BÀI TẬP HÌNH HỌC NÂNG CAO MÔN TOÁN 12

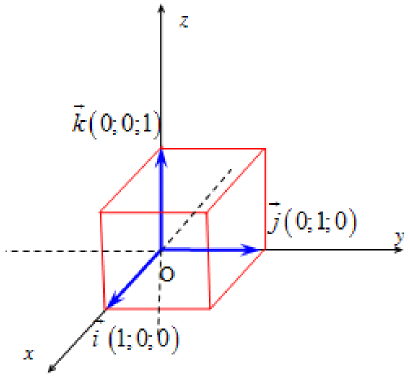
A. LÝ THUYẾT

1. Hệ tọa độ Đêcac vuông góc trong không gian:

Cho ba trục *Ox, Oy, Oz* vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc *O*. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục *Ox, Oy, Oz*. Hệ ba trục như vậy gọi là hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz hoặc đơn giản là hệ tọa độ Oxyz.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của vectơ:



a) Định nghĩa: $\vec{u} = (x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) Tính chất: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3),\ k \in R$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{0} = (0;0;0),\ \vec{i} = (1;0;0),\ \vec{j} = (0;1;0),\ \vec{k} = (0;0;1)$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\ (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}\ (k \in R)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},\quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ *(với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)*

3. Tọa độ của điểm:

a) Định nghĩa: $M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$ *(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)*

Chú ý:
- *M ∈ (Oxy) ⇔ z = 0; M ∈ (Oyz) ⇔ x = 0; M ∈ (Oxz) ⇔ y = 0*
- *M ∈ Ox ⇔ y = z = 0; M ∈ Oy ⇔ x = z = 0; M ∈ Oz ⇔ x = y = 0*

b) Tính chất: Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A),\ B(x_B;\ y_B;\ z_B)$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ điểm *M* chia đoạn *AB* theo tỉ số *k (k≠1)*: $M\left(\dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}\right)$
- Toạ độ trung điểm *M* của đoạn thẳng *AB*: $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

- Toạ độ trọng tâm *G* của tứ diện *ABCD*:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+z_C+z_C}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vectơ: *(Chương trình nâng cao)*

a) Định nghĩa: Cho $\vec{a}=(a_1,\,a_2,\,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\,b_2,\,b_3)$.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$$

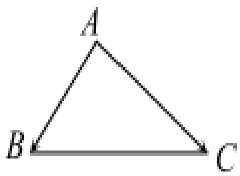
Chú ý: *Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.*

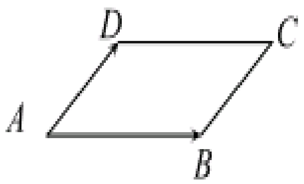
b) Tính chất:

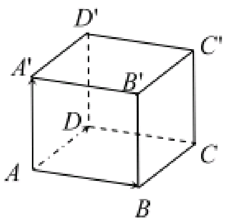
- $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$; $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$; $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$
- $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{a}$; $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{b}$
- $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
- $\vec{a},\,\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}$

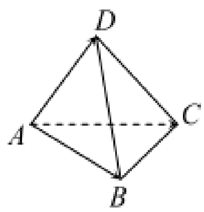
c) Ứng dụng của tích có hướng:

- ***Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:*** $\vec{a},\,\vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow[\vec{a},\vec{b}].\vec{c}=0$
- ***Diện tích hình bình hành ABCD:*** $S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- ***Diện tích tam giác ABC:*** $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- ***Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D':*** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- ***Thể tích tứ diện ABCD:*** $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$









Chú ý:

– ***Tích vô hướng*** *của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.*

– ***Tích có hướng*** *của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.*

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$$

$$\vec{a}\ \text{vaø}\ \vec{b}\ \text{cuøng phöông}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$$

$$\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}\ \text{ñoàng phaúng}\ \Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: các bài toán về tọa độ véc tơ, tọa độ điểm; sự bằng nhau, sự cùng phương của hai véc tơ

Bài 1: Trong không gian *Oxyz* cho $\vec{a}(1;2;-3),\vec{b}(-1;1;2),\vec{c}(3;4;3)$

a) Tìm tọa độ véc tơ $\vec{u}=3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$

b) Tìm y,z để véc tơ $\vec{v}=(-2;y;z)$ cùng phương với $\vec{u}$. Cho biết $\vec{v},\vec{u}$ cùng hướng hay ngược hướng

c) Chứng minh: $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương. Có tồn tại các số thực m,n để $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ không? Có kết luận gì về kết quả tìm được.

Bài 2: Trong không gian *Oxyz* cho 3 điểm *A(1;2;3), B(2;1;2), C(-3;3;1)*

a) CMR: *A,B,C* là ba đỉnh của một tam giác

b) Tìm tọa độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*

c) Tìm tọa độ điểm *D* để *ABCD* là hình bình hành và tìm tọa độ tâm I của hình bình hành đó.

Bài 3: Trong không gian *Oxyz* cho *M(1;-1;2), N(2;0;1)*

a) Tìm tọa độ giao điểm *I* của đường thẳng *MN* với mp(*Oxy*)

b) Điểm *I* chia đoạn *MN* theo tỉ số nào?

c) Tìm tọa độ điểm *P* đối xứng với *M* qua *N*

Bài 4: Trong không gian *Oxyz* cho *A(1;2;3), B(0;4;-1), C(3;-2;-5), D(5;-6;3).*

a) Chứng minh: *ABCD* là hình thang

b) Gọi *M,N,P,Q* lần lượt là trung điểm của các đoạn *AB, AD, CB* và *CD*. Chứng minh: các tam giác *APQ* và *CMN* có cùng trọng tâm.

