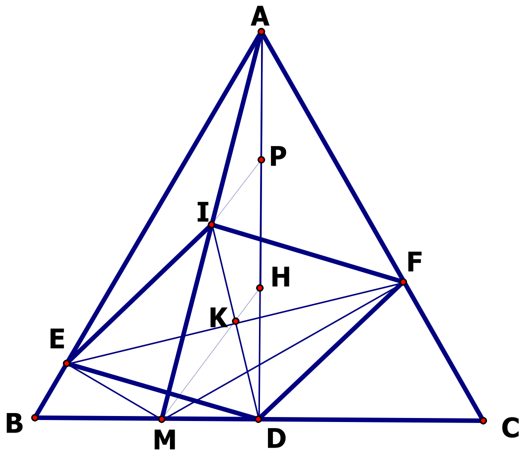
BÀI TẬP HÌNH HỌC NÂNG CAO LỚP 8

1. **Đường trung bình của tam giác, của hình thang.**
2. **Đường trung tuyến của tam giác vuông.**

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC đều, đường cao AD, trực tâm H. M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu của M trên AB và AC. Gọi I là trung điểm của AM. ID cắt EF tại K.

a) DEIF là hình gì?
b) CM: M, K, H thẳng hàng.
c) Xác định vị trí của M trên BC để EF đạt GTNN.
d) Tìm GTNN của S_{DEIF} biết tam giác ABC có cạnh bằng a.
e) Tìm quỹ tích điểm K.

Lời giải:



Giả sử M nằm giữa B và D:

a) Δ IED có:

$$\begin{cases} IE = ID = \frac{1}{2}AM \\ EID = 2.BAD = 60^0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta$ IED là tam giác đều (1)

Chứng minh tương tự ta được Δ IFD là tam giác đều (2). Từ (1) và (2) suy ra DEIF là hình thoi.

b) Vì Δ ABC đều nên trực tâm H củng là trọng tâm. Suy ra: AH = 2.HD

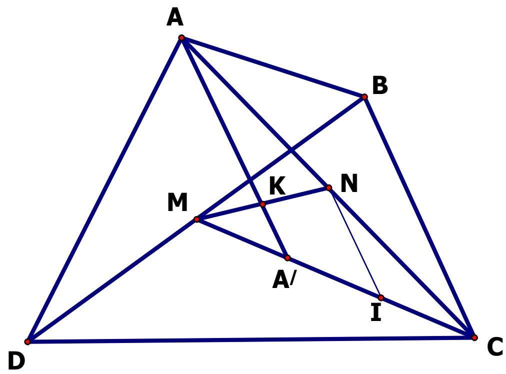
Gọi P là trung điểm của AH $\Rightarrow$ AP = PH = HD. Suy ra IP, KH thứ tự là đường trung bình của các tam giác AMH và DIP$\Rightarrow$ MH // IP và KH // IP, suy ra M, K, H thẳng hàng.

c) Vì Δ EDK vuông tại K nên ta có: EF = 2.EK = 2. ED.$\sin$KDE = $\sqrt{3}$.DE Do đó EF đạt GTNN $\Leftrightarrow$ DE đạt GTNN $\Leftrightarrow$ DE$\perp$AB $\Leftrightarrow$ M trùng với D. (Có thể dùng đ.lý pitago để tính EF theo DE).

d) S_{DEIF} = $\frac{1}{2}DI$.EF theo DE

e) Tìm quỹ tích của K thông qua quỹ tích của I.

Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD. Gọi $A^/$, $B^/$, $C^/$, $D^/$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. CMR: $AA^/$, $BB^/$, $CC^/$, $DD^/$ đồng qui.



Lời giải:

Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của BD, AC và $A^/$C. Ta có:

+) NI là đường trung bình của Δ $AA^/C$ $\Rightarrow$ $AA^/$ // NI.

+) Δ MNI có $A^/$ là trung điểm của MI và $AA^/$ // NI $\Rightarrow$ K là trung điểm của MN.

Chứng minh tương tự thì $BB^/$, $CC^/$, $DD^/$ đều đi qua trung điểm K của MN$\Rightarrow$ $AA^/$, $BB^/$, $CC^/$, $DD^/$ đồng qui tại K.

CHUYÊN ĐỀ 2: TỨ GIÁC.

I. ĐỊNH NGHĨA

Trong các hình thì hình thang là hình gốc:

1. **Hình thang** là 1 tứ giác có 2 cạnh đối song song.
2. **Hình thang cân** là hình thang có 2 góc kề một đáy bằng nhau.
3. **Hình thang vuông** là hình thang có một góc vuông.

4. **Hình bình hành** là tứ giác có các cạnh đối song song
5. Hình chữ nhật là tứ giác có 4 góc vuông
6. **Hình thoi** là tứ giác có 4 cạnh bằng nhau.
7. Hình vuông là tứ giác có 4 góc vuông và có 4 cạnh bằng nhau.

II. TÍNH CHẤT

- ***Hình thang :***

Nếu 1 hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.
Nếu 1 hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

- Hình thang vuông :

Hình thang vuông có hai góc vuông

- Hình thang cân :

Trong hình thang cân có hai cạnh bên bằng nhau
Trong hình thang cân có hai đường chéo bằng nhau.

- ***Hình bình hành :*** Trong hình bình hành
  - Các cạnh đối bằng nhau.
  - Các góc đối bằng nhau.
  - Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

- ***Hình chữ nhật :***

Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành, hình thang cân.
Trong hình chữ nhật hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường
Hình chữ nhật có bốn cạnh và bốn góc vuông. Những cạnh đối nhau thì song song và bằng nhau.

- Hình thoi :

Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành
Trong hình thoi:
Hai đường chéo vuông góc với nhau.
Hai đường chéo là các đường phân giác các góc của hình thoi

- Hình vuông :

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi

III. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT CÁC TỨ GIÁC THƯỜNG GẶP

1): Dấu hiệu nhận biết hình thang, hình thang vuông, hình thang cân:

- Tứ giác có hai cạnh đối song song là hình thang
- Hình thang có một góc vuông là hình thang vuông
- Hình thang có 2 góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân
- Hình thang có 2 đường chéo bằng nhau là hình thang cân

2): Dấu hiệu nhận biết hình bình hành (Có 5 dấu hiệu nhận biết):

- Tứ giác có các cặp cạnh đối song song
- Tứ giác có các cặp cạnh đối bằng nhau
- Tứ giác có 2 cạnh đối song song và bằng nhau
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau
- Tứ giác có 2 đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

3): Hình chữ nhật (có 4 dấu hiệu nhận biết):

- Tứ giác có 3 góc vuông
- Hình thang cân có một góc vuông
- Hình bình hành có một góc vuông
- Hình bình hành có 2 đường chéo bằng nhau

4): Hình thoi (có 4 dấu hiệu nhận biết):

- Tứ giác có 4 cạnh bằng nhau
- Hình bình hành có 2 cạnh kề bằng nhau
- Hình bình hành có 2 đường chéo vuông góc nhau
- Hình bình hành có 1 đường chéo là đường phân giác của 1 góc.

5): Hình vuông (có 5 dấu hiệu nhận biết):

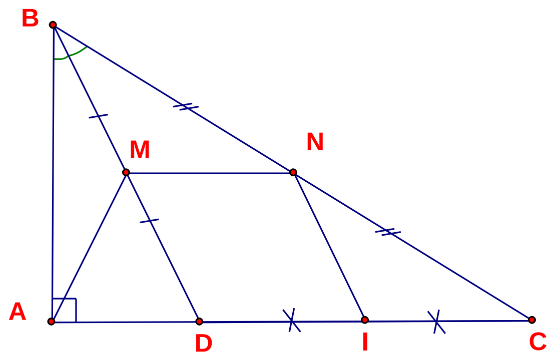
- Hình chữ nhật có 2 cạnh kề bằng nhau
- Hình chữ nhật có 2 đường chéo vuông góc
- Hình chữ nhật có 1 đường chéo là đường phân giác của một góc
- Hình thoi có 1 góc vuông
- Hình thoi có 2 đường chéo bằng nhau.

IV. Bài tập

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có góc ABC bằng 60^0, phân giác BD. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của BD, BC, CD.

a, Tứ giác AMNI là hình gì? Chứng minh.

b, Cho AB = 4cm. Tính các cạnh của tứ giác AMNI.



a,

Chứng minh được tứ giác AMNI là hình thang

Chứng minh được AN=MI, từ đó suy ra tứ giác AMNI là hình thang cân

b, Tính được AD = $\frac{4\sqrt{3}}{3}cm$; BD = 2AD = $\frac{8\sqrt{3}}{3}cm$

AM = $\frac{1}{2}BD = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$

Tính được NI = AM = $\frac{4\sqrt{3}}{3}cm$

DC = BC = $\frac{8\sqrt{3}}{3}cm$, MN = $\frac{1}{2}DC = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$

Tính được AI = $\frac{8\sqrt{3}}{3}cm$

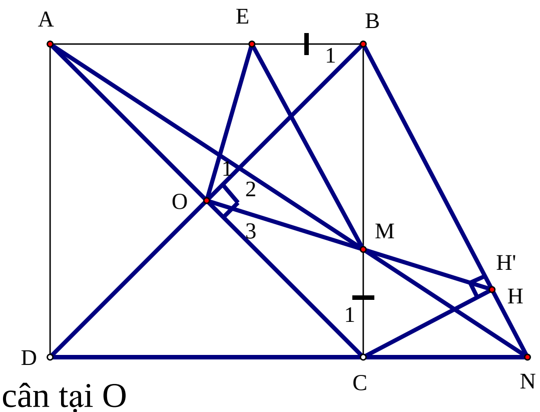
Bài 2: Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BE = CM.

a) Chứng minh : ΔOEM vuông cân.

b) Chứng minh : ME // BN.

c) Từ C kẻ CH ⊥ BN (H ∈ BN). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Chứng minh:



a) Xét ΔOEB và ΔOMC

Vì ABCD là hình vuông nên ta có OB = OC

Và $B_1 = C_1 = 45^0$

BE = CM (gt)

Suy ra ΔOEB = ΔOMC (c .g.c)

$\Rightarrow$ OE = OM và $O_1 = O_3$

Lại có $O_2 + O_3 = BOC = 90^0$ vì tứ giác ABCD là hình vuông

$O_2 + O_1 = EOM = 90^0$ kết hợp với OE = OM $\Rightarrow$ΔOEM vuông cân tại O

b) Từ (gt) tứ giác ABCD là hình vuông $\Rightarrow$ AB = CD và AB // CD

+ AB // CD $\Rightarrow$ AB // CN $\Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (Theo ĐL Ta- lét) (*)

Mà BE = CM (gt) và AB = CD $\Rightarrow$ AE = BM thay vào (*)

Ta có : $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow$ ME // BN (theo ĐL đảo của đl Ta-lét)

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ ME // BN $\Rightarrow OME = OH'E$ (cặp góc so le trong)

Mà $OME = 45^0$ vì ΔOEM vuông cân tại O

$\Rightarrow MH'B = 45^0 = C_1$

$\Rightarrow$ΔOMC $\sim$ ΔBMH' (g.g)

$\Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{MH'}{MC}$,kết hợp $OMB = CMH'$(hai góc đối đỉnh)

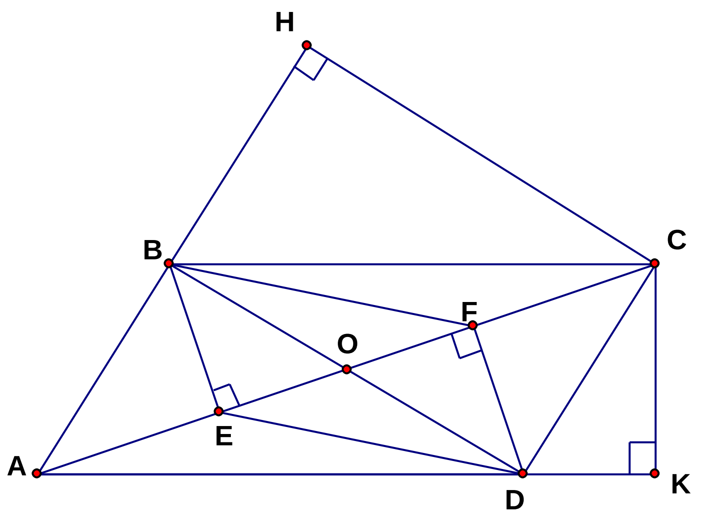
$\Rightarrow$ΔOMB $\sim$ ΔCMH' (c.g.c) $\Rightarrow OBM = MH'C = 45^0$

Vậy $BH'C = BH'M + MH'C = 90^0 \Rightarrow CH' \perp BN$

Mà CH $\perp$ BN (H $\in$ BN) $\Rightarrow$ H $\equiv$ H' hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD.

a) Tứ giác BEDF là hình gì ? Hãy chứng minh điều đó ?
b) Chứng minh rằng : CH.CD = CB.CK
c) Chứng minh rằng : AB.AH + AD.AK = AC^2.



Chứng minh:

a) Ta có : BE $\perp$ AC (gt); DF $\perp$ AC (gt) => BE // DF

Chứng minh : $\Delta BEO = \Delta DFO(g-c-g)$

=> BE = DF

Suy ra : Tứ giác : BEDF là hình bình hành.

b) Ta có: $ABC = ADC \Rightarrow HBC = KDC$

Chứng minh : $\Delta CBH \sim \Delta CDK(g-g)$

$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow CH.CD = CK.CB$

c) Chứng minh : $\Delta AFD \sim \Delta AKC(g-g)$

$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AD.AK = AF.AC$

Chứng minh : $\Delta CFD \backsim \Delta AHC(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{CF}{CD} = \dfrac{AH}{AC}$ Mà : CD = AB $\Rightarrow \dfrac{CF}{AB} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AH = CF.AC$

Suy ra : AB.AH + AB.AH = CF.AC + AF.AC = (CF + AF)AC = AC^2 (đpcm).

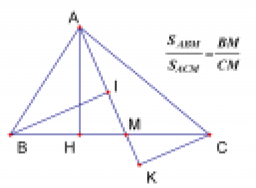
CHUYÊN ĐỀ 3 : BÀI TOÁN TỈ SỐ DIỆN TÍCH VÀ ỨNG DỤNG

Bài toán 1: Cho tam giác ABC, M là một điểm thuộc đường thẳng BC.

a) Chứng minh : $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \dfrac{BM}{CM}$

b) Gọi I và K là hình chiếu của B và C trên AM. Chứng minh: $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \dfrac{BI}{CK}$.

Giải:



a) Vẽ $AH \perp BC(H \in BC)$. Khi đó ta có: $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \dfrac{\frac{1}{2}AH.BM}{\frac{1}{2}AH.CM} = \dfrac{BM}{CM}$

b) Ta có : $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \dfrac{\frac{1}{2}AM.BI}{\frac{1}{2}AM.CK} = \dfrac{BI}{CK}$

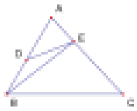
Hệ quả 1: Cho tam giác ABC, M thuộc đường thẳng BC thì $S_{ABM} = S_{ACM} \Leftrightarrow$ M là trung điểm BC.

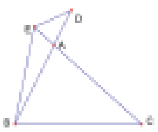
Hệ quả 2: Cho tam giác ABC, và một điểm M bất kì. Khi đó nếu $S_{ABM} = S_{ACM}$ thì AM//BC hoặc AM đi qua trung điểm của BC.

Hệ quả 3: Cho tam giác ABC, G là một điểm bất kì. Khi đó G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $S_{GAB} = S_{GBC} = S_{GAC}$.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC. D và E là hai điểm thuộc cạnh AB và AC. Khi đó $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AD.AE}{AB.AC}$

Giải:





Theo bài toán 1 ta có: $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \dfrac{AD}{AB}$ và $\dfrac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AE}{AC}$

Suy ra: $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABE}}.\dfrac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AD}{AB}.\dfrac{AE}{AC}$. Vậy $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AD.AE}{AB.AC}$.

Chú ý: Kết quả của bài toán vẫn còn đúng nếu D, E thuộc đường thẳng AB và AC.

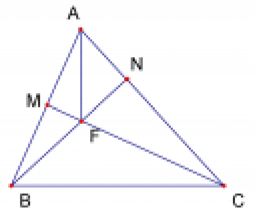
Hệ quả 1: Nếu hai tam giác ABC và MNP có $A = M$ hoặc $A + M = 180^0$ thì $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \dfrac{AB.AC}{MN.MP}$

Hệ quả 2: Tỉ số hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng. Nghĩa là: nếu tam giác ABC và tam giác MNP đồng dạng thì: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \dfrac{AB^2}{MN^2}$

Trên đây là một vài kết quả về diện tích mà cách chứng minh đơn giản nhưng lại có nhiều ứng dụng khá hay. Sau đây là một vài ví dụ.

Bài 1: Cho tam giác ABC. M là trung điểm của AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho AC = AN. Gọi K là giao điểm của BN và CM. Chứng minh KC = 4KM.

Hướng dẫn giải:



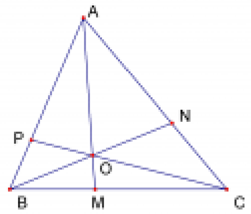
Ta có $\frac{S_{ABK}}{S_{CBK}} = \frac{AN}{CN} = \frac{1}{2}$ và $\frac{S_{MBK}}{S_{ABK}} = \frac{BN}{AB} = \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{S_{MBK}}{S_{CBK}} = \frac{1}{4}$, suy ra $\frac{S_{MBK}}{S_{CBK}} = \frac{MK}{CK} = \frac{1}{4}$. Vậy CK = 4MK

Bài 2: Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. AO, BO, CO lần lượt cắt BC, AC và AB tại M, N, P. Chứng minh:

$$\frac{AO}{AM} + \frac{BO}{BN} + \frac{CO}{CP} = 2$$

Hướng dẫn giải:



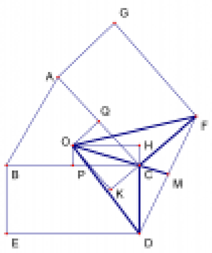
Ta có:

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{BO}{BN} = \frac{S_{ABO} + S_{CBO}}{S_{ABC}}$ và $\frac{CO}{CP} = \frac{S_{ACO} + S_{BCO}}{S_{ABC}}$

Từ đó suy ra: $\frac{AO}{AM} + \frac{BO}{BN} + \frac{CO}{CP} = \frac{S_{ABO} + S_{ACO}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ABO} + S_{BCO}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACO} + S_{BCO}}{S_{ABC}} = 2$

Bài 3: Cho tam giác ABC, về phía ngoài tam giác dựng hai hình chữ nhật ABDE và ACFG có diện tích bằng nhau. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC. Chứng minh OC đi qua trung điểm của DF.

Hướng dẫn giải:



Ta cần chứng hai tam giác OCD và OCF có diện tích bằng nhau. Vẽ Vẽ OH, OK lần lượt vuông góc với CD và CF(H thuộc CD, K thuộc CF). Ta chứng minh được $OH = \frac{1}{2}BC$; $OK = \frac{1}{2}AC$. Từ đó suy ra: $S_{OCD} = \frac{1}{2}OH.CD = \frac{1}{4}BC.CD = \frac{1}{4}S_{BCDE}$

và $S_{OCF}=\dfrac{1}{4}S_{ACFG}$

Mà $S_{ABCD}=S_{ACFG}$ nên ta có: $S_{OCD}=S_{OCF}$. Từ đó ta có: OC đi qua trung điểm của DF

Bài 4: Trên các cạnh AB, AB, AC của tam giác ABC cố định, người ta lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho: $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{BN}{NC}=\dfrac{CP}{PA}=k(k>0)$

a) Tính S_{MNP} theo S_{ABC} và k

b) Tính k sao cho S_{MNP} đạt giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{S_{AMP}}{S_{ABC}}=\dfrac{AM.AP}{AB.AC}$

Vì $\dfrac{CP}{AP}=k\Rightarrow\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{1}{k}\Rightarrow\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{1}{k+1}$

Do đó: $\dfrac{S_{AMP}}{S_{ABC}}=\dfrac{k}{(k+1)^2}$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\dfrac{S_{BMN}}{S_{ABC}}=\dfrac{k}{(k+1)^2}\ \dfrac{S_{CNP}}{S_{ABC}}=\dfrac{k}{(k+1)^2}$

Từ đó ta có: $S_{MNP}=S_{ABC}-(S_{AMP}+S_{BMN}+S_{CNP})=\left[1-\dfrac{3k}{(1+k)^2}\right]S_{ABC}$

b) Vì diện tích tam giác ABC không đổi nên để diện tích tam giác MNP nhỏ nhất thì $\left[1-\dfrac{3k}{(1+k)^2}\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $(1+k)^2\ge 4k\Rightarrow\dfrac{3k}{(1+k)^2}\le\dfrac{3}{4}\Rightarrow 1-\dfrac{3k}{(1+k)^2}\le\dfrac{1}{4}$.

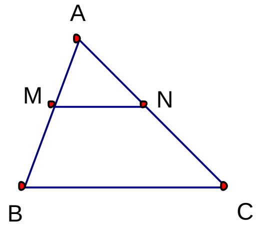
Dấu bằng xảy ra khi k = 1.

Vậy diện tích tam giác MNP lớn nhất bằng $\dfrac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC khi k = 1.

CHUYÊN ĐỀ 4 - CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐỊNH LÍ TA-LÉT. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG.

I. <u>Định lý Ta-lét</u>

A. Kiến thức:



* Định lí Ta-lét: $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ MN\,//\,BC\end{array}\right\}\Leftrightarrow\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$...

* Hệ quả: MN // BC $\Rightarrow\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$

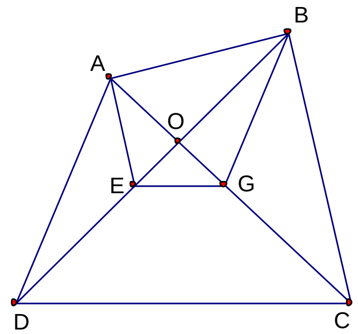
B. **Bài tập áp dụng:**

1. Bài 1:

Cho tứ giác ABCD, đường thẳng qua A song song với BC cắt BD ở E, đường thẳng qua B song song với AD cắt AC ở G

a) Chứng minh: EG // CD

b) Giả sử AB // CD, chứng minh rằng AB^2 = CD. EG



<u>Giải</u>

Gọi O là giao điểm của AC và BD

a) Vì AE // BC $\Rightarrow\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{OA}{OC}$ (1) và BG // AC $\Rightarrow\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{OG}{OA}$ (2)

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: $\dfrac{OE}{OD}=\dfrac{OG}{OC}\Rightarrow$ EG // CD

b) Khi AB // CD thì EG // AB // CD, BG // AD nên

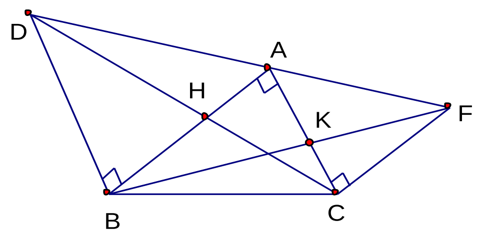
$$\frac{AB}{EG}=\frac{OA}{OG}=\frac{OD}{OB}=\frac{CD}{AB}\Rightarrow\frac{AB}{EG}=\frac{CD}{AB}\Rightarrow AB^2=CD.\,EG$$

2. Bài 2:

Cho ABC vuông tại A, Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân ở B, ACF vuông cân ở C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của AC và BF. Chứng minh rằng:

a) AH = AK

b) $AH^2 = BH.\,CK$



Giải

Đặt AB = c, AC = b.

BD // AC (cùng vuông góc với AB)

nên $\frac{AH}{HB}=\frac{AC}{BD}=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{AH}{HB}=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{AH}{HB+AH}=\frac{b}{b+c}$

Hay $\frac{AH}{AB}=\frac{b}{b+c}\Rightarrow\frac{AH}{c}=\frac{b}{b+c}\Rightarrow AH=\frac{b.c}{b+c}$ (1)

AB // CF (cùng vuông góc với AC) nên $\frac{AK}{KC}=\frac{AB}{CF}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{AK}{KC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{AK}{KC+AK}=\frac{c}{b+c}$

Hay $\frac{AK}{AC}=\frac{b}{b+c}\Rightarrow\frac{AK}{b}=\frac{c}{b+c}\Rightarrow AK=\frac{b.c}{b+c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AH = AK

b) Từ $\frac{AH}{HB}=\frac{AC}{BD}=\frac{b}{c}$ và $\frac{AK}{KC}=\frac{AB}{CF}=\frac{c}{b}$ suy ra $\frac{AH}{HB}=\frac{KC}{AK}\Rightarrow\frac{AH}{HB}=\frac{KC}{AH}$ (Vì AH = AK)

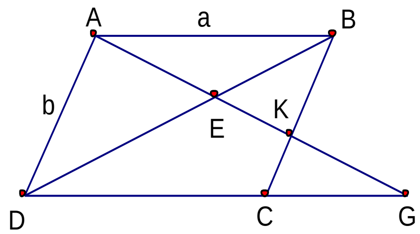
$\Rightarrow AH^2 = BH\,.\,KC$

3. Bài 3: Cho hình bình hành ABCD, đường thẳng a đi qua A lần lượt cắt BD, BC, DC theo thứ tự tại E, K, G. Chứng minh rằng:

a) $AE^2 = EK.\,EG$

b) $\frac{1}{AE}=\frac{1}{AK}+\frac{1}{AG}$

c) Khi đường thẳng a thay đổi vị trí nhưng vẫn qua A thì tích BK. DG có giá trị không đổi



Giải

a) Vì ABCD là hình bình hành và K $\in$ BC nên

AD // BK, theo hệ quả của định lí Ta-lét ta có:

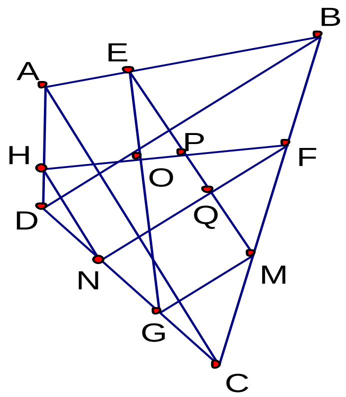
$$\frac{EK}{AE}=\frac{EB}{ED}=\frac{AE}{EG}\Rightarrow\frac{EK}{AE}=\frac{AE}{EG}\Rightarrow AE^2=EK.EG$$

b) Ta có: $\frac{AE}{AK}=\frac{DE}{DB}$; $\frac{AE}{AG}=\frac{BE}{BD}$ nên

$$\frac{AE}{AK}+\frac{AE}{AG}=\frac{BE}{BD}+\frac{DE}{DB}=\frac{BD}{BD}=1\Rightarrow AE\left(\frac{1}{AK}+\frac{1}{AG}\right)=1\ \Rightarrow\ \frac{1}{AE}=\frac{1}{AK}+\frac{1}{AG}\ \text{(đpcm)}$$

c) Ta có: $\frac{BK}{KC}=\frac{AB}{CG}\Rightarrow\frac{BK}{KC}=\frac{a}{CG}$ (1); $\frac{KC}{AD}=\frac{CG}{DG}\Rightarrow\frac{KC}{b}=\frac{CG}{DG}$ (2)

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: $\frac{BK}{b}=\frac{a}{DG}\Rightarrow BK.\,DG=ab$ không đổi (Vì a = AB; b = AD là độ dài hai cạnh của hình bình hành ABCD không đổi)



4. Bài 4:

Cho tứ giác ABCD có AC vuông góc với BD và AC=BD, các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số 1:2. Chứng minh rằng:

a) EG = FH
b) EG vuông góc với FH

Giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CF, DG

Ta có CM = $\frac{1}{2}$ CF = $\frac{1}{3}$BC $\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$EM // AC $\Rightarrow \frac{EM}{AC} = \frac{BM}{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ EM = $\frac{2}{3}$AC (1)

Tương tự, ta có: NF // BD $\Rightarrow \frac{NF}{BD} = \frac{CF}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ NF = $\frac{2}{3}$BD (2)

mà AC = BD (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : EM = NF (a)

Tương tự như trên ta có: MG // BD, NH // AC và MG = NH = $\frac{1}{3}$AC (b)

Mặt khác EM // AC; MG // BD Và AC $\perp$ BD $\Rightarrow$EM $\perp$ MG $\Rightarrow$ $\widehat{EMG} = 90^0$ (4)

Tương tự, ta có: $\widehat{FNH} = 90^0$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{EMG} = \widehat{FNH} = 90^0$ (c)

Từ (a), (b), (c) suy ra ΔEMG = ΔFNH (c.g.c) $\Rightarrow$ EG = FH

b) Gọi giao điểm của EG và FH là O; của EM và FH là P; của EM và FN là Q thì

$\widehat{PQF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{QPF} + \widehat{QFP} = 90^0$ mà $\widehat{QPF} = \widehat{OPE}$ (đối đỉnh), $\widehat{OEP} = \widehat{QFP}$ (ΔEMG = ΔFNH)

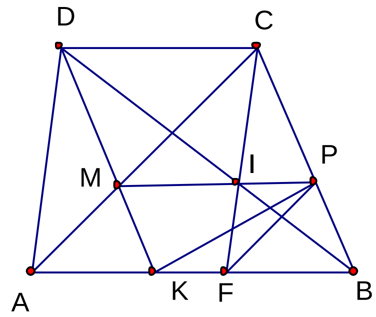
Suy ra $\widehat{EOP} = \widehat{PQF} = 90^0 \Rightarrow$ EO $\perp$ OP $\Rightarrow$ EG $\perp$ FH

5. Bài 5:

Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD. Từ D vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AC tại M và AB tại K, Từ C vẽ đường thẳng song song với AD, cắt AB tại F, qua F ta lại vẽ đường thẳng song song với AC, cắt BC tại P. Chứng minh rằng

a) MP // AB

b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy.



Giải

a) EP // AC $\Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{AF}{FB}$ (1)

AK // CD $\Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK}$ (2)

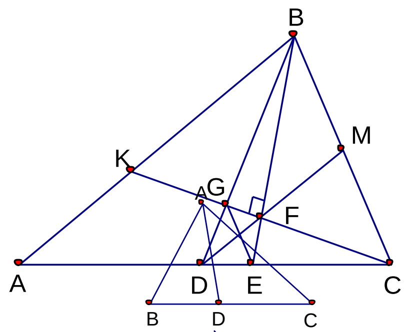
các tứ giác AFCD, DCBK là các hình bình hành nên AF = DC, FB = AK (3)

Kết hợp (1), (2) và (3) ta có $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} \Rightarrow$ MP // AB (Định lí Ta-lét đảo) (4)

b) Gọi I là giao điểm của BD và CF, ta có: $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} = \frac{DC}{FB}$

Mà $\frac{DC}{FB} = \frac{DI}{IB}$ (Do FB // DC) $\Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{DI}{IB} \Rightarrow$IP // DC // AB (5)

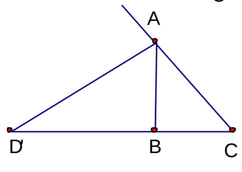
Từ (4) và (5) suy ra : qua P có hai đường thẳng IP, PM cùng song song với AB // DC nên theo tiên đề Ơclít thì ba điểm P, I, M thẳng hang hay MP đi qua giao điểm của CF và DB hay ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy



II. CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức:

. Tính chất đường phân giác:



ΔABC, AD là phân giác góc A $\Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

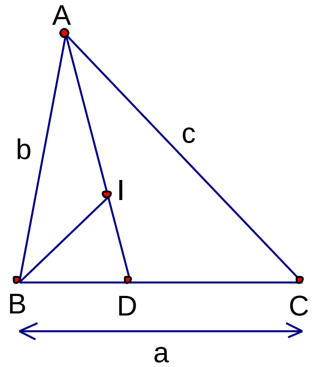
AD'là phân giác góc ngoài tại A: $\dfrac{BD'}{CD'} = \dfrac{AB}{AC}$

B. Bài tập vận dụng

1. Bài 1: Cho ΔABC có BC = a, AB = b, AC = c, phân giác AD

a) Tính độ dài BD, CD

b) Tia phân giác BI của góc B cắt AD ở I; tính tỉ số: $\dfrac{AI}{ID}$



Giải

a) AD là phân giác của BAC nên $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{CD + BD} = \dfrac{c}{b + c} \Rightarrow \dfrac{BD}{a} = \dfrac{c}{b + c} \Rightarrow BD = \dfrac{ac}{b + c}$

Do đó CD = a - $\dfrac{ac}{b + c} = \dfrac{ab}{b + c}$

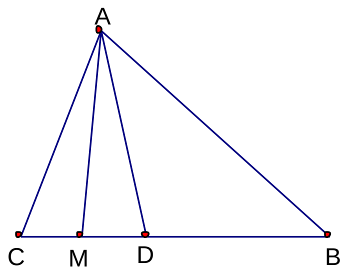
b) BI là phân giác của ABC nên $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AB}{BD} = c : \dfrac{ac}{b + c} = \dfrac{b + c}{a}$

2. Bài 2: Cho ΔABC, có $B < 60^0$ phân giác AD

a) Chứng minh AD < AB

b) Gọi AM là phân giác của ΔADC. Chứng minh rằng BC > 4 DM

Giải



a)Ta có $ADB = C + \dfrac{A}{2} > \dfrac{A + C}{2} = \dfrac{180^0 - B}{2} = 60^0$

$\Rightarrow ADB > B \Rightarrow AD < AB$

b) Gọi BC = a, AC = b, AB = c, AD = d

Trong ΔADC, AM là phân giác ta có

$\dfrac{DM}{CM} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow \dfrac{DM}{CM + DM} = \dfrac{AD}{AD + AC} \Rightarrow \dfrac{DM}{CD} = \dfrac{AD}{AD + AC}$

$\Rightarrow DM = \dfrac{CD.AD}{AD + AC} = \dfrac{CD.\ d}{b + d}$; $CD = \dfrac{ab}{b + c}$ (Vận dụng bài 1) $\Rightarrow DM = \dfrac{abd}{(b + c)(b + d)}$

Để c/m BC > 4 DM ta c/m $a > \dfrac{4abd}{(b + c)(b + d)}$ hay (b + d)(b + c) > 4bd (1)

Thật vậy : do c > d $\Rightarrow (b + d)(b + c) > (b + d)^2 \geq 4bd$. Bất đẳng thức (1) được c/m

3. Bài 3: Cho ΔABC, trung tuyến AM, các tia phân giác của các góc AMB , AMC cắt AB, AC theo thứ tự ở D và E

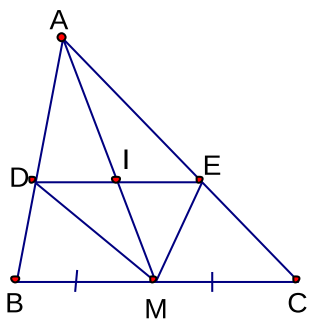
a) Chứng minh DE // BC

b) Cho BC = a, AM = m. Tính độ dài DE

c) Tìm tập hợp các giao diểm I của AM và DE nếu ΔABC có BC cố định, AM = m không đổi

d) ΔABC có điều kiện gì thì DE là đường trung bình của nó

Giải



a) MD là phân giác của AMB nên $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{MA}{MB}$ (1)

ME là phân giác của AMC nên $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{MA}{MC}$ (2)

Từ (1), (2) và giả thiết MB = MC ta suy ra $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EA}{EC} \Rightarrow$ DE // BC

b) DE // BC $\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AM}$. Đặt DE = x $\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{m - \frac{x}{2}}{m} \Rightarrow x = \frac{2a.m}{a + 2m}$

c) Ta có: MI = $\frac{1}{2}$ DE = $\frac{a.m}{a + 2m}$ không đổi $\Rightarrow$ I luôn cách M một đoạn không đổi nên tập hợp các điểm I là đường tròn tâm M, bán kính MI = $\frac{a.m}{a + 2m}$ (Trừ giao điểm của nó với BC)

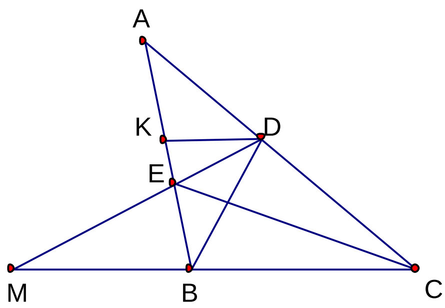
d) DE là đường trung bình của $\Delta ABC \Leftrightarrow DA = DB \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông ở A

4. Bài 4:

Cho ΔABC (AB < AC) các phân giác BD, CE

a) Đường thẳng qua D và song song với BC cắt AB ở K, chứng minh E nằm giữa B và K

b) Chứng minh: CD > DE > BE



<u>Giải</u>

a) BD là phân giác nên

$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} < \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AD}{DC} < \frac{AE}{EB}$ (1)

Mặt khác KD // BC nên $\frac{AD}{DC} = \frac{AK}{KB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{KB} < \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AK + KB}{KB} < \frac{AE + EB}{EB}$

$\Rightarrow \frac{AB}{KB} < \frac{AB}{EB} \Rightarrow KB > EB \Rightarrow$ E nằm giữa K và B

b) Gọi M là giao điểm của DE và CB. Ta có CBD = KDB (Góc so le trong) $\Rightarrow$ KBD = KDB

mà E nằm giữa K và B nên KDB > EDB $\Rightarrow$ KBD > EDB $\Rightarrow$ EBD > EDB $\Rightarrow$ EB < DE

Ta lại có CBD + ECB = EDB + DEC $\Rightarrow$ DEC > ECB $\Rightarrow$ DEC > DCE (Vì DCE = ECB)

Suy ra CD > ED $\Rightarrow$ CD > ED > BE

III. CÁC BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG.

A. Kiến thức:

* Tam giác đồng dạng:

a) trường hợp thứ nhất: (c.c.c)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

b) trường hợp thứ nhất: (c.g.c)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$; A = A'

c. Trường hợp đồng dạng thứ ba (g.g)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow$ A = A'; B = B'

AH; A'H'là hai đường cao tương ứng thì: $\frac{A'H'}{AH}$ = k (Tỉ số đồng dạng); $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = K^2$

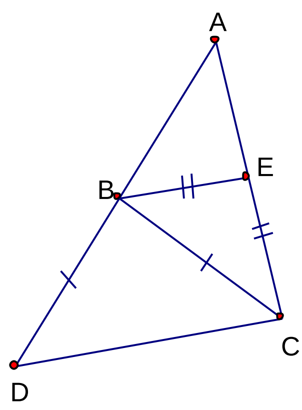
B. Bài tập áp dụng

Bài 1:

Cho ΔABC có B = 2 C, AB = 8 cm, BC = 10 cm.

a)Tính AC

b)Nếu ba cạnh của tam giác trên là ba số tự nhiên liên tiếp thì mỗi cạnh là bao nhiêu?



<u>Giải</u>

Cách 1:

Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho:BD = BC

$\Delta ACD \backsim \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$

$\Rightarrow AC^2 = AB.\ AD = AB.(AB + BD) = AB(AB + BC)$

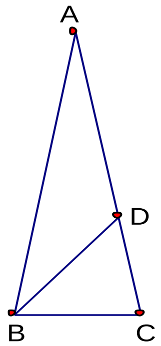
$= 8(10 + 8) = 144 \Rightarrow AC = 12$ cm

Cách 2:

Vẽ tia phân giác BE của $ABC \Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACB$

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{BE}{CB} = \dfrac{AE + BE}{AB + CB} = \dfrac{AC}{AB + CB} \Rightarrow AC^2 = AB(AB + CB) = 8(8 + 10) = 144$

$\Rightarrow AC = 12$ cm



b) Gọi AC = b, AB = a, BC = c thì từ câu a ta có $b^2 = a(a + c)$ (1)

Vì b > a nên có thể b = a + 1 hoặc b = a + 2

+ Nếu b = a + 1 thì $(a + 1)^2 = a^2 + ac \Leftrightarrow 2a + 1 = ac \Leftrightarrow a(c - 2) = 1$

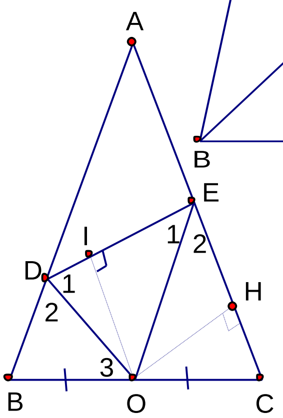
$\Rightarrow a = 1;\ b = 2;\ c = 3$(loại)

+ Nếu b = a + 2 thì $a(c - 4) = 4$

- Với a = 1 thì c = 8 (loại)
- Với a = 2 thì c = 6 (loại)
- với a = 4 thì c = 6 ; b = 5

Vậy a = 4; b = 5; c = 6

Bài 2: Cho ΔABC cân tại A, đường phân giác BD; tính BD biết BC = 5 cm; AC = 20 cm



__Giải__

Ta có $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow CD = 4$ cm và BC = 5 cm

Bài toán trở về bài 1

Bài 3:

Cho ΔABC cân tại A và O là trung điểm của BC. Một điểm O di động trên AB, lấy điểm E trên AC sao cho $CE = \dfrac{OB^2}{BD}$. Chứng minh rằng

a) $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) $\Delta DOE \backsim \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

c) DO, EO lần lượt là phân giác của các góc BDE, CED

d) khoảng cách từ O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB

__Giải__

a) Từ $CE = \dfrac{OB^2}{BD} \Rightarrow \dfrac{CE}{OB} = \dfrac{OB}{BD}$ và $B = C$ (gt) $\Rightarrow \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) Từ câu a suy ra $O_3 = E_2$ (1)

Vì B, O ,C thẳng hàng nên $O_3 + DOE + EOC = 180^0$ (2)

trong tam giác EOC thì $E_2 + C + EOC = 180^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $DOE = B = C$

ΔDOE và ΔDBO có $\dfrac{DO}{DB} = \dfrac{OE}{OC}$ (Do $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$) và $\dfrac{DO}{DB} = \dfrac{OE}{OB}$ (Do OC = OB) và $DOE = B = C$

nên $\Delta DOE \backsim \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

c) Từ câu b suy ra $D_1 = D_2 \Rightarrow$ DO là phân giác của các góc BDE

Củng từ câu b suy ra $E_1 = E_2$ EO là phân giác của các góc CED

c) Gọi OH, OI là khoảng cách từ O đến DE, CE thì OH = OI, mà O cố định nên OH không đổi $\Rightarrow$OI không đổi khi D di động trên AB

CHUYÊN ĐỀ 5: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC

A-Phương pháp giải bài toán cực trị hình học.

1- Hướng giải bài toán cực trị hình học :

a) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất ta phải chứng tỏ được :

+ Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \le m$ (m là hằng số)

+ Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho $f = m$

b) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị nhỏ nhất ta phải chứng tỏ được :

+ Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \ge m$ (m là hằng số)

+ Xác định vị trí của hình H trên miền D để $f = m$

2 - Cách trình bày lời giải bài toán cực trị hình học .

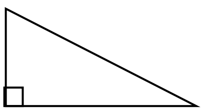
+ *Cách1 :*Trong các hình có tính chất của đề bài, chỉ ra một hình rồi chứng minh mọi hình khác đều có giá trị của đại lượng phải tìm cực trị nhỏ hơn (hoặc lớn hơn) giá trị của đại lượng đó của hình đã chỉ ra.

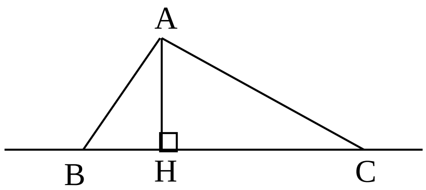
+ *Cách2 :*Biến đổi tương đương điều kiện để đại lượng này đạt cực trị bởi đại lượng khác đạt cực trị cho đến khi trả lời được câu hỏi mà đề bài yêu cầu.

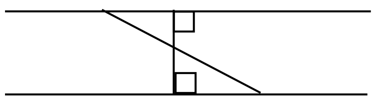
B-Các kiến thức thường dùng giải bài toán cực trị hình học.

1-Sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu .

a-Kiến thức cần nhớ:







h.4

a1) ΔABC vuông tại A (có thể suy biến thành đoạn thẳng) $\Rightarrow AB \le BC$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv C$. *(h.3)*

a2) *(h.4)*

+ $AH \perp a \Rightarrow AH \le AB$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B \equiv H$.

+ $AB < AC \Leftrightarrow HB < HC$

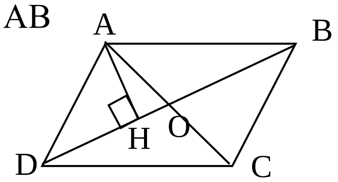
a3)*(h.5)*

$A, K \in a$; $B, H \in b$; $a // b$; $HK \perp a \Rightarrow HK \le AB$

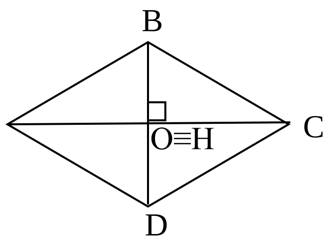
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv K$ và $B \equiv H$.

b-Các ví dụ:

Ví dụ 1: *Trong các hình bình hành có hai đường chéo bằng 6 cm và 8 cm , hình nào có diện tích lớn nhất ? Tính diện tích lớn nhất đó.*



h.6



h.7

Giải :

Xét hình bình hành ABCD có AC = 8 cm; BD = 6 cm *(h.6)*

Gọi O là giao điểm hai đường chéo . Kẻ $BH \perp AC$.

Ta có : $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AC.BH$

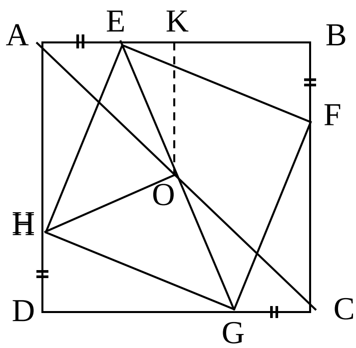
Ta có AC = 8cm, $BH \le BO$ = 3cm. Do đó :

$S_{ABCD} \le 8.3 = 24$ (cm^2)

$S_{ABCD} = 24\ cm^2 \Leftrightarrow BH \equiv BO \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow BD \perp AC$

Vậy max $S_{ABCD} = 24\ cm^2$. Khi đó hình bình hành ABCD là hình thoi *(h.7)* có diện tích $24cm^2$.

Ví dụ 2: *Cho hình vuông ABCD . Trên các cạnh AB,BC ,CD,DA ta lấy theo thứ tự các điểm E,F,G,H sao cho AE = BF = CG = DH . Xác định vị trí của các điểm E, F,G,H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất .*



h.8

Giải :

$\Delta HAE = \Delta EBF = \Delta FCG = \Delta GHD$

$\Rightarrow HE = EF = FG = GH$

$\Rightarrow$ EFGH là hình thoi .

$AHE = BEF$

$\Rightarrow AHE + AEH = 90^0 \;\Rightarrow\; BEF + AEH = 90^0$

$\Rightarrow\; HEF = 90^0$

$\Rightarrow$ EFGH là hình vuông

Gọi O là giao điểm của AC và EG . Tứ giác AECG có AE = CG, AE //CG nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG , do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

ΔHOE vuông cân : $HE^2 = 2OE^2 \Rightarrow HE = OE\sqrt{2}$

Chu vi EFGH = 4HE = $4\sqrt{2}$ OE . Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OE nhỏ nhất

Kẻ $OK \perp AB \;\Rightarrow\; OE \geq OK$ (OK không đổi)

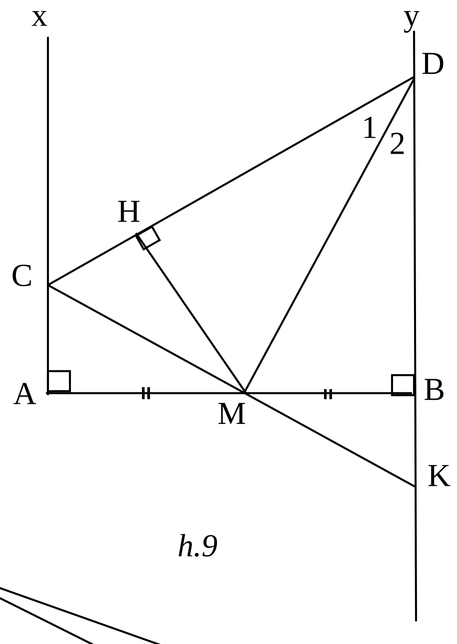
$OE = OK \Leftrightarrow E \equiv K$

Do đó minOE = OK

Như vậy , chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi và chỉ khi E,F,G,H là trung điểm của AB , BC, CD, DA.

Ví dụ 3: *Cho đoạn thẳng AB có độ dài 2a .Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB . Qua trung điểm của M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D .xác định vị trí của các điểm C,D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất .Tính diện tích tam giác đó.*

Giải:



h.9

Gọi K là giao điểm của CM và DB

MA = MB ; $A = B = 90^0$, $AMC = BMK$

$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta MBK \Rightarrow MC = MK$

Mặt khác $DM \perp CK$

$\Rightarrow \Delta DCK$ cân $\Rightarrow D_1 = D_2$

Kẻ $MH \perp CD$.

$\Delta MHD = \Delta MBD \Rightarrow MH = MB = a$

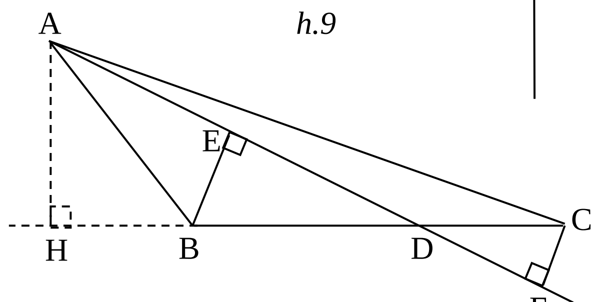
$\Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{2}CD.MH \geq \frac{1}{2}AB.MH = \frac{1}{2}2a.a = a^2$

$S_{MCD} = a^2 \Leftrightarrow CD \perp Ax$ khi đó $AMC = 45^0$; $BMD = 45^0$.

Vậy min $S_{MCD} = a^2$. Các điểm C,D được xác định trên Ax; By sao cho AC = BD =a .

Ví dụ 4: *Cho tam giác ABC có B là góc tù , điểm D di chuyển trên cạnh BC . Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất .*

Giải:



h.10

Gọi S là diện tích ΔABC Khi D di chuyển trên cạnh BC ta có :

$S_{ABD} + S_{ACD} = S$

Kẻ $BE \perp AD$, $CF \perp AD$

$\Rightarrow \frac{1}{2}AD.BE + \frac{1}{2}AD.CF = S \;\Rightarrow BE + CF = \frac{2S}{AD}$

Do đó BE + CF lớn nhất ⇔ AD nhỏ nhất ⇔ hình chiếu HD nhỏ nhất

Do HD ≥ HB (do $\widehat{ABD} > 90^0$) và HD = HB ⇔ D ≡ B

Vậy Khi D ≡ B thì tổng các khoảng cách từ B và C đến AD có giá trị lớn nhất .

2. Sử dụng quan hệ giữa đường thẳng và đường gấp khúc.

a-Kiến thức cần nhớ:

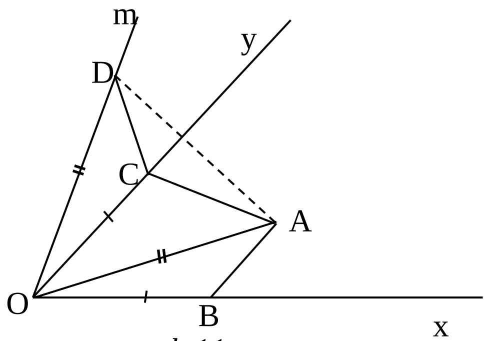
Với ba điểm A,B,C bất kỳ ta có : AC +CB ≥ AB

AC +CB = AB ⇔ C thuộc đoạn thẳng AB

b-Các ví dụ:

Ví dụ 5: *Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm A nằm trong góc đó . Xác định điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho OB = OC và tổng AB +AC là nhỏ nhất .*

Giải:



h.11

Kẻ tia Om nằm ngoài góc xOy sao cho $\widehat{yOm} = \widehat{xOA}$. Trên tia Om lấy điểm D sao cho OD = OA . Các điểm D và A cố định .

OD =OA, OC = OB , $\widehat{COD} = \widehat{BOA}$

⇒ ΔDOC = ΔAOB ⇒ CD = AB

Do đó AC +AB = AC +CD

Mà AC +CD ≥ AD ⇒AC +AB ≥ AD

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi C ∈AD

Vậy min(AC+AB) =AD. Khi đó C là giao điểm của AD và Oy , B thuộc tia Ox sao cho OB = OC.