

Bài 8: a) Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất

b) Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$; $\frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $x^2 - y^2 = -16$

c) Tìm x, y, z biết $\frac{3x}{8} = \frac{3y}{64} = \frac{3z}{216}$ và $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$

d) Tìm các số nguyên tố x, y sao cho: $51x + 26y = 2000$.

Bài 9: Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương đều có:

a) $A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2) \quad \vdots \quad 91$

b) $B = 36^{38} + 41^{33}$ chia hết cho 77.

c) $C = 3^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+3} + 2^{n+2}$ chia hết cho 6.

d) Chứng minh rằng $\frac{10^{2006} + 53}{9}$ là một số tự nhiên.

Bài 10: Một ô tô phải đi từ A đến B trong thời gian dự định. Sau khi đi được nửa quãng đường ô tô tăng vận tốc lên 20% do đó đến B sớm hơn dự định 15 phút.

Tính thời gian ô tô đi từ A đến B?

Bài 11: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$ và tìm giá trị đó.

a). $A = \frac{x+3}{x-2}$.

b). $B = \frac{1-2x}{x+3}$.

Bài 12: Ba lớp 7A, 7B, 7C có 94 học sinh tham gia trồng cây. Mỗi học sinh lớp 7A trồng được 3 cây, Mỗi học sinh lớp 7B trồng được 4 cây, Mỗi học sinh lớp 7C trồng được 5 cây. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu h/ s. Biết rằng số cây mỗi lớp trồng được đều như nhau.

Bài 13: Trong một kỳ thi học sinh giỏi cấp Huyện, bốn bạn Nam, Bắc, Tây, Đông đoạt 4 giải 1, 2, 3, 4. Biết rằng mỗi câu trong 3 câu dưới đây đúng một nửa và sai 1 nửa:

a, Tây đạt giải 1, Bắc đạt giải 2. b, Tây đạt giải 2, Đông đạt giải 3.

c, Nam đạt giải 2, Đông đạt giải 4.

Em hãy xác định thứ tự đúng của giải cho các bạn.

Bài 14: a) Chứng minh rằng: $2a - 5b + 6c \vdots 17$ nếu $a - 11b + 3c \vdots 17$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$).

b) Biết $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Bài 15: Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$.

CMR biểu thức sau có giá trị nguyên: $P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$

Bài 16: Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5m/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4m/s, trên cạnh thứ tư với vận tốc 3m/s. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây.

Bài 17: Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$ b) $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$

Bài 18: Tìm A biết rằng: $A = \frac{a}{b+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{b}{c+a}$.

Bài 19: Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A ?

Đáp án:

BÀI 1: Cho ΔABC nhọn. Vẽ về phía ngoài ΔABC các Δ đều ABD và ACE. Gọi M là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABE = \Delta ADC$

b) $\angle BMC = 120^\circ$

Giải:

a) Xét ΔABE và ΔADC :

$AB = AD; AE = AC$ (vì tam giác đều)

$\angle BAE = \angle DAC = 60^\circ + \angle BAC$

nên $\Delta ABE = \Delta ADC$ (c - g - c)

b) Ta có : $\angle BMC = \angle MCE + \angle MEC$ (t/c góc ngoài)

$= \angle MCA + \angle ACE + \angle MEC$

Từ $\Delta ABE = \Delta ADC$

$\angle MCA = \angle MEA$ (cặp góc tương ứng)

nên $\angle BMC = \angle ACE + \angle MEC + \angle MEA = \angle ACE + \angle AEC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

Bài 2: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH. ở miền ngoài của tam giác ABC ta vẽ các tam giác vuông cân ABE và ACF đều nhận A làm đỉnh góc vuông. Kẻ EM, FN cùng vuông góc với AH (M, N thuộc AH).

a) Chứng minh: $EM + HC = NH$.

b) Chứng minh: $EN \parallel FM$.

Giải:

a) Ta có : $\Delta AHB = \Delta EMA$ (ch - gn)

Vì $\angle AHB = \angle EMA = 90^\circ$

$AB = AE$ (gt)

$\angle BAH = \angle AEM$ (cùng phụ với $\angle MAE$)

Suy ra : $EM = AH$ (1)

Tương tự: $\Delta AHC = \Delta FNA$ (ch - gn)

$\Rightarrow HC = NA$ (2)

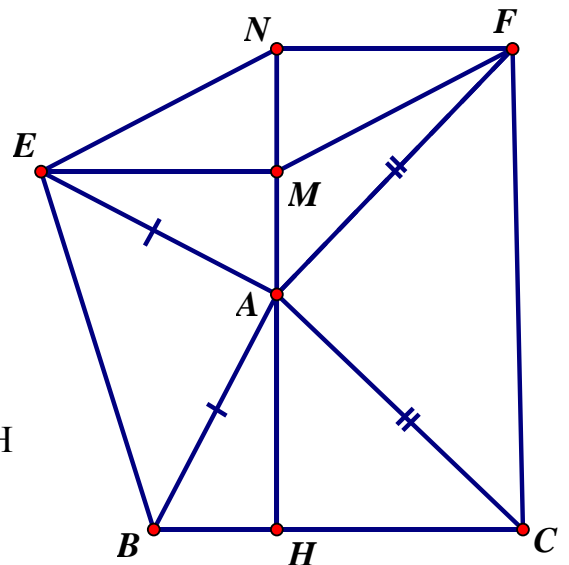
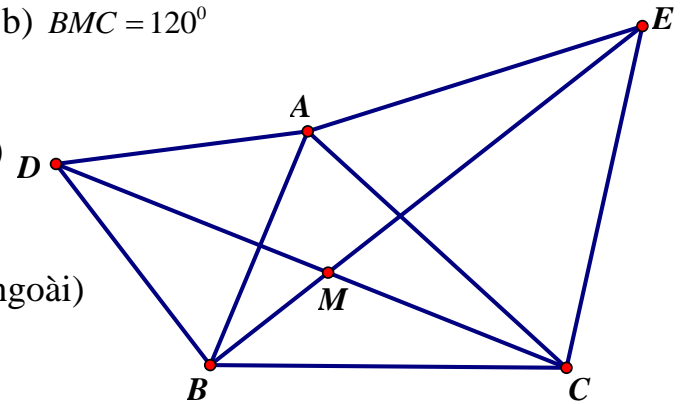
Từ (1) và (2). Suy ra : $EM + HC = AH + NA = NH$

b) Từ $\Delta AHC = \Delta FNA \Rightarrow AH = NF$ (3)

Từ (1) và (3). Ta có : $EM = MF$

mặt khác : $EM \parallel NF$ (cùng vuông góc với AH)

Ta suy ra : $EN \parallel FM$



Bài 3: Cho cạnh hình vuông ABCD có độ dài là 1. Trên các cạnh AB, AD lấy các điểm P, Q sao cho chu vi ΔAPQ bằng 2.

Chứng minh rằng : $\angle PCQ = 45^\circ$.

Giải:

Trên cạnh AB lấy điểm P bất kì.
 Vẽ đường tròn (P; PB) và đường tròn (C; CB)
 Cắt nhau tại I. Gọi $J = PI \cap AD$.
 Ta có : ΔAPQ có chu vi bằng 2 cm.
 Thật vậy: $\Delta PBC = \Delta BIC$ (c - c - c)

$$\Rightarrow \angle ICP = \angle BCP \quad (*)$$

$$\text{Nên } \angle PIC = \angle PBC = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra : } \Delta QIC = \Delta QDC \text{ (ch - cv)}$$

$$\Rightarrow IQ = QD; ICQ = DCQ \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy Chu vi } \Delta APQ &= AP + PQ + AQ = AP + PI + IQ + AQ \\ &= AP + PB + QD + AQ = AB + AD = 2 \end{aligned}$$

Từ (*) và (**). Ta có :

$$\angle PCQ = \angle PCI + \angle ICQ = \frac{\angle ICB + \angle ICD}{2} = \frac{\angle BCD}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Bài 4: Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = AC$), tia phân giác của các góc B và C cắt AC và AB lần lượt tại E và D.

a) Chứng minh rằng: $BE = CD$; $AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BE và CD. AI cắt BC ở M, chứng minh rằng các ΔMAB ; ΔMAC là tam giác vuông cân.

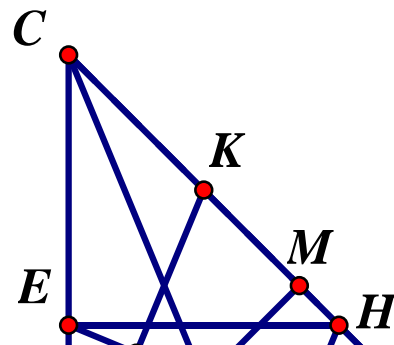
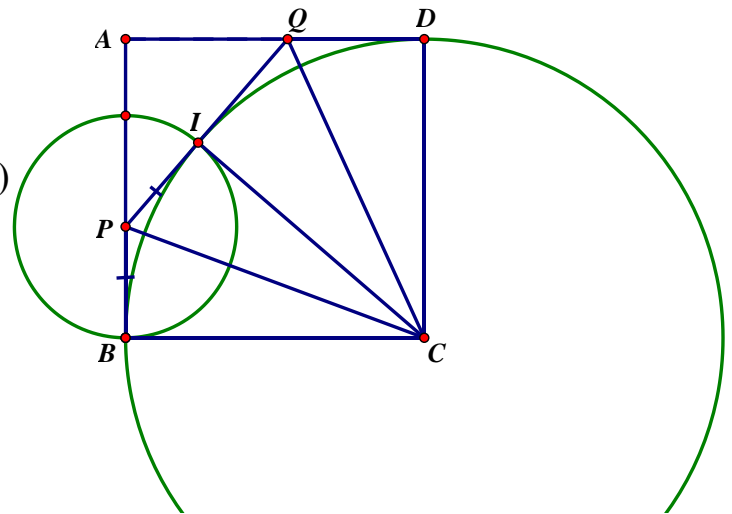
c) Từ A và D vẽ các đường thẳng vuông góc với BE, các đường thẳng này cắt BC lần lượt ở K và H. Chứng minh rằng $KH = KC$.

$$\text{Giải: a) Ta có: } \angle ABE = \angle ACD = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$$

$$\text{Nên } \Delta ACD = \Delta ABE \text{ (g - c - g)}$$

$$\Rightarrow BE = CD; AD = AE.$$

b) Vì ΔABC vuông cân tại A nên AM là đường trung tuyến thì



AM cũng là đường cao.

Suy ra : ΔMAB ; ΔMAC là các tam giác vuông

Có 1 góc bằng 45° là tam giác vuông cân.

c) ΔABK có BE vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên ΔABK cân tại B.

Suy ra : BE cũng là đường trung trực

Nên $EK = EA \Rightarrow \Delta AEB = \Delta KEB(c-c-c)$

$\Rightarrow \angle EKC = 90^\circ$; $\angle KCE = 45^\circ$ nên ΔEKC vuông cân

nên $KC = KE$ và $\angle CEK = 45^\circ$ (*)

nên $EK \parallel AM$ Suy ra : ΔEKH vuông cân tại K

(Vì $\angle K = 90^\circ$;

Bài 5: Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N. Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$

b) Đường thẳng BC cắt MN tại trung điểm I của MN.

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

Giải: a) Ta có : $\Delta DMB = \Delta ENC$ (g-c-g) (Vì $\angle MBD = \angle NCE$ cùng bằng $\angle ACB$)

Nên $DM = EN$.

b) Xét ΔDMI và ΔENI : $\angle D = \angle E = 90^\circ$, $DM = EN$ (cmt)

$\angle MID = \angle NIE$ (Hai góc đối đỉnh)

Nên $\Delta DMI = \Delta ENI$ (cvg - gn)

$\Rightarrow MI = NI$

c) Từ B và C kẻ các đường thẳng lần lượt vuông góc với AB và AC cắt nhau tại J.

Ta có : $\Delta ABJ = \Delta ACJ$ (g-c-g) $\Rightarrow JB = JC$

Nên J thuộc AL đường trung trực ứng với BC

Mặt khác : Từ $\Delta DMB = \Delta ENC$ (Câu a)

Ta có : $BM = CN$

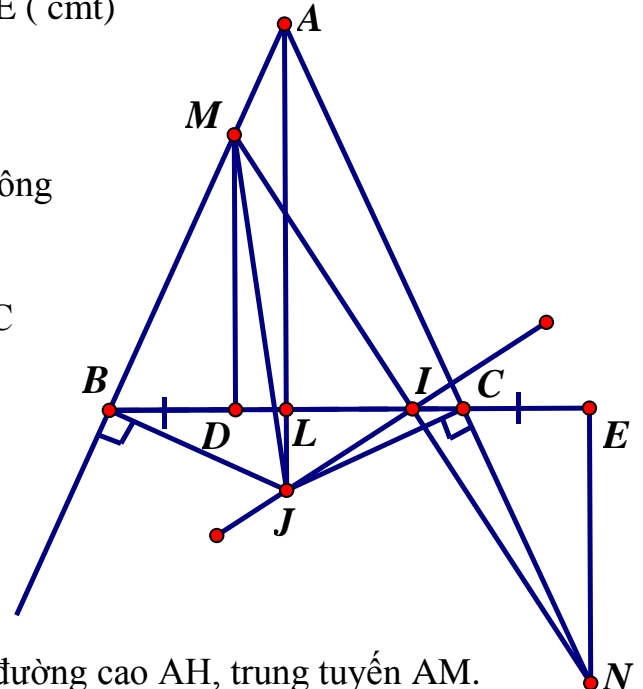
$BJ = CJ$ (cm trên)

$\angle MBJ = \angle NCJ = 90^\circ$

Nên $\Delta BMJ = \Delta CNJ$ (c-g-c)

$\Rightarrow MJ = NJ$ hay đường trung trực của MN

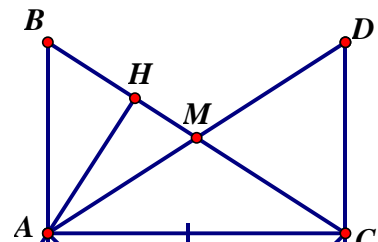
Luôn đi qua điểm J cố định.



Bài 6: Cho tam giác vuông ABC: $\angle A = 90^\circ$, đường cao AH, trung tuyến AM.

Trên tia đối tia MA lấy điểm D sao cho $DM = MA$.

Trên tia đối tia CD lấy điểm I sao cho



$CI = CA$, qua I vẽ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng AH tại E.

Chứng minh: $AE = BC$.

a) Ta có : $\triangle AMB = \triangle DMC (c - g - c)$

$$\Rightarrow AB = DC$$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle CDA (c - c - c)$

Mặt khác : $\triangle ACI : \angle ACI = 90^\circ; AC = CI$: vuông cân

$$\triangle ACJ = \triangle ICJ (CH - CGV)$$

$\Rightarrow \angle ACJ = \angle ICJ$ hay CJ là phân giác của $\angle ACI$ hay $\triangle ACJ$ vuông cân tại J.

Nên $AJ = AC$

Xét $\triangle EJA$ và $\triangle ABC$: $\angle BAC = \angle JAE = 90^\circ; AJ = AC$ (cmt);

$$\angle EAJ = \angle BAC (= \angle BAH)$$

Nên $\triangle EJA = \triangle ABC (g - c - g) \Rightarrow AE = BC$

Bài 7: Cho ba điểm B, H, C thẳng hàng, $BC = 13$ cm, $BH = 4$ cm, $HC = 9$ cm. Từ H vẽ tia Hx vuông góc với đường thẳng BC.

Lấy A thuộc tia Hx sao cho $HA = 6$ cm.

a) $\triangle ABC$ là \triangle gì ? Chứng minh điều đó.

b) Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Từ D vẽ đường thẳng song song với AH cắt AC tại E. Chứng minh: $AE = AB$