Bài 5: Trong không gian *Oxyz* cho tam giác *ABC* có điểm *C*(-2;2;2) và trọng tâm *G*(-1;1;2)

a) Tìm tọa dộ các đỉnh *A, B* của tam giác *ABC* biết *A* thuộc mp(*Oxy*), *B* thuộc *Oz*

b) Gọi *H* là trung điểm của *BC, E* là điểm đối xứng của *H* qua *A*. Tìm tọa độ điểm *K* trên đường thẳng *AC* để *B, E, K* thẳng hàng.

Dạng 2: Bài toán về tích vô hướng của hai véc tơ và các ứng dụng của tích vô hướng

Những bài toán về tích vô hướng xoay quanh các chủ đề:

- *Tính tích vô hướng*
- *Tính độ dài véc tơ, độ dài đoạn thẳng*
- *Tính góc tạo bởi hai véc tơ, góc giữa hai đường thẳng*
- *Chứng minh tính vuông góc của hai véc tơ, hai đường thẳng*
- *Các bài toán liên quan và kết hợp các dạng trên*

Bài 1: Trong không gian *Oxyz* cho $\vec{a}(2;2;1),\vec{b}(-1;-1;2),\vec{c}(2;-4;-1)$

a) Tính $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}-3\vec{a})$ và $\cos(\vec{a},\vec{b})$

b) Xác định k để $\vec{d}=\vec{a}+k\vec{c}$ vuông góc với véc tơ $\vec{c}$

c) Tìm tọa độ véc tơ $\vec{u}$ có độ dài bằng 1 và cùng hướng với $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$

d) Tìm tọa độ véc tơ $\vec{w}$ biết $\vec{a}.\vec{w}=1,\quad \vec{b}.\vec{w}=7,\quad \vec{c}.\vec{w}=7$

Bài 2: Cho *A(-4;2;1), B(1;-3;1), C(3;2;2)*. Tìm tọa độ tâm *I* của mặt cầu đi qua 3 điểm *A, B, C* biết *I* thuộc mp(*Oyz*). Tính bán kính của mc đó.

Bài 3: Trong không gian *Oxyz* cho tam giác *ABC* có *A*(2;0;1), *B*(1;-1;2), *C*(2;3;1)

a) Chứng minh tam giác *ABC* có *A* là góc tù

b) Tính chu vi tam giác *ABC*

c) Tìm *M* thuộc *Oy* sao cho tam giác *MBC* vuông tại *M*

Bài 4: Trong không gian *Oxyz* cho tam giác *ABC* có *A*(2;-1;3), *B*(1;2;-1), *C*(-4;7;5). Các đường phân giác trong và ngoài của góc *A* của tam giác *ABC* cắt *BC* lần lượt tại *D* và *E*. Tìm tọa độ các điểm *D, E*.

Dạng 3: Bài toán về tích có hướng của hai véc tơ và các ứng dụng của tích có hướng

Những bài toán về tích có hướng xoay quanh các chủ đề:

- ✓ *Tính tích có hướng*
- ✓ *Xét sự đồng phẳng của ba véc tơ*
- ✓ *Phân tích một véc tơ theo ba véc tơ không đồng phẳng*
- ✓ *Tính diện tích của một tam giác, tứ giác*
- ✓ *Tính thể tích của một tứ diện, hình chóp*
- ✓ *Tìm tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác*
- ✓ *Các bài toán liên quan*

Bài 1: Trong không gian *Oxyz* cho $\vec{a}(4;3;4), \vec{b}(2;-1;1), \vec{c}(1;2;z), \vec{d}(-3;1;2)$

a) Tính $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ và tìm z để các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

b) Chứng minh các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ không đồng phẳng

c) Hãy biểu thị véc tơ $\vec{u}(-13;14;15)$ theo các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$

Bài 2: Cho ba điểm *A(2;0;0), B(0;3;1), C(-1;4;2).*

a) Chứng minh: *A,B,C* là 3 đỉnh của một tam giác

b) Tính diện tích tam giác và độ dài trung tuyến *AM*.

c) Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh *A* của tam giác *ABC*.

Bài 3: Cho các điểm *A*(1;0;1), *B*(0;0;2), *C*(0;1;1), *D*(-2;1;0)

a) Chứng minh: *A,B,C,D* là các đỉnh của một tứ diện

b) Tìm tọa độ trọng tâm *G* của tứ diện *ABCD* và góc tạo bởi hai đường thẳng *AC* và *BD*

c) Tính thể tích của tứ diện *ABCD* và khoảng cách từ *A* đến mp(*BCD*)

Dạng 4: Các bài toán về phương trình mặt cầu

Những bài toán về mặt cầu xoay quanh các chủ đề:

1) Lập phương trình mặt cầu: có hai cách

a) Tìm tâm và bán kính và sử dụng pt $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

b) Áp dụng phương trình $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$

2) Tìm tâm và bán kính của mặt cầu

3) Các bài toán xét sự tương giao của mặt cầu với mặt phẳng hay đường thẳng

Bài 1: Lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

a) có tâm là *I*(1;1;-2) và đi qua điểm *M*(-3;2;4)

b) Có đường kính *AB* biết *A*(2;2;4), *B*(0;-2;2)

Bài 2: Lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

a) Có tâm *I* thuộc *Oz* và đi qua hai điểm *M*(1;-2;4), *N*(-1;2;2)

b) Có tâm *J* thuộc mp(*Oxy*) và đi qua 3 điểm *A,B,C* với *A*(1;2;-4), *B*(1;-3;1), *C*(2;2;3)

