

BÀI TẬP NÂNG CAO ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

1.1 Tìm tập xác định của một hàm số sau đây :

$$\begin{aligned} \text{a/ } f(x) &= \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}; & \text{b/ } f(x) &= \frac{2 \tan x + 2}{\cos x - 1}; & \text{c/ } f(x) &= \frac{\cot x}{\sin x + 1}; \\ \text{d/ } y &= \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right); & \text{e/ } y &= \frac{\sin(2-x)}{\cos 2x - \cos x}; & \text{f/ } y &= \frac{1}{\sqrt{3} \cot 2x + 1}. \end{aligned}$$

1.2 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$\begin{aligned} \text{a/ } y &= 3 \cos x + 2; & \text{b/ } y &= 1 - 5 \sin 3x; & \text{c/ } y &= 4 \cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) + 9; \\ \text{d/ } f(x) &= \cos x - \sqrt{3} \sin x; & \text{e/ } f(x) &= \sin^3 x + \cos^3 x; & \text{f/ } f(x) &= \sin^4 x + \cos^4 x. \end{aligned}$$

1.3 Giải phương trình :

$$\begin{aligned} \text{a/ } 2 \sin x + \sqrt{2} &= 0; & \text{b/ } \sin(x-2) &= \frac{2}{3}; & \text{c/ } \cot(x+20^\circ) &= \cot 60^\circ; \\ \text{d/ } 2 \cos 2x + 1 &= 0; & \text{e/ } \cos(2x+15^\circ) &= -0,5; & \text{f/ } \sqrt{3} \tan 3x + 1 &= 0. \\ \text{g/ } \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right); & \text{h/ } \cos(2x+1) &= \cos(2x-1); & \text{i/ } \sin 3x &= \cos 2x. \end{aligned}$$

1.4 Giải các phương trình sau :

$$\begin{aligned} \text{a/ } \cos^2 2x &= \frac{1}{4}; & \text{b/ } 4 \cos^2 2x - 3 &= 0; & \text{c/ } \cos^2 3x + \sin^2 2x &= 1; \\ \text{d/ } \sin x + \cos x &= 1; & \text{e/ } \sin^4 x - \cos^4 x &= 1; & \text{f/ } \sin^4 x + \cos^4 x &= 1. \end{aligned}$$

1.5 Tìm các nghiệm của phương trình sau trong khoảng đã cho :

$$\text{a/ } 2 \sin 2x + 1 = 0 \text{ với } 0 < x < \pi; \quad \text{b/ } \cot(x-5) = \sqrt{3} \text{ với } -\pi < x < \pi.$$

1.6 Giải các phương trình sau :

$$\begin{aligned} \text{a/ } \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x &= 0; & \text{b/ } \sqrt{3} \cos x + \sin 2x &= 0; \\ \text{c/ } 8 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x &= \cos 8\left(\frac{\pi}{16} - x\right); & \text{d/ } \sin^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin^4 x &= \sin 4x. \end{aligned}$$

1.7 Giải phương trình :

$$\begin{aligned} \text{a/ } \cos 7x \cdot \cos x &= \cos 5x \cdot \cos 3x; & \text{b/ } \cos 4x + \sin 3x \cdot \cos x &= \sin x \cdot \cos 3x; \\ \text{c/ } 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x &= 0; & \text{d/ } \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x &= 2. \end{aligned}$$

1.8 Giải phương trình :

$$a/ \frac{2 \cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0 ; \quad b/ \frac{\tan x - \sqrt{3}}{2 \cos x + 1} = 0 ; \quad c/ \sin 3x \cot x = 0 ; \quad d/ \tan 3x = \tan x .$$

1.9 Giải phương trình :

$$a/ 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 ;$$

$$b/ \cos^2 x + \sin x + 1 = 0 ;$$

$$c/ 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0 ;$$

$$d/ \cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0 ;$$

$$e/ 2 \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x - 2 = 0 ;$$

$$f/ \cos 2x + \cos x + 1 = 0 ;$$

$$g/ \cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0 ;$$

$$h/ 5 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0 .$$

$$i/ \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} + 2 = 0 ;$$

$$j/ \cos x + 5 \sin \frac{x}{2} - 3 = 0 ;$$

$$k/ \cos 4x - \sin 2x - 1 = 0 ;$$

$$l/ \cos 6x - 3 \cos 3x - 1 = 0 .$$

1.10 Giải các phương trình :

$$a/ \tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} = 0 ;$$

$$b/ \sqrt{3} \tan^2 x - (1 - \sqrt{3}) \tan x - 1 = 0 ;$$

$$c/ 2 \cos 2x - 2(\sqrt{3} + 1) \cos x + 2 + \sqrt{3} = 0 ;$$

$$d/ \frac{1}{\cos^2 x} - (2 + \sqrt{3}) \tan x - 1 + 2\sqrt{3} = 0 .$$

1.11 Giải phương trình :

$$a/ \sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 ;$$

$$b/ \sqrt{3} \cos 3x - \sin 3x = 2 ;$$

$$c/ 3 \cos x + 4 \sin x = -5 ;$$

$$d/ \sin x - 7 \cos x = 7 ;$$

$$e/ 2 \sin 2x - 2 \cos 2x = \sqrt{2} ;$$

$$f/ \sin 2x = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2x .$$

1.12 Giải phương trình :

$$a/ 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3 ;$$

$$b/ 2 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{2} ;$$

$$c/ 2 \sin 2x \cos 2x + \sqrt{3} \cos 4x + \sqrt{2} = 0 ;$$

$$d/ 4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4 .$$

1.13 Giải phương trình :

$$a/ 3 \sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 3 ;$$

$$b/ \sin^2 x + \sin 2x - 2 \cos^2 x = \frac{1}{2} ;$$

$$c/ 2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 4 ;$$

$$d/ \cos^2 2x + \sin 4x - 3 \sin^2 2x = 0 .$$

$$e/ 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 2 ;$$

$$f/ \cos^2 x = 3 \sin 2x + 3 .$$

II. TỔ HỢP – XÁC SUẤT

- 2.1** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn?
- 2.2** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, có thể tạo nên bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số khác nhau ?
- 2.3** Từ các chữ số 2, 3, 4, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100 ?
- 2.4** Cho tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Từ các phần tử của tập X có thể lập bao nhiêu số tự nhiên trong các trường hợp sau :
- a/ Số đó có 4 chữ số khác nhau từng đôi một.
- b/ Số đó là số chẵn và có 4 chữ số khác nhau từng đôi một.
- 2.5** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?
- 2.6** Có tối đa bao nhiêu số máy điện thoại có 7 chữ số bắt đầu bằng số 8 sao cho:
- a/ Các chữ số đôi một khác nhau.
- b/ Các chữ số tùy ý.
- 2.7** a/ Có bao nhiêu cách chọn 3 người từ 10 người để thực hiện cùng một công việc ?
b/ Có bao nhiêu cách chọn 3 người từ 10 người để thực hiện ba công việc khác nhau ?
- 2.8** Trong một cuộc thi có 16 đội tham dự, giả sử rằng không có hai đội nào cùng điểm.
- a/ Nếu kết quả cuộc thi là chọn ra ba đội có điểm cao nhất thì có bao nhiêu cách chọn ?
b/ Nếu kết quả cuộc thi là chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu sự lựa chọn ?
- 2.9** Từ các chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và lớn hơn 8600?
- 2.10** Cho 10 điểm nằm trên một đường tròn.
- a/ Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu là hai trong số 10 điểm đã cho ?
b/ Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ có gốc và ngọn trùng với hai trong số 10 điểm đã cho ?
c/ Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là ba trong số 10 điểm đã cho ?
- 2.11** Một họ 12 đường thẳng song song cắt một họ khác gồm 9 đường thẳng song song (không song song với 12 đường ban đầu). Có bao nhiêu hình bình hành được tạo nên ?
- 2.12** Đa giác lồi 18 cạnh có bao nhiêu đường chéo?
- 2.13** Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song nhau. Trên d_1 lấy 5 điểm, trên d_2 lấy 3 điểm. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó được lấy từ các điểm đã chọn ?
- 2.14** Tìm hệ số của x^4y^9 trong khai triển $(2x - y)^{13}$.

- 2. 15** a/ Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(3x+2)^{10}$.
 b/ Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $(2-x)^9$.
 c/ Khai triển và rút gọn $(2x+1)^4 + (3+x)^5$ thành đa thức.
 d/ Trong khai triển và rút gọn của $(1-2x)^8 + (1+3x)^{10}$, hãy tính hệ số của x^3 .
 e/ Tìm hệ số của x^4 trong khai triển và rút gọn $(x+1)^9 + (x+2)^8 + (x+3)^7 + (x+4)^6$.
- 2. 16** Xét khai triển của $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{15}$.
 a/ Tìm số hạng thứ 7 trong khai triển (viết theo chiều số mũ của x giảm dần).
 b/ Tìm số hạng không chứa x trong khai triển.
 c/ Tìm hệ số của số hạng chứa x^3
- 2. 17** Giả sử khai triển $(1-2x)^{15}$ có $(1-2x)^{15} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$.
 a/ Tính a_9 . b/ Tính $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$. c/ Tính $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{14} - a_{15}$.
- 2. 18** a/ Biết rằng hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ bằng 90. Tìm n.
 b/ Trong khai triển của $(x-1)^n$, hệ số của x^{n-2} bằng 45. Tính n.
- 2. 19** Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, 6kg, 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân trong số đó. Tính xác suất để 3 quả cân được chọn có trọng lượng không vượt quá 9kg.
- 2. 20** Một lô hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Tính xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra đó có không quá một phế phẩm.
- 2. 21** Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên bé hơn 100. Tính xác suất để số đó:
 a/ chia hết cho 3 b/ chia hết cho 5 c/ chia hết cho 7
- 2. 22** Một cái bình đựng 4 quả cầu xanh và 6 quả cầu vàng. Lấy ra 3 quả cầu từ bình. Tính xác suất để
 a/ được đúng 2 quả cầu xanh ;
 b/ được đủ hai màu ;
 c/ được ít nhất 2 quả cầu xanh.
- 2. 23** Có hai hộp đựng các viên bi. Hộp thứ nhất đựng 2 bi đen, 3 bi trắng. Hộp thứ hai đựng 4 bi đen, 5 bi trắng.

- a/ Lấy mỗi hộp 1 viên bi. Tính xác suất để được 2 bi trắng.
 b/ Đồn bi trong hai hộp vào một hộp rồi lấy ra 2 bi. Tính xác suất để được 2 bi trắng.
- 2. 24** Một hộp có 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên ra hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau.
 a/ Tính xác suất để số nhận được là một số lẻ.
 b/ Tính xác suất để số nhận được là một số chẵn.
- 2. 25** Một lớp có 30 học sinh, gồm 8 học sinh giỏi, 15 học sinh khá và 7 học sinh trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em để dự đại hội. Tính xác suất để
 a/ 3 học sinh được chọn đều là học sinh giỏi ;
 b/ có ít nhất một học sinh giỏi ;
 c/ không có học sinh trung bình.
- 2. 26** Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một phát đạn vào bia. Xác suất để người thứ nhất bắn trúng bia là 0.9, và của người thứ hai là 0.7. Tính xác suất để
 a/ cả hai cùng bắn trúng ;
 b/ ít nhất một người bắn trúng ;
 c/ chỉ một người bắn trúng.
- 2. 27** Gieo một con súc sắc cân đối 5 lần. Gọi X là số lần xuất hiện mặt 4 chấm.
 a/ Lập bảng phân bố xác suất của X.
 b/ Tính kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của X.
 c/ Tính xác suất để con súc sắc xuất hiện mặt 4 chấm ít nhất 3 lần.
 d/ Tính xác suất để con súc sắc xuất hiện mặt 4 không vượt quá 3 lần.

III. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG

3. 1 Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} \text{a) } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{b) } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \\ \text{c) } 1.4 + 2.7 + \dots + n(3n+1) &= n(n+1)^2 & \text{d) } 2^n > 2n+1 \quad (n \geq 3) & & \text{e) } 2^{n+2} > 2n+5 \end{aligned}$$

3. 2 Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} \text{a) } n^3 + 11n &\text{ chia hết cho } 6. & \text{b) } n^3 + 3n^2 + 5n &\text{ chia hết cho } 3. \\ \text{c) } 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1} &\text{ chia hết cho } 5. \end{aligned}$$

3. 3 Tìm số hạng đầu, công sai, số hạng thứ 15 và tổng của 15 số hạng đầu của cấp số cộng vô hạn (u_n) , biết:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} u_3 = -15 \\ u_4 = 18 \end{cases} \end{aligned}$$

$$d) \begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -12 \\ u_1 u_2 u_3 = 8 \end{cases}$$

- 3.4** a) Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.
 b) Giữa các số 4 và 67 hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.
- 3.5** a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng là 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.
 b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 22 và tổng các bình phương của chúng bằng 66.
- 3.6** a) Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm số đo các góc đó.
 b) Số đo các góc của một đa giác lồi có 9 cạnh lập thành một cấp số cộng có công sai $d = 3^0$. Tìm số đo của các góc đó.
 c) Số đo các góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số cộng và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. Tìm số đo các góc đó.
- 3.7** Chứng minh rằng nếu 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì các số x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng, với:
- a) $x = b^2 + bc + c^2; y = c^2 + ca + a^2; z = a^2 + ab + b^2$
 b) $x = a^2 - bc; y = b^2 - ca; z = c^2 - ab$
- 3.8** Tìm x để 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng, với:
- a) $a = 10 - 3x; b = 2x^2 + 3; c = 7 - 4x$ b) $a = x + 1; b = 3x - 2; c = x^2 - 1$