TÀI LIỆU MÔN TOÁN LỚP 6 NÂNG CAO

DÃY SỐ TỰ NHIÊN VIẾT THEO QUY LUẬT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN.

- Nắm được khái niệm thế nào là dãy số viết theo quy luật (các phần tử của dãy có mối liên hệ nào đó với nhau)

- Biết nhận dạng dãy số viết theo quy luật và phân tích để tìm ra quy luật đó

B. DÃY SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT THƯỜNG GẶP

1. Định nghĩa: Dãy cộng là dãy mà mỗi phần tử kể từ phần tử thứ 2 đều lớn hơn phần tử liền trước đó cùng một số đơn vị.

TQ: Dãy $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ là dãy cộng $\Leftrightarrow$ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1}$

2. Ví dụ: Dãy số tự nhiên: 0, 1, 2, 3, 4……

Dãy các số chia 7 có cùng số dư là 3 : 3, 10, 17, 24, 31……

3. Các loại bài tập về dãy cộng:

VD: Xét dãy cộng: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$

a) Tìm phần tử thứ n trong dãy:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

b) Tính tổng của dãy

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

c) Số các số hạng của dãy:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$ (Trong đó *d* là khoảng cách giữa hai phần tử liên tiếp)

Bài tập áp dụng:

Cho dãy: 1, 4, 7, 10, 13,…… (1)

a./ Tìm phần tử thứ 102 của dãy?

b./ Nếu viết dãy trên liên tiếp thành một số thì chữ số thứ 302 của số tạo thành là số mấy?

Giải:

a./ Phần tử thứ 102 của dãy là $a_{102} = 1 + (102 - 1).\, 3 = 304$

b./ Phân tích: Dãy số trên khi viết liền thành 1 số được chia thành các dãy sau

- Dãy các số có 1 chữ số chia 3 dư 1 là: 1, 4, 7 gồm 3 chữ số

- Dãy các số có 2 chữ số chia 3 dư 1 là 10, 13, …, 97 gồm $\frac{97-10}{3}+1=30$ số nên có 30 . 2 = 60 chữ số

- Để viết tiếp dãy trên đến chữ số thứ 102 ta phải dùng các số có 3 chữ số kể từ 100… đảm bảo chia 3 dư 1. Vậy cần 302 - (3 + 60) = 239 chữ số nữa hay 79 số có 3 chữ số kể từ 100 và 2 chữ số nữa của số thứ 80 (là 2 chữ số đầu trong trong số thứ 80 của dãy 100, 103, 106, ...). Mà số thứ 80 của dãy là: 100 + (80 - 1).3 = 337

Vậy chữ số thứ 302 của số tạo bởi dãy (1) là 3 (hàng chục trong số 337)

147101317……3343**3**7340…

$\downarrow$

Chữ số thứ 302

Chú ý: Trong phần b./ khi chữ số thứ n phải tìm là số quá lớn ta tiếp tục phân tích thành dãy các số có 3, có 4 … chữ số và tiếp tục làm tương tự

II/ Mở rộng

1. VD: Cho các dãy sau:

1, 3, 6, 10, 15…… (1)

2, 5, 10, 17, 26 … (2)

Tìm phần tử thứ 108 của các dãy trên?

Giải:

- Dãy (1) chưa là dãy cộng nhưng có thể viết lại thành dãy sau:

$$\frac{1.2}{2},\frac{2.3}{2},\frac{3.4}{2},\frac{4.5}{2}....$$

Xét dãy các thừa số thứ nhất trong các tử số:

1, 2, 3, 4, … (1)’

Đây là dãy cộng, dễ thấy phần tử thứ 108 của dãy (1)’ là 108. Từ đó suy ra phần tử thứ 108 của dãy (1) là $\frac{108.109}{2}=5886$

- Dãy (2) viết thành dãy : 1^2+1, 2^2+1, 3^2+1, 4^2+1, 5^2+1…

Tương tự ta tính được phần tử thứ 108 của dãy (2) là $108^2+1=11665$

2. Dãy Fibonaci:

Dãy số Fibonaci là dãy bắt đầu bằng hai phần tử là 1, 1 và kể từ phần tử thứ 3 của dãy mỗi phần tử là tổng của hai phần tử liền trước phần tử đó

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…

Dãy số Fibonaci có nhiều tính chất thú vị ta sẽ nghiên cứu trong các phần tiếp theo

C. CÁC BÀI TẬP

Bài 1: Cho các dãy sau:

1, 3, 5, 7, 9…… (1)

1, 10, 19, 28, 37, …. (2)

1, 3, 6, 10, 15,…. (3)

1, 7, 17, 31, 49, …. (4)

1, 5, 11, 19, 29, …. (5)

a) Tìm phần tử thứ 123 của các dãy trên:

b) Giả sử dãy (1) có 500 phần tử, dãy (2) có 200 phần tử. Tìm dãy các phần tử giống nhau của hai dãy?

Bài 2: Cho dãy : 2, 22, 222, 2222, …, $\underbrace{222\ldots22}_{2008 \text{ số } 2}$

Bài 3:

Ta có: $a_k = \dfrac{(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3}{(k+1)^3 . k^3} = \dfrac{1}{k^3} - \dfrac{1}{(k+1)^3}$

Do đó:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2008} = \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2008^3} - \frac{1}{2009^3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2009^3} = \frac{8108486728}{8108486729}$$

CHỦ ĐỀ 2:

CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA MỘT LUỸ THỪA
ĐỒNG DƯ _ SO SÁNH HAI LUỸ THỪA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN.

- Nắm được cách tìm số tận cùng của một luỹ thừa với cơ số là số tự nhiên bất kỳ
- Hiểu thế nào là đồng dư, vận dụng tốt kiến thức của đồng dư thức vào làm các bài tập về tìm chữ số tận cùng hoặc chứng minh chia hết
- Nắm được các phương pháp cơ bản dùng để so sánh hai luỹ thừa với số mũ tự nhiên. Vận dụng tốt kiến thức để làm bài tập

B. PHƯƠNG PHÁP TÌM SỐ TẬN CÙNG CỦA MỘT LUỸ THỪA

1. Chú ý:

a./ Các số có tận cùng là 0, 1, 5, 6 nâng lên luỹ thừa nào(khác 0) thì đều có tận cùng là 0, 1, 5, 6

b./ Các số có tận cùng 2, 4, 8 nâng lên luỹ thừa 4 thì có tận cùng là 6

c./ Các số có tận cùng 3, 7, 9 nâng lên luỹ thừa 4 thì có tận cùng là 1

d./ Số a và a^{4n+1} có chữ số tận cùng giống nhau ($\forall n, a \in N, a \neq 0$)

CM: d./ Dùng phương pháp quy nạp:

Xét bài toán: CMR $a^{4n+1} - a \vdots 10$ ($\forall n, a \in N^*$)

- Với n = 1 ta dễ dàng chứng minh $a^5 - a \vdots 10$
- Giả sử bài toán đúng với n = k ($a^{4k+1} - a \vdots 10$ ($\forall k, a \in N^*$))
- Ta CM bài toán đúng với n = k + 1 $\Leftrightarrow$ $a^{4(k+1)+1} - a \vdots 10$
- Ta có: $a^{4(k+1)+1} - a = a^4 . a^{4k+1} - a \Leftrightarrow a^4 . a^{4k+1} - a^5$ (Vì a^5 và a có cùng chữ số tận cùng).
- Mà $a^4 . a^{4k+1} - a^5 = a^4 (a^{4k+1} - a) \vdots 10 \Rightarrow a^{4(k+1)+1} - a \vdots 10$ <u>Đpcm.</u>

2./ Phương pháp

Để giải bài toán tìm chữ số tận cùng của một luỹ thừa ta tìm cách đưa cơ số của luỹ thừa về dạng đặc biệt hoặc đưa số mũ về dạng đặc biệt đã biết cách tính theo phần chú ý trên

VD1: Tìm chữ số tận cùng của 6^{195}; 51^{51}; 2^{1000}; $99^{99^{108}}$ …

Giải:

- Tận cùng của 6^{195} là 6
- Tận cùng của 51^{51} là 1
- Ta có $2^{1000} = 2^3 . 2^{4 . 249 + 1}$ mà 2^3 có tận cùng là 8 và $2^{4 . 249 + 1}$ có tận cùng là 2

(Hoặc $2^{1000} = \left(2^4\right)^{250} = 16^{250}$) nên 2^{1000} có tận cùng là 6

- Ta có : $99^{99} = 99.\left(99^2\right)^{49} = 99.\ \overline{(....1)}^{\,49}$ có tận cùng là 9 nên $99^{99^{108}} = \overline{(.....9)}^{108} = [\overline{(.....9)}^2]^{54}$ có tận cùng là 1

3./ Mở rộng

3.1/ **Đồng dư:**

a/ Khái niệm: Trong chú ý d./ ở phần 1 ta có thể nói a đồng dư với a^{4n+1} theo modun 10 (là hai số có cùng số dư khi chia cho 10)

Tổng quát : Số tự nhiên a đồng dư với số tự nhiên b theo modun m (m $\neq 0$) nếu a và b chia cho m có cùng một số dư.

Ký hiệu $a \equiv b \pmod m$ với a, b, m $\in$ N và m $\neq 0$ (1)

Khi đó nếu a $\vdots$ m ta có thể viết a $\equiv 0 \pmod m$

Hệ thức (1) được gọi là một đồng dư thức

b/ Một số tính chất cơ bản của đồng dư thức

Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ thì:

1. $a + c \equiv b + d \pmod m$ và $a - c \equiv b - d \pmod m$
2. $a.c \equiv b.d \pmod m$
3. $a^n \equiv b^n \pmod m$

Các tính chất này có thể được áp dụng cho nhiều đồng dư thức cùng modun

c/ Ví dụ:

VD1. Tìm số dư của 3^{100} cho 13.

Tìm số dư trong phép chia trên nghĩa là tìm số tự nhiên nhỏ hơn 13 và đồng dư với 3^{100} theo modun 13

Ta có $3^{100} = 3.3^{99} = 3.\left(3^3\right)^{33}$

Vì $3^3 = 27 = 13.2 + 1$, nên $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ do đó $(3^3)^{33} \equiv 1^{33} \pmod{13}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{hay } 3^{99} \equiv 1 \pmod{13} \\ \text{và } 3 \equiv 3 \pmod{13} \end{array}\right\} \Rightarrow 3.3^{99} \equiv 3.1 \pmod{13}$$

nên $3^{100} \equiv 3 \pmod{13}$. Vậy 3^{100} chia cho 13 có số dư là 3

VD 2 .Chứng minh rằng $2^{2008} - 8$ chia hết cho 31

Để chứng minh $2^{2008} - 8$ chia hết cho 31 ta chứng minh $2^{2008} - 8 \equiv 0 \pmod{31}$

Ta có : $2^{2008} = 2^3.2^{2005} = 2^3.(2^5)^{401}$ mà $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$

nên ta có $(2^5)^{401} \equiv 1^{401} \pmod{31} \Rightarrow 2^3.2^{2005} \equiv 2^3.1 \pmod{31}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 2^{2008} \equiv 8 \pmod{31} \\ \text{Mặt khác } 8 \equiv 8 \pmod{31} \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{2008} - 8 \equiv 8 - 8 \pmod{31}$$

Nên $2^{2008} - 8 \equiv 0 \pmod{31}$. Vậy $2^{2008} - 8$ chia hết cho 31 Đpcm.

VD 3: CM rằng với mọi số tự nhiên n thì số $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133

Ta có: $12^{2n+1} = 12.12^{2n} = 12.144^n$

Vỡ $144 \equiv 11 \pmod{133}$ nên $144^n \equiv 11^n \pmod{133}$

suy ra $12.144^n \equiv 12.11^n \pmod{133}$ (1)

Mặt khác: $11^{n+2} = 121.11^n$

Mà $121 \equiv -12 \pmod{133}$ nên $121.11^n \equiv -12.11^n \pmod{133}$ (2)

Cộng vế (1) và (2) ta được $12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133}$

Vậy $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133 Đpcm

VD 4: CM $5^{8^{2008}} + 23 \,\vdots\, 24$

Ta có $5^8 = 25^4$ mà $25 \equiv 1 \pmod{24}$ nên $25^4 \equiv 1 \pmod{24} \Rightarrow 25^{4^{2008}} \equiv 1 \pmod{24}$

cũn $23 \equiv 23 \pmod{24}$

Suy ra $5^{8^{2008}} + 23 \equiv \pmod{24}$ Vậy $5^{8^{2008}} + 23 \,\vdots\, 24$ Đpcm

3.2/ **So sánh hai luỹ thừa**

a/ Phương pháp: Để so sánh hai luỹ thừa ta dùng các tính chất sau:

- Trong hai luỹ thừa cùng cơ số luỹ thừa nào có số mũ lớn hơn thì lớn hơn
- Trong hai luỹ thừa cùng số mũ luỹ thừa nào có cơ số lớn hơn thì lớn hơn
- Dùng luỹ thừa trung gian

b/ Ví dụ: So sánh

1. 10^{200} và 99^{100}
2. 64^{8} và 16^{12}
3. 6^{100} và 3^{170}

Giải: Xét VD 3:

Ta có:

$6^{100} = 2^{100}.3^{100}$ và $3^{170} = 3^{70}.3^{100}$

$\Rightarrow$ Để so sánh 6^{100} và 3^{170} ta chỉ cần so sánh 2^{100} và 3^{70}.

Vì $2^3 < 3^2$ nên $(2^3)^{34} < (3^2)^{34}$

hay $2^{102} < 3^{68}$ mà $2^{100} < 2^{102} < 3^{68} < 3^{70}$

$\Rightarrow 2^{100} < 3^{70}$

Vậy $6^{100} < 3^{170}$

C. CÁC BÀI TẬP

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có:

a) $7^{14n} - 1$ chia hết cho 5

b) $12^{4n+1} + 3^{4n+1}$ chia hết cho 5

c) $9^{2001n} + 1$ chia hết cho 10

d) $n^2 + n + 12 \not\vdots\ 5$

Bài 2: Tìm chữ số tận cùng của

a) 2008^{2009} b) 192^{16} c) $(1234^{12})^{34}$ d) $(19^5)^{1979}$

e) 1997^{1997} f) $(33^{33})^{33}$ g) 357^{735} h) $(14^4)^{68}$

Bài 3: Cho $A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{20}$

$B = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{300}$

a) Tìm chữ số tận cùng của A

b) Chứng minh rằng B chia hết cho 2

b) Chứng minh rằng B – A chia hết cho 5

Bài 4: Tìm số dư trong các phép chia sau:

a) $3^{100} : 7$ b) $9! : 11$ c) $(2^{100} + 3^{105}) : 15$ d) $(1532^5 - 1) : 9$

Bài 5: Chứng minh rằng:

a) $3012^{93} - 1 \vdots 9$ b) $2093^n - 803^n - 464^n - 261^n \vdots 271$

c) $6^{2n} + 3^{n+2} 3^n \vdots 11$ d) $5^{2n+1}.2^{n+2} + 3^{n+2}.2^{2n+1} \vdots 19$ (với $\forall n \in N$)

Bài 6: Ngày 1 tháng 1 năm 2010 bạn Nam sẽ kỷ niệm ngày sinh lần thứ 15 của mình. Biết rằng ngày 1 tháng 1 năm 2008 là ngày thứ 3

a) Hãy tính xem bạn Nam sinh vào thứ ngày mấy

b) Bạn Nam sẽ tổ chức sinh nhật lần thứ 15 vào ngày thứ mấy?

Bài 7: Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 + c^2 \vdots 9$ thỡ ớt nhất một trong cỏc hiệu $a^2 - b^2$ hoặc $a^2 - c^2$ hoặc $b^2 - c^2$ chia hết cho 9

Bài 8: So sánh các số sau:

a) 32^{81} và 31^{90}

b) $1102^{2009} - 1102^{2008}$ và $1102^{2008} - 1102^{2007}$

c) $A = (2008^{2007} + 2007^{2007})^{2008}$ và $B = (2008^{2008} + 2007^{2008})^{2007}$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 7: Nhận xét: Khi chia số nguyên tuỳ ý n cho 9 thì số dư nhận được sẽ là một trong các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Bởi vậy

Nếu $n \equiv 0 \pmod 9$ thì $n^2 \equiv 0 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 1 \pmod 9$ thì $n^2 \equiv 1 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 2 \pmod 9$ thì $n^2 \equiv 4 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 3 \pmod 9$ thì $n^2 \equiv 0 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 4 \pmod 9$ thì $n^2 \equiv 7 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 5 \pmod 9$ thì $n^2 \equiv 7 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 6 \pmod 9$ thì $n^2 \equiv 0 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 7 \pmod 9$ thì $n^2 \equiv 4 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 8 \pmod 9$ thì $n^2 \equiv 1 \pmod 9$

Vậy dù với số nguyên n nào đi chăng nữa thì số n^2 chia cho 9 cũng có số dư là một trong các số 0, 1, 4, 7.

Gọi số dư khi chia a^2, b^2, c^2 cho 9 lần lượt là r_1, r_2, r_3

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \equiv r_1 + r_2 + r_3 \equiv 0 \pmod 9$ (Vì $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 9)

Như vậy r_1, r_2, r_3 chỉ có thể nhận các giá trị 0, 1, 4, 7 nên $r_1 + r_2 + r_3$ chỉ có thể chia hết cho 9 trong các trường hợp sau

1) $r_1 = r_2 = r_3 = 0$

2) Một trong các số r_1, r_2, r_3 bằng 1 hai số còn lại đều bằng 4

3) Một trong các số r_1, r_2, r_3 bằng 4 hai số còn lại đều bằng 7

4) Một trong các số r_1, r_2, r_3 bằng 7 hai số còn lại đều bằng 1. Vậy trong mọi trường hợp đều có ít nhất hai trong các số r_1, r_2, r_3 bằng nhau. Điều này có nghĩa ít nhất hai trong các số a^2, b^2, c^2 có cùng số dư khi chia cho 9. Vậy có ít nhất một trong các hiệu $a^2 - b^2$ hoặc $a^2 - c^2$ hoặc $b^2 - c^2$ chia hết cho 9 Đpcm.

Bài 8: Ta có

c) $A = (2008^{2007} + 2007^{2007})^{\mathbf{2008}}$

$= (2008^{2007} + 2007^{2007})^{\mathbf{1}}.(2008^{2007} + 2007^{2007})^{\mathbf{2007}} > 2008^{\mathbf{2007}}.(2008^{2007} + 2007^{2007})^{\mathbf{2007}}$

$= (2008.2008^{2007} + \mathbf{2008}.2007^{2007})^{\mathbf{2007}} > (2008.2008^{2007} + \mathbf{2007}.2007^{2007})^{2007}$

$= (2008^{2008} + 2007^{2008})^{2007} = B$

Vậy $A > B$

Mở rộng:

Ta có thể chứng minh bài toán tổng quát :

$(a^n + b^n)^{n+1} > (a^{n+1} + b^{n+1})^n$ với a, b, n là các số nguyên dương.

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$.

Ta co $(a^n + b^n)^{n+1} = (a^n + b^n)^n.(a^n + b^n) > (a^n + b^n)^n.a^n = [(a^n + b^n)a]^n = (a^n.a + b^n.a)^n \geq (a^n.a + b^n.b)^n = (a^{n+1} + b^{n+1})^n$.

Trong ví dụ trên với a = 2008, b = n = 2007, ta có A > B.

CHỦ ĐỀ 3

CÁC VẤN ĐỀ NÂNG CAO VỀ TÍNH CHIA HẾT, ƯỚC VÀ BỘI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN.

- Nắm được các dấu hiệu chia hết, tính chất chia hết của một tổng
- Hiểu về mối quan hệ giữa ước và bội với tính chia hết

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨNG MINH VỀ TÍNH CHIA HẾT

I. Chú ý :

Nhắc lại về ước và bội

- Nếu $a \vdots b$ ta nói b là ước của a a là bội của b

- Khi $a \vdots d$ và $b \vdots d$ ta nói d là ước chung của a và b. Khi d là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của a và b ta nói d là ước chung lớn nhất của a và b

Ký hiệu ƯCLN(a,b) = d hoặc (a,b) = d

- - Khi $m \vdots a$ và $m \vdots b$ ta nói m là bội chung của a và b. Khi m # 0 và m là số nhỏ nhất trong tập hợp các bội chung của a và b ta nói m là bội chung nhỏ nhất của a và b

Ký hiệu BCNN(a,b) = m hoặc [a,b] = m

Một số dấu hiệu chia hết cho

1. Dấu hiệu chia hết cho 11:

Một số chia hết cho 11 khi tổng các chữ số ở vị trí lẻ bằng tổng các chữ số ở vị trí chẵn và chỉ những số đó mới chia hết cho 11

2. Dấu hiệu chia hết cho 4, 25

Những số có hai chữ số tận cùng chia hết cho 4 (hoặc 25) thì chia hết cho 4 (hoặc 25) và chỉ những số đó mới chia hết cho 4 (hoặc 25)

3. Dấu hiệu chia hết cho 8, 125

Những số có ba chữ số tận cùng chia hết cho 8 (hoặc 125) thì chia hết cho 8 (hoặc 125) và chỉ những số đó mới chia hết cho 8 (hoặc 125)

Một số tính chất:

- Nếu một tích chia hết cho số nguyên tố p thì trong tích chứa ít nhất một thừa số chia hết cho p

- Nếu tích a.b chia hết cho m trong đó b và m là hai số nguyên tố cùng nhau thì a chia hết cho m

- Nếu a chia hết cho m và n thì a chia hết cho bội chung nhỏ nhất của m và n

Cách phát biểu khác: Nếu a chia hết cho 2 số nguyên tố cùng nhau thì a chia hết cho tích hai số đó

- Nếu $A \vdots B$ thì $mA \pm nB \vdots B$

($m,n \in N$, *A và B là các biểu thức của số tự nhiên*)

II. Các phương pháp chứng minh chia hết.

1. Sử dụng tính chất chia hết của một tổng.

Ví dụ:

a/ Cho A = $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \ldots + 2^{99}$

CMR: A chia hết cho 31

Giải: Ta có $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \dots + 2^{99}$

$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5.(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{95}.(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$

$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4).(1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{95})$

$= 31.(1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{95})$ chia hết cho 31 Đpcm.

b/ Tìm số tự nhiên n để 3n + 4 chia hết cho n – 1.

Giải: Để $3n + 4 \vdots n - 1 \Leftrightarrow [1.(3n + 4) - 3.(n - 1)] \vdots n - 1 \Leftrightarrow 7 \vdots n - 1$ hay n – 1 $\in$ Ư(7)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n - 1 = 1 \\ n - 1 = 7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 8 \end{array}\right.$ Vậy với n = 2 hoặc n = 8 thì $3n + 4 \vdots n - 1$

2. Sử dụng đồng dư thức.

Ví dụ: Chứng tỏ rằng: $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ chia hết cho 10

Giải: Ta có

$$17^5 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$24^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$13^{21} = 13.\left(13^4\right)^5 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 17^5 + 24^4 - 13^{21} \equiv 7 + 6 - 3 \pmod{10}$$

Hay $17^5 + 24^4 - 13^{21} \equiv 0 \pmod{10}$. Vậy $17^5 + 24^4 - 13^{21} \vdots 10$ Đpcm.

3. Sử dụng tính chất của số nguyên tố cùng nhau

Ví dụ: CMR: $n^5 - n \vdots 30$

Giải: Bài toán luôn đúng với n = 0 và n =1

Xét $n \geq 2$:

Đặt $A = n^5 - n = n(n^2 + 1)(n+1)(n-1)$

Ta có $A \vdots 10$ (Vì n^5 và n có chữ số tận cùng giống nhau)

$A \vdots 3$ (Vì trong A có tích của 3 số tự nhiên liên tiếp (n-1)n(n+1))

$\Rightarrow$ A chia hết cho cả 3 và 10.

Mà ƯCLN(3, 10) = 1 nên A chia hết cho 3.10

Vậy $A \vdots 30$ Đpcm.

C. CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI VÀ SỐ NGUYÊN TỐ

Phương pháp chung để giải :

1/ Dựa vào định nghĩa ƯCLN để biểu diễn hai số phải tõm, liờn hệ với cỏc yếu tố đó cho để tõm hai số.

2/ Trong một số trường hợp, có thể sử dụng mối quan hệ đặc biệt giữa ƯCLN, BCNN và tích của hai số nguyên dương a, b, đó là : **ab = (a, b).[a, b]**, trong đó (a, b) là ƯCLN và [a, b] là BCNN của a và b.

Việc **chứng minh** hệ thức này không khó :

Theo định nghĩa ƯCLN, gọi d = (a, b) => a = md ; b = nd với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1 (*)

Từ (*) => ab = mnd^2 ; [a, b] = mnd

=> (a, b).[a, b] = d.(mnd) = mnd^2 = ab

=> ab = (a, b).[a, b] . (**)

Chỳng ta hóy xột một số vớ dụ minh họa.

Bài toán 1 : Tìm hai số nguyên dương a, b biết [a, b] = 240 và (a, b) = 16.

Lời giải : Do vai trò của a, b là như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b$.

Từ (*), do (a, b) = 16 nên a = 16m ; b = 16n ($m \le n$ do $a \le b$) với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1.

Theo định nghĩa BCNN :

[a, b] = mnd = mn.16 = 240 => mn = 15

=> m = 1 , n = 15 hoặc m = 3, n = 5 => a = 16, b = 240 hoặc a = 48, b = 80.

Chỳ ý : Ta có thể áp dụng công thức (**) để giải bài toán này : ab = (a, b).[a, b] => $mn.16^2$ = 240.16 suy ra mn = 15.

Bài toán 2 : Tìm hai số nguyên dương a, b biết ab = 216 và (a, b) = 6.

Lời giải : Lập luận như bài 1, giả sử $a \le b$.

Do (a, b) = 6 => a = 6m ; b = 6n với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1 ; $m \le n$.

Vỡ vậy : ab = 6m.6n = 36mn => ab = 216 tương đương mn = 6 tương đương m = 1, n = 6 hoặc m = 2, n = 3 tương đương với a = 6, b = 36 hoặcc là a = 12, b = 18.

Bài toán 3 : Tìm hai số nguyên dương a, b biết ab = 180, [a, b] = 60.

Lời giải :

Từ (**) => (a, b) = ab/[a, b] = 180/60 = 3.

Tìm được (a, b) = 3, bài toán được đưa về dạng bài toán 2.

Kết quả : a = 3, b = 60 hoặc a = 12, b = 15.

Chỳ ý : Ta có thể tính (a, b) một cách trực tiếp từ định nghĩa ƯCLN, BCNN :

Theo (*) ta có ab = mnd^2 = 180 ; [a, b] = mnd = 60 => d = (a, b) = 3.

Bài toán 4 : Tìm hai số nguyên dương a, b biết a/b = 2,6 và (a, b) = 5.

Lời giải : Theo (*), (a, b) = 5 => a = 5m ; b = 5n với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1.

Vỡ vậy : a/b = m/n = 2,6 => m/n = 13/5 tương đương với m = 13 và n = 5 hay a = 65 và b = 25.

Chỷ ý : phân số tương ứng với 2,6 phải chọn là phân số tối giản do (m, n) = 1.

Bài toán 5 :

Tìm a, b biết a/b = 4/5 và [a, b] = 140.

Lời giải : Đặt (a, b) = d. Với , a/b = 4/5 , mặt khác (4, 5) = 1 nên a = 4d, b = 5d.

Lưu ý [a, b] = 4.5.d = 20d = 140 => d = 7 => a = 28 ; b = 35.

Bài toán 6 : Tìm hai số nguyên dương a, b biết a + b = 128 và (a, b) = 16.

Lời giải : Lập luận như bài 1, giả sử a ≤ b.

Ta có : a = 16m ; b = 16n với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1 ; m ≤ n.

Vì vậy : a + b = 128 tương đương 16(m + n) = 128 tương đương m + n = 8

Tương đương với m = 1, n = 7 hoặc m = 3, n = 5 hay a = 16, b = 112 hoặc a = 48, b = 80

Bài toán 7 : Tìm a, b biết a + b = 42 và [a, b] = 72.

Lời giải : Gọi d = (a, b) => a = md ; b = nd với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1.

Không mất tính tổng quát, giả sử a ≤ b => m ≤ n.

Do đó : a + b = d(m + n) = 42 (1)

[a, b] = mnd = 72 (2)

=> d là ước chung của 42 và 72 => d thuộc {1 ; 2 ; 3 ; 6}.

Lần lượt thay các giá trị của d vào (1) và (2) để tính m, n ta thấy chỉ có trường hợp d = 6 => m + n = 7 và mn = 12 => m = 3 và n = 4 . (thỏa mãn các điều kiện của m, n). Vậy d = 6 và a = 3.6 = 18 , b = 4.6 = 24

Bài toán 8 : Tìm a, b biết a - b = 7, [a, b] = 140.

Lời giải : Gọi d = (a, b) => a = md ; b = nd với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1.

Do đó : a - b = d(m - n) = 7 (1')

[a, b] = mnd = 140 (2')

=> d là ước chung của 7 và 140 => d thuộc {1 ; 7}.

Thay lần lượt các giá trị của d vào (1') và (2') để tính m, n ta được kết quả duy nhất

d = 7 => m - n = 1 và mn = 20 => m = 5, n = 4

Vậy d = 7 và a = 5.7 = 35 ; b = 4.7 = 28 .

BÀI TẬP

1) Tìm hai số biết ƯCLN của chúng:

Ví dụ 1: Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 100 và có ƯCLN là 10.

Giải:

Gọi hai số phải tìm là a và b (a $\le$ b). Ta có ƯCLN(a,b) = 10

Do đó a =10.a’ và b = 10.b’ trong đó ƯCLN(a’,b’) = 1 (a, b, a’, b’ $\in$ N)

Theo đầu bài: a + b = 100 suy ra 10.a’ + 10.b’ =100 nên a’+b’ = 10 (a’ $\le$ b’)

Chọn hai số nguyên tố cùng nhau có tổng là 10 ta có

a’	**1**	**3**
b’	**9**	**7**

Do đó

a	**10**	**30**
b	**90**	**70**

Ví dụ 2: Tìm hai số tự nhiên biết ƯCLN của chúng là 5 và chúng có tích là 300

Giải:

Gọi hai số phải tìm là a và b (a $\le$ b). Ta có ƯCLN(a,b) = 5

Do đó a =5.a’ và b = 5.b’ trong đó ƯCLN(a’,b’) = 1 (a, b, a’, b’ $\in$ N)

Theo đầu bài: a.b = 300 suy ra 25.a’.b’ =300 nên a’.b’ = 12 (a’ $\le$ b’)

Chọn hai số nguyên tố cùng nhau có tích là 12 ta có

a’	**1**	**3**
b’	**12**	**4**

Do đó

a	**5**	**15**
b	**60**	**20**

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu số nguyên tố p > 3 thì (p - 1).(p + 1) $\vdots$ 24

Giải:

Ta có : (p - 1).p.(p + 1) $\vdots$ 3 (Tích 3 số tự nhiên liên tiếp)

Vì p là số nguyên tố và p > 3 nên ƯCLN(3, p) = 1 $\Rightarrow$(p - 1).(p + 1) $\vdots$ 3

Do p là số nguyên tố nên p – 1 và p + 1 là hai số chẵn liên tiếp nên có 1số là bội của 2 và một số là bội của 4 $\Rightarrow$ (p - 1).(p + 1) $\vdots$ 8

Mà ƯCLN(3,8) = 1 nên (p - 1).(p + 1) $\vdots$ 3. 8. Vậy (p - 1).(p + 1) $\vdots$ 24 Đpcm.

2) Các bài toán phối hợp giữa ƯCLN và BCNN

Ví dụ: Tìm hai số tự nhiên a, b (a£ b)biết ƯCLN(a,b) = 12, BCNN(a,b) =180

Giải:

Theo đầu bài: ƯCLN(a,b) = 12 Do đó a =12.a’ và b = 12.b’ trong đó ƯCLN(a',b') = 1 (a' £ b'; a', b' ∈ N). Vì ƯCLN(a,b) . BCNN(a,b) = a.b

nên 144a'.b' = 2160 suy ra a'.b' = 15

a'	**1**	**3**
b'	**15**	**5**

Do đó

a	**12**	**36**
b	**180**	**60**

D. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Bài tập tự giải :

Bài 1 : a) Tìm hai số tù nhi ª n a, b biết [a, b] = 240 và (a, b) = 16.

b) Tìm hai số tù nhi ª n a, b biết ab = 216 và (a, b) = 6.

c) Tìm hai số tù nhi ª n a, b biết ab = 180, [a, b] = 60.

d) Tìm hai số tù nhi ª n a, b biết a/b = 2,6 và (a, b) = 5.

e) Tìm a, b biết a/b = 4/5 và [a, b] = 140.

HD: Đặt (a, b) = d. Vì , a/b = 4/5 , mặt khác (4, 5) = 1 nên a = 4d, b = 5d.

Lưu ý [a, b] = 4.5.d = 20d = 140 suy ra d = 7 suy ra a = 28 ; b = 35.

Bài 2: Tìm hai số a, b biết:

a) 7a = 11b và (a, b) = 45.

b) a + b = 448, ƯCLN (a,b) = 16 và chúng có chữ số tËn cïng giống nhau.

Bµi 3: Cho hai số tự nhiên a và b. Tìm tất cả các số tự nhiên c sao cho trong ba số, tích của hai số luôn chia hết cho số còn lại.

Bài 4: Tìm các số tự nhiên m và n sao cho (2m + 1)(2n + 1) = 91

Bài 5: Tìm các số tự nhiên n sao cho 5n + 45 ⋮ n + 3

Bài 6: Tìm số nguyên tố p sao cho cả p + 4 và p + 8 đều là các số nguyên tố

Bài 7: Cho p, q , r là ba số nguyên tố lớn hơn 3

Chứng minh rằng: $p^2 + q^2 + r^2$ là hợp số.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 7: CM " Bình phương của một số nguyên tố lớn hơn 3 chia cho 3 có số dư là 1."

CHUYÊN ĐỀ 4 :
SO SÁNH HAI PHÂN SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN.

- Nắm được các phương pháp cơ bản để so sánh hai phân số, hiểu các thuật ngữ toán học như phần bù của 1, phần thừa của 1...
- Biết nhận dạng các dạng bài tập từ đó có định hướng đúng để sử dụng các phương pháp so sánh hai phân số một cách thích hợp tìm ra lời giải của bài toán
- Có thể tự tạo ra bài tập mới bằng các phương pháp tương tự hoá, tổng quát hoá bài toán ban đầu ..

B. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG KIẾN THỨC

I/ Nhắc lại kiến thức cơ bản

- Để so sánh hai phân số ta thường đưa chúng về hai phân số có cùng mẫu số là số dương, phân số nào có tử số lớn hơn thì phân số đó lớn hơn

Tổng quát: $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a > c \end{cases}$

- Ngoài ra còn một số phương pháp khác như sau:

1/ Quy đồng đưa về hai phân số có cùng tử số là số dương: Phân số nào có mẫu lớn hơn thì phân số đó lớn hơn

2/ Sử dụng phần bù hoặc phần thừa của 1

VD: So sánh $\dfrac{a+1}{a+2}$ và $\dfrac{a+2}{a+3}$ với a là số tự nhiên khác 0

Lời giải:

C1: Quy đồng đưa về cùng mẫu số

C2: Ta có: $\dfrac{a+1}{a+2}=\dfrac{a+2-1}{a+2}=1-\dfrac{1}{a+2}$ còn

$$\frac{a+2}{a+3}=\frac{a+3-1}{a+3}=1-\frac{1}{a+3}$$

Mà $\dfrac{1}{a+2}>\dfrac{1}{a+3}\Rightarrow 1-\dfrac{1}{a+3}>1-\dfrac{1}{a+2}$

Vậy: $\dfrac{a+1}{a+2}<\dfrac{a+2}{a+3}$

3/ Dùng phân số trung gian hoặc tính chất bắc cầu của bất đẳng thức

VD1: Cho hai phân số $A=\dfrac{m^{2008}+1}{m^{2009}+1}$ và $B=\dfrac{m^{2009}+1}{m^{2010}+1}$ với $m\in N^*$

Hãy so sánh A và B

Lời giải:

Nhận xét: - Nếu m = 1 thì A = B

- Với m > 1 ta so sánh mA và mB từ đó dễ dàng so sánh A và B

Ta có: $mA=\dfrac{m\left(m^{2008}+1\right)}{m^{2009}+1}=\dfrac{m^{2009}+m}{m^{2009}+1}=1+\dfrac{m-1}{m^{2009}+1}$

$$mB=\frac{m\left(m^{2009}+1\right)}{m^{2010}+1}=\frac{m^{2010}+m}{m^{2010}+1}=1+\frac{m-1}{m^{2010}+1}$$

vì $\dfrac{m-1}{m^{2009}+1}>\dfrac{m-1}{m^{2010}+1}\Rightarrow mA>mB$ vậy A > B

Mở rộng: Bài toán vẫn đúng khi được tổng quát hoá thành dạng

$$A=\frac{m^n+1}{m^{n+1}+1} \text{ và } B=\frac{m^{n+1}+1}{m^{n+2}+1} \text{ với } m,n\in N^*$$

VD2:Một phân số có tử và mẫu đều là các số nguyên dương. Nếu cộng cả tử và mẫu của phân số đó với cùng một số tự nhiên $n \neq 0$ thì phân số đó thay đổi như thế nào?

Lời giải:

Gọi phân số đó là $\frac{a}{b}$. Ta xét ba trường hợp: a = b; a > b; a< b

- Trường hợp a = b ta có:

$\frac{a}{b}=\frac{a}{a}=\frac{a+n}{a+n}=1$. Vậy giá trị của phân số không thay đổi

- Trường hợp a > b ta có:($\frac{a}{b}$ >1)

$$\frac{a}{b}=\frac{b+a-b}{b}=1+\frac{a-b}{b}$$

Còn $\frac{a+n}{b+n}=\frac{(b+n)+(a+n)-b-n}{b+n}=1+\frac{a-b}{b+n}$

Vì $\frac{a-b}{b}>\frac{a-b}{b+n}\Rightarrow \frac{a}{b}>\frac{a+n}{b+n}$

Vậy: Khi cộng cả tử và mẫu của một phân số lớn hơn 1 (cả tử và mẫu đều là số dương) với cùng một số tự nhiên khác 0 thì được một phân số mới có giá trị lớn hơn giá trị của phân số ban đầu

-Trường hợp a < b ta có:($\frac{a}{b}$ <1)

$$\frac{a}{b}=\frac{b+a-b}{b}=1+\frac{a-b}{b}=1-\frac{b-a}{b}$$

Còn $\frac{a+n}{b+n}=\frac{(b+n)+(a+n)-b-n}{b+n}=1+\frac{a-b}{b+n}=1-\frac{b-a}{b+n}$

Vì $\frac{b-a}{b} > \frac{b-a}{b+n} \Rightarrow 1-\frac{b-a}{b} < 1-\frac{b-a}{b+n}$ Nên $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$

Vậy: Khi cộng cả tử và mẫu của một phân nhỏ hơn 1 (cả tử và mẫu đều là số dương) với cùng một số tự nhiên khác 0 thì được một phân số mới có giá trị nhỏ hơn giá trị của phân số ban đầu

VD3: Tìm số tự nhiên x sao cho $\frac{9}{11} < \frac{x}{15} < \frac{10}{11}$

Lời giải:

Ta có: $\frac{9}{11} < \frac{x}{15} < \frac{10}{11} \Leftrightarrow \frac{9.15}{11.15} < \frac{11.x}{11.15} < \frac{10.15}{11.15}$

Hay $135 < 11x < 150 \Leftrightarrow \frac{135}{11} < x < \frac{150}{11} \Rightarrow x = 13$

Vậy x = 13

Phương pháp chung: Tìm mẫu thức chung của phân số từ đó xét tử số và tìm các giá trị của x thoả mãn bài toán

VD4: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

Lời giải: Xét vế trái ta có

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{100^2} = \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{50^2}\right) <$$

$$< \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{49.50}\right) = \frac{1}{4}\left(1+1-\frac{1}{50}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{200} < \frac{1}{2}$$

Đpcm

C. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Bài 1: So sánh các biểu thức A và B biết:

$a/\ A = \frac{19}{41}+\frac{23}{53}+\frac{29}{61}$ $\qquad B = \frac{21}{41}+\frac{23}{49}+\frac{33}{65}$

$b/\ A = \frac{12}{14^{11}}+\frac{23}{14^{12}}$ $\qquad B = \frac{12}{14^{12}}+\frac{23}{14^{11}}$

$c/\ A = \frac{19^{20}+5}{19^{20}-8}$ $\qquad B = \frac{19^{21}+6}{19^{21}-7}$

$d/\ A = \dfrac{100^{2009}+1}{100^{2008}+1}$ $\qquad B = \dfrac{100^{2010}+1}{100^{2009}+1}$

$e/\ A = \dfrac{5^0+5^1+5^2+...+5^9}{5^0+5^1+5^2+...+5^8}$ $\qquad B = \dfrac{3^0+3^1+3^2+...+3^9}{3^0+3^1+3^2+...+3^8}$

$f/\ A = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad B = \dfrac{n+2}{n+3}$ với $n \in N$

$g/\ A = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ $\qquad B = \dfrac{n^2+3}{n^2+4}$ với $n \in N$

Bài 2: Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{31}+\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{37}+\dfrac{1}{47}+\dfrac{1}{53}+\dfrac{1}{61}<\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{7^2}+...\dfrac{1}{100^2}<\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{98}-\dfrac{1}{99}<\dfrac{2}{5}$

d) $\dfrac{1}{15}<\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{5}{6}...\dfrac{99}{100}<\dfrac{1}{10}$

e) $1<\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+....\dfrac{1}{100!}<2$

Bài 3: Tìm số tự nhiên x biết:

$a)\ \dfrac{1}{100}<\dfrac{x}{110}<\dfrac{1}{50}$ $\qquad b)\ \dfrac{123}{1000}<\dfrac{x}{2008}<\dfrac{124}{1000}$

Bài 4: Tìm hai phân số có cùng mẫu là 17 mà tử số là các số tự nhiên liên tiếp để phân số $\dfrac{3}{11}$ nằm giữa hai phân số đó

Bài 5: Tìm hai phân số có tử là 1, mẫu là hai số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số $\dfrac{13}{84}$ nằm giữa hai phân số đó

Bài 6: Tìm hai phân số có mẫu là 21 và nằm giữa hai phân số $\dfrac{-5}{6}$ và $\dfrac{-5}{7}$

Bài 7: Chứng minh rằng có vô số các phân số nằm giữa hai phân số $\dfrac{a}{m}$ và $\dfrac{b}{m}$ với $a,b,m \in N, m \neq 0$ và $a>b$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.b/: Xét hiệu A – B < 0 suy ra A < B c/ Dùng phần thừa của 1

CHUYÊN ĐỀ 5:
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SỐ HỌC

A.KIẾN THỨC CƠ BẢN.

- Nắm được các phương pháp cơ bản dùng trong giải toán số học.
- Biết nhận dạng các dạng bài tập từ đó có định hướng đúng để sử dụng các phương pháp phù hợp tìm ra lời giải của bài toán
- Có thể tự tạo ra bài tập mới bằng các phương pháp tương tự hoá bài toán ban đầu ..

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI TẬP

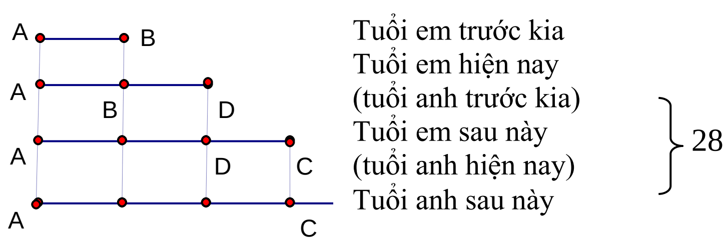
I/ Phương pháp dùng sơ đồ đoạn thẳng

<u>1/ Các ví dụ:</u>

VD1: Tuổi anh hiện nay gấp 3 lần tuổi em trước kia, lúc anh bằng tuổi em hiện nay. Khi anh bằng tuổi em hiện nay thì tổng số tuổi của hai người là 28. Tính số tuổi của mỗi người hiện nay

Lời giải:

Gọi độ dài đoạn thẳng AB là sự biểu thị số tuổi của em trước kia thì tuổi anh hiện nay được biểu thị bằng đoạn thẳng AC gấp 3 lần đoạn thảng AB ta có mô hình quan hệ của bài toán như sau



Do anh luôn hơn em một số tuổi nhất định nên nếu ta biểu thị tuổi anh trước kia (tức tuổi em hiện nay) là đoạn AD, tuổi anh sau này là đoạn AE thì BD = DC = CE chính là số tuổi anh hơn em. Từ sơ đồ ta tính được AB = 4

Vậy tuổi em hiện nay là 8 tuổi

Tuổi anh hiện nay là 12 tuổi

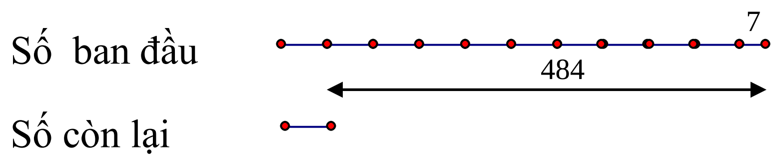
* **Nhận xét**: Với sơ đồ đoạn thẳng ta đã thể hiện trực quan các đại lượng trong bài toán và các quan hệ giữa chúng và đễ dàng tìm ra đáp án của bài toán

VD2: Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 7 biết rằng sau khi xoá số 7 ấy đi thì số tự nhiên đó giảm đi 484 đơn vị

Lời giải:

Xoá số 7 ở tận cùng là trừ số đó đi 7 đơn vị sau đó chia cho 10.

Ta có sơ đồ sau:



Theo sơ đồ ta có :

Số còn lại là: (484 - 7): 9 = 53

Vậy số tự nhiên ban đầu là 53. 10 + 7 = 537

2/ Một số bài tập:

Bài 1.1: Trên hai ngăn của giá sách có tổng cộng 118 cuốn. Nếu lấy đi 8 cuốn ở ngăn thứ nhất sau đó thêm vào ngăn thứ hai 10 cuốn sách thì số sách ở ngăn thứ gấp đoi số sách ở ngăn thứ nhất. Tính số sách trong mỗi ngăn lúc ban đầu.

Bài 2.1: Mẹ hơn con 28 tuổi. Sau 5 năm nữa tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi con. Tính tuổi mẹ và tuổi con hiện nay?

Bài 3.1: Số dân trước kia của hai huyện A và B tỉ lệ với 2 và 3. Hiện nay dân số huyện A tăng thêm 8000 người, dân số huyện B tăng thêm 4000 nên dân số huyện A gấp $\frac{3}{4}$ dân số huyện B. Tính số dân hiện nay của mỗi huyện

II/ Phương pháp giải thiết tạm

1/ Các ví dụ:

VD1: Xét bài toán cổ: "Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn"

Hỏi mỗi loài có bao nhiêu con?

Lời giải:

Giả sử tất cả 36 con đều là chó khi đó tổng số chân là: 36.4 = 144 chân, thừa 44 chân so với đầu bài chính là do còn số chân của gà

Vậy số gà là: 44: 2 = 22 con

Số chó là 36 – 22 = 14 con

VD 2: Một đội bóng thi đấu tất cả 25 trận chỉ thắng hoặc hoà. Biết mỗi trận thắng đội được 3 điểm, mỗi trận hoà được 1 điểm. Tổng số điểm đội đạt được là 59 điểm. Tính số trận thắng và trận hoà của đội bóng đó.

Lời giải:

Giả sử tất cả các trận đội đều hoà, khi đó số điểm đạt được là 25 điểm. Do tổng số điểm đội đạt được là 59 điểm thừa 34 điểm so với giả sử là do đội còn có các trận thắng và mỗi trận thắng nhiều hơn các trận hoà là 2 điểm.

Vậy số các trận thắng của đội là 34 : 2 = 17 trận

Số trận hoà là: 25 – 17 = 8 trận

Vậy đội thắng 17 trận, hoà 8 trận

<u>2/ Một số bài tập:</u>

Bài 1.2: Một nhà hàng có 22 chiếc ghế gồm các loại 3 chân, 4 chân và 6 chân. Tính số ghế mỗi loại, biết số ghế 6 chân gấp đôi số ghế 3 chân và tổng số có tất cả 100 chân ghế

Bài 2.2: Một cuộc thi có 20 câu hỏi, mỗi đội dự thi phải trả lời đủ 20 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được cộng thêm 5 điểm, trả lời sai bị trừ 1 điểm. Một đội dự thi và đạt 52 điểm. Tính xem đội đó trả lời đúng mấy câu, sai mấy câu ?

Bài 3.2: Trên đoạn đường AC dài 200 km có điểm B cách A 10 km. Lúc 7 giờ hai ô tô cùng xuất phát cùng chiều nhau xe thứ nhất đi từ A, xe thứ hai đi từ B và cùng tới C với vận tốc lần lượt là 50 km/h và 40 km/h. Hỏi lúc mấy giờ thì khoảng cách đến C của xe thứ hai gấp đôi khoảng cách đến C của xe thứ nhất ?

III/ Phương pháp lựa chọn

Một số bài toán về số tự nhiên có thể giải bằng cách căn cứ vào các dữ kiện của bài toán để tìm ra một số giái trị thoả mãn điều kiện sau đó thử xem trường hợp nào thoả mãn đầu bài của bài toán và lựa chọn các kết quả đúng

<u>1/ Các ví dụ:</u>

VD1: Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số biết rằng số đó chia hết cho 18 và các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thì tỉ lệ với 1: 2 : 3

Lời giải:

Vì các số tỉ lệ với 1 : 2 : 3 chỉ có thể là 1, 2, 3 hoặc 2, 4, 6 hoặc 3, 6, 9 nên số phải tìm có các là số lập nên từ một trong ba bộ các chữ số trên

Nhưng số phải tìm chia hết cho 18 nghĩa là chia hết cho 9 nên tổng các chữ số của nó phải chia hết cho 9. Như vậy chỉ có bộ ba chữ số 3, 6, 9 thoả mãn điều kiện đó. Mặt khác số đó chia hết cho 18 nên phải chia hết cho 2 suy ra nó có chữ số tận cùng là số chẵn. Vậy số phải tìm là **396** hặc **936** thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Nhận xét: Ta có thể xét điều kiện số có ba chữ số chia hết cho 18 trước. Tuy nhiên khi đó phải thử chọn nhiều kết quả hơn. Vì vậy cần lưu ý khi sử dụng phương pháp này là kiểm tra các điều kiện loại được nhiều các giá trị không thoả mãn trước để vùng lựa chọn được thu hẹp lại giúp ta tìm đáp án bài toán nhanh hơn

VD2: Tìm số tự nhiên x biết tổng các chữ số của x là y, tổng các chữ số của y là z và x + y + z = 60

Lời giải:

Nhận xét: Ta thấy x là số có hai chữ số và x < 60

Khi đó x = $\overline{ab}$ suy ra y = 10a + b.Có hai trường hợp đối với z

1) Nếu a + b < 10 thì z = y = a + b
2) Nếu $a + b \geq 10$ thì z = a + b – 9

Xét trường hợp 1: Do x + y + z = 60 nên ta có 10a + b + (a + b) + (a + b) = 60

hay 4a + b =20 suy ra b = 20 – 4a $\vdots$ 4 vậy b nhận các giá trị 0, 4, 8, tương ứng ta tìm được các giá trị của a là 5, 4, 3 . Tuy nhiên cặp giá trị a = 3, b = 8 bị loại vì a + b > 10. Từ đó ta tìm được x bằng **50** hoặc **44**

Xét trường hợp 2: Ta có 10a + b + (a + b) + (a + b – 9) = 60

hay 4a + b = 23. Kết hợp các điều kiện ta tìm được a = 4, b = 7 thoả mãn từ đó tìm được x = **47**

Vậy có 3 số thoả mãn đầu bài

<u>2/ Một số bài tập:</u>

Bài 1.3: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết nếu chia số đó cho tích các chữ số của nó thì được $\frac{8}{3}$ và hiệu giữa số phải tìm với số gồm các chữ số của số đó viết theo thứ tự ngược lại là 18.

Bài 2.3: Có ba tờ bìa ghi các số 23, 79 và $\overline{ab}$. Xếp ba tờ bìa đó lại thành thì được một số có 6 chữ số. Cộng tất cả các số có 6 chữ số đó lại (đổi chỗ các tờ bìa ta lại được sô có 6 chữ số khác) thì được kết quả là 2 989 896. Tìm số $\overline{ab}$

Bài 3.3: Trên một tấm bia có các vòng tròn tính điểm là 18, 23, 28, 33, 38. Muốn trúng thưởng thì phải bắn một số phát để đạt đúng 100 điểm. Hỏi phải bắn bao nhiêu phát và vào những vòng nào để trúng thưởng.