Dạng 5: Bài toán tập hợp điểm

Bài 1: Cho tam giác *ABC* có $A(-3;2;0), B(-1;3;2), C(1;0;1)$. Tìm tập hợp những điểm *M* trong không gian thỏa mãn điều kiện:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=AB$ b) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Trong không gian *Oxyz* cho hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'CD'* biết *A* trùng *O*, *B*(2;0;0), *C*(2;3;0) và *A'*(0;0;4)

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

b) Chứng minh rằng *AC'* qua trọng tâm của tam giác *A'BD*

Bài 2: Cho tứ diện *OABC* có *A*(3;0;0), *B*(0;4;0), *C*(0;0;5)

a) Tìm tọa độ điểm *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

b) Tìm tọa độ hình chiếu *H* của *O* trên *AB*

Bài 3: Trong không gian *Oxyz* cho *A*(1;1;2), *B*(2;4;3). Tìm tọa độ các điểm *M* thuộc (*Oxz*) và *N* thuộc (*Oxy*) để *MA*+*MN*+*NB* có giá trị bé nhất.

Bài 4: Cho tam giác *ABC* có *A*(2;0;1), *B*(0;1;0), *C*(1;-1;-4)

a) Tìm tọa độ điểm *D* để *ABCD* là hình chữ nhật

b) Tìm tọa độ điểm *S* thuộc mp(*Oyz*) sao cho $SA \perp (ABCD)$
c) Tính thể tích hình chóp *SABCD*

Bài 5: Trong không gian *Oxyz* cho tam giác *ABC* có trọng tâm *G*(1;1;2)
a) Biết *A* thuộc *Ox*, *B* thuộc *Oy*, *C* thuộc *Oz* .Tìm tọa độ các điểm *A*,*B*,*C*
b) Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *OC*. Tìm tọa độ điểm *E* trên đường thẳng *OM* để $ME \perp OG$

Bài 6: Cho *A*(1;0;0), *B*(2;1;2)
a) Tìm tọa độ điểm *C* thuộc mp(*Oxy*) để tam giác *ABC* vuông cân tại *A*
b) Gọi *D* là trung điểm đoạn *AB* và *E* là điểm trên cạnh *BC* sao cho $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BE}$. Chứng minh: $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{CD}$

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT

1. *Vectơ pháp tuyến – Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng*

• Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là VTPT của (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α).

• Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương là cặp VTCP của (α) nếu các giá của chúng song song hoặc nằm trên (α).

Chú ý: *• Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của (α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTPT của (α).*

• Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là một cặp VTCP của (α) thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một VTPT của (α).

2. *Phương trình tổng quát của mặt phẳng*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ vôùi } A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

• Nếu (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một VTPT của (α).

• Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

3. *Các trường hợp riêng*

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
D = 0	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc toạ độ O
A = 0	$By + Cz + D = 0$	(α) // Ox hoặc (α) ⊃ Ox
B = 0	$Ax + Cz + D = 0$	(α) // Oy hoặc (α) ⊃ Oy
C = 0	$Ax + By + D = 0$	(α) // Oz hoặc (α) ⊃ Oz
A = B = 0	$Cz + D = 0$	(α) // (Oxy) hoặc (α) ≡ (Oxy)
A = C = 0	$By + D = 0$	(α) // (Oxz) hoặc (α) ≡ (Oxz)
B = C = 0	$Ax + D = 0$	(α) // (Oyz) hoặc (α) ≡ (Oyz)

Chú ý: *• Nếu trong phương trình của (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.*

• Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

(α) cắt các trục toạ độ tại các điểm (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)

4. *Vị trí tương đối của hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình: (α): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

(β): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

• *(α), (β) cắt nhau* $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

• $(\alpha)//(\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ • $(\alpha)\equiv(\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

• $(\alpha)\perp(\beta) \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

5. *Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0*

$$d\left(M_0,(\alpha)\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng

Phương pháp:

Nguyên tắc: tìm một điểm và một véc tơ pháp tuyến

- ***Mp qua 3 điểm A,B,C nhận véc tơ $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ là véc tơ pháp tuyến***
- ***Nếu (P)//(Q) biết (Q): Ax+By+Cz+D=0 thì (P) có phương trình Ax+By+Cz+D'=0 với D khác D'***

Bài 1: Trong không gian *Oxyz* cho hai điểm *A*(1;2;1), *B*(3;-4;5). Viết phương trình mp(*P*) trong các trường hợp sau:

a) (*P*) là mặt phẳng trung trực của đoạn *AB*

b) (*P*) đi qua điểm *B* và song song với mp(*Q*): *2x-y+4z+7=0*

Bài 2: Viết phương trình mp(*P*) trong mỗi trường hợp sau:

a) (*P*) chứa *Oy* và đi qua điểm *M*(1;-1;3)

b) (*P*) đi qua các điểm *A,B,C* lần lượt nằm trên các trục *Ox, Oy, Oz* sao cho *H*(1;2;-2) là trực tâm của tam giác *ABC*

Dạng 2: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Bài 1: Cho hai mặt phẳng có phương trình: *2x+my+4z-6+m=0* và *(m+2)x+4y+(3m+2)z-10=0*. Với giá trị nào của m để hai mặt phẳng đó:

a) Cắt nhau

b) Vuông góc

c) Song song

Bài 2: Xác định các giá trị của *n, m* để 3 mp sau đây cùng đi qua một đường thẳng

$(\alpha): 2x+ny-3z+m=0$, $(\beta): x-y+z-3=0$, $(\gamma): x+y-2z+1=0$

Dạng 3: Các bài toán ứng dụng công thức khoảng cách

Bài 1: Trong không gian *Oxyz* cho hai mp (*P*): *x+y-2z-3=0* và (*Q*): *2x+2y-4z+7=0*

a) Tính khoảng cách giữa hai mp (*P*) và (*Q*)

b) Tìm tọa độ điểm *M* thuộc *Ox* cách đều hai mp (*P*) và (*Oyz*).

Bài 2: Trong không gian *Oxyz* cho mp(*P*): *2x-y-2z-6=0* và hai điểm *A*(0;1;2), *B*(1;0;-2)

a) Tìm tọa độ điểm *H* là hình chiếu của *A* trên mp(*P*)

b) Tìm tọa độ điểm *M* thuộc (*P*) sao cho *MA=MB* và d(*M,(Ozx)*)=1

Bài 3: Tìm tập hợp các điểm trong không gian cách đều hai mặt phẳng (*P*) và (*Q*) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P): x+y-2z-3=0, (Q): x+y-2z+5=0

b) (P'): x+2y-2z-7=0, (Q'): 2x+y+2z+1=0

Bài 4: Cho mc (*S*): $x^2+y^2+z^2-2x+2y+6z+7=0$. Lập phương trình mp(*P*) thỏa mãn điều kiện

a) *(P)//(Q): x+3y-z+2=0* và tiếp xúc với (*S*)

b) (P) qua 2 điểm A(1;2;-1), B(0;2;1) và tiếp xúc với (S).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho tứ diện $ABCD$ biết A(-1;1;2), B(1;0;1), C(2;1;-1), D(3;2;1)

a) Viết phương trình qua 3 điểm A, B,C

b) Viết phương trình mp(P) qua AB và song song với CD

Bài 2:Cho A(1;-2;0), B(2;-1;2), Viết phương trình của mp

a) qua các điểm M,N,P lần lượt là hình chiếu của C(1;-2;5) trên các trục Ox, Oy, Oz

b) chứa AB và song song với Oy

c) chứa Ox và qua B

Bài 3: Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0, (\beta): 2x-y-2z+6=0$. Viết phương trình mp($P$) qua giao tuyến của hai mp và thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a) song song với Oz

b) Qua K(1;2;3)

c) Vuông góc với mp: $2x-z+7=0$

Bài 4: Cho mp(P) qua M(3;1;1). Viết phương trình mp(P) thỏa mãn điều kiện:

a) Vuông góc với hai mp $(\alpha): 3x-2y+2z=0, (\beta): 5x-4y+3z+1=0$

b) Cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A,B,C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC

c) Cắt các trục Ox,Oy, Oz tại các điểm A,B,C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích bé nhất.

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

1. *Phương trình tham số của đường thẳng*

• **Phương trình tham số** của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$:

$$(d): \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases} \qquad (t \in R)$$

• Nếu $a_1a_2a_3 \neq 0$ thì $(d): \dfrac{x-x_0}{a_1} = \dfrac{y-y_0}{a_2} = \dfrac{z-z_0}{a_3}$ *đgl* ***phương trình chính tắc*** *của d.*

2. *Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng*

Cho hai đường thẳng d, d' có phương trình tham số lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = x'_0 + t'a'_1 \\ y = y'_0 + t'a'_2 \\ z = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$$

$$\bullet\, d \,//\, d' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{a}' \text{ cuøng phöông} \\ \text{heä } \begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases} \text{(aån } t,t'\text{) voâ nghieäm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{a}' \text{ cuøng phöông} \\ M_0(x_0;y_0;z_0) \notin d' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{a}' \text{ cuøng phöông} \\ \vec{a}, \overrightarrow{M_0M'_0} \text{ khoâng cuøng phöông} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}, \vec{a}'] = \vec{0} \\ [\vec{a}, \overrightarrow{M_0M'_0}] \neq \vec{0} \end{cases}$$

$$\bullet\ d \equiv d' \quad \Leftrightarrow \text{heä} \begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases} (\text{aån } t, t') \text{ coù voâ soá nghieäm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{a}' \text{ cuøng phöông} \\ M_0(x_0; y_0; z_0) \in d' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{a}', \overrightarrow{M_0M'_0} \text{ ñoâi moät cuøng phöông}$$

$$\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{a}'\right] = \left[\vec{a}, \overrightarrow{M_0M'_0}\right] = \vec{0}$$

$$\bullet\ d, d' \text{ cắt nhau} \quad \Leftrightarrow \text{hệ} \begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases} (\text{ẩn } t,\ t') \text{ có đúng một nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{a}' \text{ khoâng cuøng phöông} \\ \vec{a}, \vec{a}', \overrightarrow{M_0M'_0} \text{ ñoàng phaúng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{a}, \vec{a}'\right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{a}, \vec{a}'\right].\overrightarrow{M_0M'_0} = 0 \end{cases}$$

$$\bullet\ d, d' \text{ chéo nhau} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{a}' \text{ khoâng cuøng phöông} \\ \text{heä} \begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases} (\text{aån } t, t') \text{ voâ nghieäm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{a}', \overrightarrow{M_0M'_0} \text{ khoâng ñoàng phaúng} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{a}'\right].\overrightarrow{M_0M'_0} \neq 0$$

$$\bullet\ d \perp d' \quad \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{a}' \quad \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{a}' = 0$$

3. *Vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt phẳng*

Cho mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và đường thẳng *d*: $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$

Xét phương trình: $A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0$ (ẩn *t*) (*)

- *d // (α) ⇔ (*) vô nghiệm*
- *d cắt (α) ⇔ (*) có đúng một nghiệm*
- *d ⊂ (α) ⇔ (*) có vô số nghiệm*

4. *Vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt cầu*

Cho đường thẳng *d*: $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$ (1) và mặt cầu *(S)*: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (2)

Để xét VTTĐ của *d* và *(S)* ta thay (1) vào (2), được một phương trình (*).

- *d và (S) không có điểm chung ⇔ (*) vô nghiệm ⇔ d(I, d) > R*
- *d tiếp xúc với (S) ⇔ (*) có đúng một nghiệm ⇔ d(I, d) = R*
- *d cắt (S) tại hai điểm phân biệt ⇔ (*) có hai nghiệm phân biệt ⇔ d(I, d) < R*

5. ***Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*** *(chương trình nâng cao)*

Cho đường thẳng *d* đi qua M_0 và có VTCP $\vec{a}$ và điểm M.

$$d(M, d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}$$

6. ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*** *(chương trình nâng cao)*

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2.

d_1 đi qua điểm M_1 và có VTCP $\vec{a}_1$, d_2 đi qua điểm M_2 và có VTCP $\vec{a}_2$

$$d(d_1,d_2)=\frac{\left|[\vec{a}_1,\vec{a}_2].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\right|}$$

Chú ý: *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 với mặt phẳng (α) chứa d_2 và song song với d_1.*

7. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (α) song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên d đến mặt phẳng (α).

8. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các VTCP $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

Góc giữa d_1, d_2 **bằng** *hoặc* **bù** *với góc giữa $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.*

$$\cos(\vec{a}_1,\vec{a}_2)=\frac{|\vec{a}_1.\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|.|\vec{a}_2|}$$

9. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d′ của nó trên (α).

$$\sin\left(d,(\alpha)\right)=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

Bài 1: Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua điểm *M*(2;0;-3) và có véc tơ chỉ phương (-1;2;3)

b) Đi qua hai điểm *A*(1;2;3), *B*(-1;3;5)

Bài 2: Viết phương trình chính tắc của đường thẳng *d* qua *M*(1;-2;2) trong mỗi trường hợp sau:

a) *d* song song với đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-5t\\z=2-t\end{cases}$

b) *d* vuông góc với mp(*P*): *x+2y-3z+4=0*

Bài 3: Viết phương trình chính tắc của đường thẳng *d* qua *M*(2;-1;3) và vuông góc với

$\Delta:\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$ và $\Delta':\frac{x-3}{-3}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{2}$

Dạng 2: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Bài 1: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d’ cho bởi các phương trình sau:

a) $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}, d':\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$

b) $d:\begin{cases}x=9t\\y=5t\\z=-3-t\end{cases}, d':\frac{x}{-18}=\frac{y}{-10}=\frac{z+3}{2}$

c) $d:\begin{cases}x=t\\y=2-4t\\z=-3-3t\end{cases}, d':\begin{cases}x=t'\\y=1-4t'\\z=-3-3t'\end{cases}$

d) $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{3}, d':\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=2+3t\end{cases}$

Bài 2: Cho hai đường thẳng *d* và *d'* cho bởi các phương trình sau đây:

$d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{4}, d':\begin{cases}x=2+mt\\y=-1-3t\\z=2+(m-4)t\end{cases}$

a) Xác định *m* để *d* vuông với *d'*
b) Xác định *m* để *d* và *d'* là hai đường thẳng chéo nhau

Bài 3: Cho hai đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau đây:

$d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}, d':\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$

a) Chứng minh *d* và *d'* cắt nhau. Tìm giao điểm của *d* và *d'*
b) Lập phương trình mp(*P*) chứa *d* và *d*'

Dạng 3: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mp. Các bài toán về hình chiếu của một điểm trên đường thẳng, trên mp, hình chiếu của đường thẳng trên mp…

Bài 1: Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-t\\z=1+3t\end{cases}, (P): 2x+my-3z+m-2=0$

a) Xác định *m* để *d* cắt (*P*), khi đó tìm tọa độ giao điểm *I* của *d* và (*P*) theo *m*. Với giá trị nào của *m* thì *I* có tọa độ là các số nguyên
b) Xác định *m* để d//(P), $d\subset(P)$

Bài 2: Cho điểm *M*(2;-1;0) và mp(*P*): x+2y-z+2=0

a) Tìm tọa độ điểm *H* là hình chiếu của *M* trên (*P*)
b) Tìm tọa độ điểm *N* đối xứng của *M* qua (*S*)

Bài 3: Cho điểm *M*(1;2;0) và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{1}$

a) Viết phương trình đường thẳng Δ qua *M*, cắt *d* và vuông góc với *d*
b) Tìm tọa độ điểm *N* đối xứng với *M* qua *d*.

Dạng 4: các bài toán về góc, khoảng cách

Bài 1: Cho *M*(1;2;3) và hai đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}, d':\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$

a) Tính khoảng cách từ *M* đến đường thẳng *d*
b) Chứng minh: *d* và *d*' chéo nhau. Tính d(*d,d'*)

Bài 2(KA-2004): Trong không gian *Oxyz* cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi, *AC* cắt *BD* tại gốc *O*. Biết *A*(2;0;0), *B*(0;1;0), *S*(0;0;$\sqrt{2}$). Gọi *M* là trung điểm của *SC*

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai dường thẳng *SA* và *BM*
b) Giả sử mp(*ABM*) cắt đường *SD* tại *N*. Tính thể tích khối chóp *S.ABMN*

Bài 3: Cho điểm *A*(-2;0;1). Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua *A*, cắt trục *Oy* và hợp với *Oy* góc 45^o.

Dạng 5: Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau và các bài toán có dạng tương tự

Bài 1: Cho hai đường thẳng có phương trình: $d:\begin{cases}x=-4+2t\\y=3+t\\z=1\end{cases}, d':\begin{cases}x=3+2t'\\y=-2\\z=-3t'\end{cases}$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng đó chéo nhau
b) Viết phương trình đường vuông góc chung của *d* và *d'*

Bài 2: Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;1)$ và cắt cả hai đường thẳng: $d:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{1}, d':\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$

Bài 3: Viết phương trình của đường thẳng Δ qua $M(1;0;1)$ vuông góc với đường thẳng *d* và cắt *d'* có các phương trình sau: $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}, d':\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho tứ diện *OABC* có *A*(3;0;0), *B*(0;4;0), *C*(0;0;5).

a) Viết phương trình đường thẳng *BC*
b) Tìm tọa độ *H* là hình chiếu của *O* trên mp(*ABC*)
c) Tìm tọa độ *K* là hình chiếu của *A* trên đường thẳng *BC*

Bài 2: Cho các điểm *A*(4;-6;3), *B*(5;-7;3).

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng *d* qua *A* và vuông góc với mp(*P*): *8x+11y+2z-3=0*
b) Tìm trên *d* điểm *C* để tam giác *ABC* vuông tại *B*
c) Tìm trên trục *Oz* điểm *M* sao cho khoảng cách từ *M* đến đường thẳng *AB* là bé nhất.

Bài 3: Cho $\Delta:\frac{x+2}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}$ và $\Delta':\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$

a) Chứng minh Δ,Δ' chéo nhau
b) Viết phương trình mp(α) chứa Δ và song song với Δ'

Bài 4: Trong không gian *Oxyz* cho mp(α) và đường *d* : (α): x+y-2z-2=0, (d): $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{3}$

a) Viết phương trình tham số của các đường thẳng là giao tuyến của mp (α) với các mp tọa độ.
b) Tính thể tích của khối tứ diện *ABCD*, biết *A,B,C* là giao điểm của mp(α) với các trục *Ox, Oy, Oz*, còn *D* là giao điểm của đường thẳng *d* với mp (*Oxz*).

Bài 5: Cho tứ diện *ABCD*. Tính góc và khoảng cách giữa hai cạnh *AB* và *CD* biết *A*(3;-1;0), *B*(0;-7;3), *C*(-2;1;-1), *D*(3;2;6)

Bài 6: Cho $d:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-4}{2}$ và mp(*P*): *x+y+z-3=0*

a) Tìm tọa độ giao điểm của *d* và (*P*)
b) Tính góc giữa *d* và (*P*)

Bài 7: Cho *M*(1;2;-1), đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{2}$ và mp(*P*): *2x+y-z+1=0*

a) Tìm tọa độ *K* đối xứng của *M* qua (*P*)
b) Viết phương trình của đường thẳng Δ qua *M*, cắt *d* và song song với (*P*).

Bài 8: Cho hai đường thẳng $d:\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+4}{-3}, d':\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{-1}$ và mp(*P*): *x+y-2z=0*. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên (*P*) và cắt hai đường thẳng *d* và *d'*.

Bài 9:

Cho đường *d* và mp(*P*): $\frac{x-6}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{2}, 2x-3y+z=0$. Viết phương trình hình chiếu của *d* trên (*P*).

Bài 10: Cho hai đường thẳng có phương trình: $d:\begin{cases}x=6-4t\\y=-4+t\\z=1+t\end{cases}, d':\begin{cases}x=-3-6t'\\y=t'\\z=6+2t'\end{cases}$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng đó chéo nhau
b) Viết phương trình đường vuông góc chung của *d* và *d'*

Bài 11: Cho mp(*P*) và đường thẳng *d* có phương trình: (*P*): *2x+y-z-5=0*, $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$

a) Tìm tọa độ giao điểm *A* của *d* và (*P*)
b) Viết phương trình của đường thẳng Δ qua *A*, vuông góc với *d* và nằm trong mp(*P*)

Bài 12: Cho hai đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+6}{2}, d':\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ và mp(*P*): *2x-y-z+3=0*

a) Chứng minh: *d* và *d'* chéo nhau. Tính khoảng cách giữa *d* và *d'*
b) Viết phương trình đường thẳng Δ vuông với (*P*) và cắt cả *d* và *d'*.

§4. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. LÝ THUYẾT

1. Phương trình mặt cầu:

a) Mặt cầu tâm $I(x_0;y_0;z_0)$, bán kính R có phương trình $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

b) Phương trình $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu có tâm $I(-a;-b;-c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

2. Tương giao của mặt cầu với đường thẳng, mp: *Cho mc (S) tâm I, bán kính R*

a) Với dường thẳng: gọi $d=d(I,\Delta)$ ...

b) Với mặt phẳng:

B. CÁC DẠNG TOÁN

Những bài toán về mặt cầu xoay quanh các chủ đề:

4) *Lập phương trình mặt cầu: có hai cách*
   c) *Tìm tâm và bán kính và sử dụng pt* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
   d) *Áp dụng phương trình* $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$
5) *Các bài toán xét sự tương giao của mặt cầu với mặt phẳng hay đường thẳng*

Dạng 1: Các bài toán về lập phương trình mặt cầu

Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần xác định ***tâm I*** *và* ***bán kính R*** *của mặt cầu.*
Dạng 1: *(S)* có tâm *I(a; b; c)* và bán kính *R:*

$$(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Dạng 2: *(S)* có tâm *I(a; b; c)* và đi qua điểm A:
Khi đó bán kính R = IA.
Dạng 3: *(S)* nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

– *Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB:* $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}; z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

– *Bán kính R = IA =* $\frac{AB}{2}$.

Dạng 4: *(S)* đi qua bốn điểm A, B, C, D *(mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD):*

– *Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng:* $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ (*).

– *Thay lần lượt toạ độ của các điểm A, B, C, D vào (*), ta được 4 phương trình.*

– *Giải hệ phương trình đó, ta tìm được a, b, c, d* $\Rightarrow$ *Phương trình mặt cầu (S).*

Dạng 5: *(S)* đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước:

Giải tương tự như dạng 4.

Dạng 6: *(S)* có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu *(T)* cho trước:

– *Xác định tâm J và bán kính R′ của mặt cầu (T).*

– *Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S).*

(Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài)

Chú ý: *Với phương trình mặt cầu (S):*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \quad \text{với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

thì (S) có tâm *I(–a; –b; –c)* và bán kính *R =* $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Bài 1: Lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

c) có tâm là *I*(1;1;-2) và đi qua điểm *M*(-3;2;4)

d) Có đường kính *AB* biết *A*(2;2;4), *B*(0;-2;2)

Bài 2: Lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

c) Có tâm *I* thuộc *Oz* và đi qua hai điểm *M*(1;-2;4), *N*(-1;2;2)

d) Có tâm *J* thuộc mp(*Oxy*) và đi qua 3 điểm *A,B,C* với *A*(1;2;-4), *B*(1;-3;1), *C*(2;2;3)

Dạng 2: Các bài toán về tương giao của mặt cầu với mp, đường thẳng

Bài 1: Cho mc (*S*) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z + 5 = 0$ và 3 điểm *A*(1;-1;2), *B*(2;0;1), *C*(-1;2;2).

a) Tìm tâm *I* và bán kính *R* của mặt cầu (*S*)

b) CMR đường thẳng *AB* cắt mặt cầu (*S*)

c) CMR mp(*OAC*) cắt mặt cầu (*S*), tìm bán kính đường tròn thiết diện.

Bài 2: Cho mp (*P*) và mc (*S*) có các phương trình: (*P*): *2x-3y+4z-5=0* và (*S*): $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 4y - 5z + 6 = 0$. CMR: (*P*) cắt mặt cầu (*S*). Tính bán kính *r* và xác định tọa độ tâm *H* của đường tròn thiết diện.

Bài 3: Cho mặt cầu (*S*): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$. Lập phương trình mp(*P*) thỏa mãn điều kiện:

a) (*P*) tiếp xúc với mc (*S*) tại *M*(4;3;0)

b) (*P*) tiếp xúc với mc(*S*) biết rằng (*P*)//(*Q*): *x+3y-z+2=0*

Bài 4: Lập phương trình mặt cầu có tâm thuộc *Oy* và tiếp xúc với hai mp: *x+2y-2z-3=0* và *x+2y-2z-5=0*

Bài 5:Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng *AB* với *A*(0;0;1), *B*(2;2;3) và tiếp xúc với mc: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$

Bài 6: Xét phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(\sin t)x + 4(\cos t)y + m = 0$ (*)

a) Tìm m để (*) là phương trình một mặt cầu với mọi *t* thuộc *R*. Tìm tâm và bán kính mc đó

b) Tìm tập hợp tâm của mc khi *t* thay đổi

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

§5. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA GIẢI CÁC BÀI TẬP HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

*** PHƯƠNG PHÁP**:
Bước 1: *Chọn hệ trục toạ độ Oxyz thích hợp (chú ý đến vị trí của gốc O)*
Bước 2: *Xác định toạ độ các điểm có liên quan* (có thể xác định toạ độ tất cả các điểm hoặc một số điểm cần thiết)
Khi xác định tọa độ các điểm ta có thể dựa vào :
- ✓ *Ý nghĩa hình học của tọa độ điểm (khi các điểm nằm trên các trục tọa độ, mặt phẳng tọa độ).*
- ✓ *Dựa vào các quan hệ hình học như bằng nhau, vuông góc, song song ,cùng phương , thẳng hàng, điểm chia đọan thẳng để tìm tọa độ*
- ✓ *Xem điểm cần tìm là giao điểm của đường thẳng, mặt phẳng.*
- ✓ *Dựa vào các quan hệ về góc của đường thẳng, mặt phẳng.*

Bước 3: *Sử dụng các kiến thức về toạ độ để giải quyết bài toán*
Các dạng toán thường gặp:
- ✓ *Độ dài đọan thẳng*
- ✓ *Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng*
- ✓ *Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng*
- ✓ *Khoảng cách giữa hai đường thẳng*
- ✓ *Góc giữa hai đường thẳng*
- ✓ *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng*
- ✓ *Góc giữa hai mặt phẳng*
- ✓ *Thể tích khối đa diện*
- ✓ *Diện tích thiết diện*
- ✓ *Chứng minh các quan hệ song song , vuông góc*
- ✓ *Bài toán cực trị, quỹ tích*

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Hình lập phương, lăng trụ đứng

Bài 1: Cho hình lập phương $ABCD.\ A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BB_1, CD, A_1D_1, AB.

a) Tính góc giữa C_1N và MP
b) Tính góc giữa hai mp: (A_1BC) và (A_1CD)
c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1C và QN.

Bài 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và DD'.

a) CMR: $MN//(BDC')$. Tính MN và khoảng cách giữa MN với mp(BDC')
b) Gọi P là trung điểm của $C'D'$. Tính $V_{C.MNP}$ và góc giữa MN và BD
c) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'BD$

Bài: (KB – 2003) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M, N là trung điểm cạnh AA', CC'.

1. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.
2. Tính AA' theo a để $B'MDN$ là hình vuông.

Dạng 2: Hình chóp

2.1. Chóp tam giác:

Bài 1: Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc và *OA=3, OB=OC=4*.Tính khoảng cách từ *A* đến mp(*BCD*).

Bài 2: (KD – 2002). Cho tứ diện *ABCD* có cạnh *AD* vuông góc (*ABC*), *AC = AD = 4cm*, *AB = 3cm*, *BC = 5cm*. Tính khoảng cách từ đỉnh *A* đến (*BCD*).

Bài 3: Cho hình chóp *O.ABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các mp: (*OAB*), (*OBC*), (*OCA*) với mp(*ABC*). Gọi *H* là hình chiếu của đỉnh *O* trên (*ABC*).

1. Chứng minh *H* là trực tâm của ΔABC.
2. Chứng minh $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
3. Chứng minh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
4. Chứng minh $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3}$.

Bài 4: Cho hình chóp *O.ABC* có *OA = a, OB = b, OC = c* đôi một vuông góc. Điểm *M* cố định thuộc tam giác *ABC* có khoảng cách lần lượt đến các mp(*OBC*), mp(*OCA*), mp(*OAB*) là 1, 2, 3. Tính *a, b, c* để thể tích *O.ABC* nhỏ nhất.

Bài 5: Cho tứ diện *ABCD* có *AD* vuông góc với mặt phẳng (*ABC*) và tam giác *ABC* vuông tại *A, AD = a, AC = b, AB = c*. Tính diện tích *S* của tam giác *BCD* theo *a, b, c* và chứng minh rằng : $2S \ge \sqrt{abc(a+b+c)}$

(Dự bị 2 – Đại học khối D – 2003

Bài 6:(KA – 2002). Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có độ dài cạnh đáy là a. Gọi *M, N* là trung điểm *SB, SC*. Tính theo a diện tích ΔAMN, biết (*AMN*) vuông góc với (*SBC*).

2.2: Chóp tứ giác

Bài 1: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Mặt bên *SAD* là tam giác đều và ở trong mp vuông góc với đáy. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *SB, SC, CD*. CMR: *AM* vuông với *BP*

Bài 2: Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh đáy bằng a. Gọi *E* là điểm đối xứng của *D* qua trung điểm của *SA*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AE, BC*.

a) Chứng minh: $MN \perp BD$
b) Tìm khoảng cách giữa *MN* và *AC* theo a

Bài 3: Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang, trong đó $ABC = BAD = 90^o$. Biết *BA=BC=a, AD=2a*. Giả sử *SA* vuông góc với đáy *ABCD* và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên *SB*.

a) Chứng minh *SCD* là tam giác vuông
b) Tính khoảng cách từ *H* đến mp(*SCD*).

Bài 4: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh 2*a*. AS=a, $SB = a\sqrt{3}$ và $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, BC*. Tính cosin góc giữa *SM* và *DN*.

Bài 16: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh $SC \perp (ABCD)$ và SA tạo với đáy góc 30^0.

a. Chứng minh Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

b. Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$

Bài 17: Cho h/chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và H là tâm của đáy.

a. Chứng minh SH $\perp$ (ABCD). b. Tính thể tích hình chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}$

Bài 18: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy góc 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{6}$

Bài 19: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy góc 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Bài 20: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$

Bài 21: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, cạnh $SA\perp(ABCD)$. Cạnh bên SC tạo với mặt phẳng (SAB) góc 30^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Bài 22: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, hai mặt bên (SAB), (SAD) cùng vuông góc với đáy ABCD. Cạnh bên SC tạo với mặt phẳng (ABCD) góc 30^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$

Bài 23: Tính thể tích khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Đs: $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Bài 24: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. a. SA $\perp$ BC b. Tính thể tích khối chóp S.ABI. Đs: $V_{S.ABI}=\frac{a^3\sqrt{11}}{24}$

Bài 25: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC vuông đỉnh B. Cạnh bên $SA\perp(ABCD)$. SA = AC. Biết SA = AB = BC = a. Tính thể tích khối chóp S.ABC. Đs: $V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{6}$

Bài 26: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, Cạnh bên $SA\perp(ABCD)$ và SA = AC. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Bài 27: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, Cạnh bên $SA\perp(ABCD)$ và SB=$a\sqrt{3}$.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Đs: $V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

b. Chứng minh trung điểm của cạnh SC là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Bài 28: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thang, $BAD=ABC=90^0$. AB=BC = a, AD = 2a, SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a. CMR: BCNM là hình chữ nhật. b. Tính thể tích khối chóp S.BCNM theo a. Đs: $V_{S.BCNM}=\frac{a^3}{3}$

Bài 29: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác vuông tại A, AC = b, $C=60^0$. Đường chéo BC' của mặt bên BB'C'C tạo với mp(AA'C'C) một góc 30^0.

a. Tính độ dài đoạn AC' b. Tính V khối lăng trụ.

Bài 30: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang vuông ABCD vuông tại A và B, AB = BC = 2a ; đường cao của hình chóp là SA = 2a .

a. Xác định và tính đoạn vuông góc chung của AD và SC . b. Tính V của hình chóp đó .

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN