCD)$ và $SD = 3a$.

a. Chứng minh Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD} = \frac{4a^3}{3}$

Bài 15: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi và cạnh $AC = 2a$, $BD = a$. Cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{3}$

b. Chứng minh: $(SBD) \perp (SAC)$

Bài 29: Trong không gian Oxyz cho $M(1;-1;2)$, $N(2;0;1)$

a) Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng MN với mp(Oxy)

b) Điểm I chia đoạn MN theo tỉ số nào?

c) Tìm tọa độ điểm P đối xứng với M qua N

Bài 30: Trong không gian Oxyz cho $A(1;2;3)$, $B(0;4;-1)$, $C(3;-2;-5)$, $D(5;-6;3)$.

a) Chứng minh: ABCD là hình thang

b) Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, AD, CB và CD. Chứng minh: các tam giác APQ và CMN có cùng trọng tâm.

Bài 31: Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC có điểm $C(-2;2;2)$ và trọng tâm $G(-1;1;2)$

a) Tìm tọa độ các đỉnh A, B của tam giác ABC biết A thuộc mp(Oxy), B thuộc Oz

b) Gọi H là trung điểm của BC, E là điểm đối xứng của H qua A. Tìm tọa độ điểm K trên đường thẳng AC để B, E, K thẳng hàng.

Bài 32: Cho tam giác ABC có $A(2;3;1)$, $B(0;-1;2)$, $C(1;0;3)$.

a) Tìm tọa độ chân đường cao H hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ giao điểm D của đường thẳng AH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. (Hướng dẫn: sd tích vô hướng $HA.HD=HC.HB$)

Bài 33: Trong không gian Oxyz cho $A(1;1;2)$, $B(2;4;-1)$.

a) Tìm tọa độ các điểm A_1 và A_2 lần lượt là hình chiếu của A trên mp(Oxy) và trục Oz

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc mp(Oxy) để $MA+MB$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 34: Trong không gian Oxyz cho hình chữ nhật OABC có $A(0;0;3)$, $B(3;4;0)$. Gọi M là trung điểm BC.

a) Tìm tọa độ các điểm B và M

b) Tìm tọa độ điểm N trên cạnh AB để $ON \perp AM$

Bài 35: Cho tam giác ABC có $A(-2;0;1)$, $B(0;-1;1)$, $C(0;0;-1)$

a) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tính bán kính của đường tròn đó

b) Tìm tọa độ trục tâm H của tam giác ABC

Bài 36: Cho tam giác ABC có $A(0;0;2)$, $B(0;1;0)$, $C(1;2;3)$

a) Tìm tọa độ S thuộc Oy để tứ diện SABC có thể tích bằng 2

b) Tìm tọa độ hình chiếu H của O trên mp(ABC)

Bài 37: Cho $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(0;1;3)$. Lập phương trình mặt cầu trong mỗi trường hợp sau

a) Có tâm $I(3;2;-1)$ và tiếp xúc với đường thẳng AB

b) Có tâm K thuộc mp(Oyz) và tiếp xúc với mp(ABC) tại A

Bài 38: Cho mc (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z + 5 = 0$ và 3 điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;0;1)$, $C(-1;2;2)$.

a) Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu (S)

b) Chứng minh rằng đường thẳng AB cắt mặt cầu (S)

c) Chứng minh: mp(OAC) cắt mặt cầu (S), tìm bán kính đường tròn thiết diện.

Bài 39: Cho 4 điểm $A(2;5;-4)$, $B(1;6;3)$, $C(-4;-1;12)$, $D(-2;-3;-2)$

a) Chứng minh: ABCD là một hình thang

b) Tính diện tích hình thang ABCD

Bài 40: Cho tam giác ABC có $A(0;4;1)$, $B(1;0;1)$, $C(3;1;-2)$

a) Tìm tọa độ trục tâm H của tam giác ABC

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Bài 41: Cho các điểm $A(-1;2;0)$, $B(0;0;1)$, $C(0;3;0)$, $D(2;1;0)$

- Chứng minh: A, B, C, D là các đỉnh của một tứ diện. Tính V_{ABCD}
- Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của D trên mp(ABC)
- Tìm tọa độ điểm E đối xứng của D qua (ABC)

Bài 42: Cho tứ diện $OABC$ có $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;4)$. Viết phương trình mc ngoại tiếp tứ diện. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mc đó

Bài 43: Cho các điểm $A(0;-2;1)$, $B(-1;0;1)$, $C(0;0;-1)$. Lập phương trình mc có đường tròn lớn là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Bài 44: Xét phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(\sin t)x + 4(\cos t)y + m = 0$ (*)

- Tìm m để (*) là phương trình một mặt cầu với mọi t thuộc R . Tìm tâm và bán kính mc đó
- Tìm tập hợp tam của mc khi t thay đổi

Bài 45: Cho 4 điểm $A(3;2;0)$, $B(-1;3;2)$, $C(1;0;1)$, $D(0;-1;3)$. Tìm tập hợp những điểm M trong không gian thỏa mãn các điều kiện:

$$a) MA^2 + MB^2 = 23 \quad b) \left| \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} \right| = \left| \overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC} \right|$$

Bài 46: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-1;3;2)$, $B(0;-4;3)$, $C(4;1;-6)$ và các mp (P): $2x+y-z-3=0$ và (Q): $x+y+z=0$. Viết phương trình mp(Q) trong các trường hợp sau:

- Qua 3 điểm A, B, C
- Song song A, B và chứa giao tuyến của (P) và (Q).

Bài 47: Viết phương trình mp (α) trong mỗi trường hợp sau:

- (α) đi qua hai điểm $P(3;0;-1)$, $Q(0;-1;4)$ và vuông góc với mp: $2x-3y+5z+7=0$
- (α) qua điểm $M(2;1;3)$, song song với trục Oz và vuông góc với mp: $x+2y+5z-3=0$

Bài 48: Cho hai điểm $A(4;2;3)$, $B(0;-2;1)$

- Tìm trên trục Ox điểm M cách đều điểm A và mp(P): $x-y-3z-17=0$
- Viết phương trình (Q) biết (Q)//(P) và cách đều hai điểm A, B .

Bài 49: Cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;2)$. Tìm (C) thuộc Oz để mp(ABC) hợp với mp: $2x-2y-z+5=0$ một góc 60° .

Bài 50: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng AB với $A(0;0;1)$, $B(2;2;3)$ và tiếp xúc với mc: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$

Bài 52: Cho mp (P) và mc (S) có các phương trình: (P): $2x-3y+4z-5=0$ và (S):

$x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 4y - 5z + 6 = 0$. CMR: (P) cắt mặt cầu (S). Tính bán kính r và xác định tọa độ tâm H của đường tròn thiết diện.

Bài 52: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$. Lập phương trình mp(P) thỏa mãn điều kiện:

- (P) tiếp xúc với mc (S) tại $M(4;3;0)$
- (P) tiếp xúc với mc(S) biết rằng (P)//(Q): $x+3y-z+2=0$

Bài 53: Lập phương trình mặt cầu có tâm thuộc Oy và tiếp xúc với hai mp: $x+2y-2z-3=0$ và $x+2y-2z-5=0$

Bài 54: Cho đường thẳng d và mp(P): $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}$, (P): $x + y + z - 10 = 0$

- Chứng minh: d cắt (P). Tìm tọa độ giao điểm
- Tìm phương trình hình chiếu vuông góc của d lên (P).

Bài 55: Cho $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mp(P): $2x+y-2z+9=0$

- Tìm tọa độ I thuộc d sao cho $d(I, (P))=2$
- Tìm tọa độ giao điểm A của d và (P). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), biết Δ qua A và vuông góc với d .

Bài 66: Cho $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{-1}$ và các điểm $A(1;1;1)$, $B(1;-5;-2)$

- Chứng minh: các đường thẳng AB và d cùng nằm trên một mặt phẳng
- Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất.

Bài 57: Cho $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(0;1;3)$. Lập phương trình mặt cầu trong mỗi trường hợp sau

a) Có tâm $I(3;2;-1)$ và tiếp xúc với đường thẳng AB

b) Có tâm K thuộc mp(Oyz) và tiếp xúc với mp(ABC) tại A

Bài 58: Cho tứ diện $OABC$ có $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;4)$. Viết phương trình mc ngoại tiếp tứ diện. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mc đó

Bài 59: Cho các điểm $A(0;-2;1)$, $B(-1;0;1)$, $C(0;0;-1)$. Lập phương trình mc có đường tròn lớn là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .